

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.04.001

随机中心耦合布朗马达的定向输运与随机共振

倪飞翔¹, 王会琦¹, 吕王勇², 林丽烽³, 余磊⁴

(1. 重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331; 2. 四川师范大学数学与信息科学学院, 成都 610068;
3. 福建农林大学计算机与信息科学学院, 福州 350002; 4. 重庆师范大学计算机与信息科学学院, 重庆 401331)

摘要: 在一些物理和生物环境中, 耦合布朗粒子因受介质的温度、浓度等的影响而与周围粒子作用, 产生不同程度的粘附和脱落过程, 其中便伴随着关联结构的随机解耦合和再耦合行为. 本文基于 Langevin 方程引入了一种新的具有中心随机耦合结构的布朗马达模型来刻画系统输运过程中环境粒子与中心粒子间以一定概率发生局部弹性耦合作用, 并形成关联粒子数的随机涨落. 仿真结果表明, 耦合系统的结构参数、势场对称性及噪声强度等对粒子输运行为均产生显著影响, 并且可以观察到系统协作、随机共振和广义随机共振等现象.

关键词: 布朗马达; 随机耦合; 定向输运; 随机共振

中图分类号: O211.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2018)04-0661-06

Directed transport and stochastic resonance in centralized coupled Brownian motors with stochastic interactions

NI Fei-Xiang¹, WANG Hui-Qi¹, LÜ Wang-Yong², LIN Li-Feng³, YU Lei⁴

(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China;
3. College of Computer and Information Science, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China;
4. College of Computer and Information Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In some physical or biological environments, the surrounding medium contains many particles of the same kind as coupled Brownian particles capable of not only decoupling from the original coupled system but also adhering to each other and recoupling a larger system. Thus a mathematical model is proposed based on Langevin equations (LEs) to characterize the random interactions with fluctuating number of Brownian particles in the centralized coupled system. By the system simulations, the effects of interacting parameters, ratchet asymmetry and noisy intensity on collective transport behaviors are investigated, and some phenomena, such as cooperative behaviors, stochastic resonance (SR) and generalized SR, are observed.

Keywords: Brownian motor; Stochastic interaction; Directed transport; Stochastic resonance

收稿日期: 2017-12-12

基金项目: 国家自然科学基金(11601357, 11701086); 福建省自然科学基金(2017J01550); 重庆市基础科学与前沿技术研究专项基金(cstc2017jcyjAX0412, cstc2014jcyjA40026)

作者简介: 倪飞翔(1993-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为布朗马达及其数值计算.

通讯作者: 王会琦. E-mail: wanghuiqi@cqu.edu.cn

1 引言

近年来,耦合布朗马达的定向输运现象受到了物理、生物等不同学科领域的密切关注,并成为非线性系统定向输运研究的一个重要方向^[1].这种系统间的集体协作行为^[2]在分子输运控制、细小颗粒分离以及某些生物功能实现等方面具有重要的应用前景^[2-5].目前,已有大量文献从实验和理论方面对耦合系统定向输运现象进行了研究.例如,Lipowsky 等^[6]发现多个分子马达耦合会大幅提高输运速度;Downton 等^[7]则发现马达链内部做功会使多分子马达的输运效率远低于单分子马达;Roostalu 等^[8]发现驱动蛋白 Cin8 利用分子间的耦合作用可以改变定向输运方向.即使在对称势中,多粒子间的耦合作用也可导致系统对称性的破缺,从而形成定向输运.如 Porto 等^[9]提出的含时耦合定向输运模型,Zheng 等^[10]提出的耦合偏置定向输运模型.近几年,许多学者又针对复杂黏弹性介质提出了具有记忆性的分数阶耦合布朗马达模型,并在带反馈状态下研究了粒子链的输运行为^[11-14].结合具体物理背景,目前通常采用的布朗粒子间结构包括线性^[15]、对数^[16]、以及全局相位耦合^[17]等形式.

在一些物理和生物环境中,耦合系统演化过程受介质温度、浓度等属性影响而与周围粒子作用产生不同程度的粘附和脱落过程,并伴随关联结构的随机解耦合与再耦合行为发生.最近被广泛关注的纳米机械谐振器^[18,19]就是一个典型例子.它可以随机吸收和释放周围分子,耦合粒子数发生随机涨落.随着其应用的深入,具有期望动力学行为的确定性或随机性的耦合结构也将具有重要研究价值.由此,具有随机结构形式的耦合系统动力学行为的研究也有助于操控技术和手段的改进和完善.有鉴于此,本文将引入一种新的具有中心随机耦合结构的布朗马达模型.在系统输运过程中,周围粒子与中心粒子间以一定概率发生局部弹性耦合作用,该耦合作用时长服从一定的随机分布形式.系统仿真结果显示,耦合系统中内部结构参数、外部势场对称性、环境噪声强度等对耦合布朗马达输运行为有明显影响,并且存在随机共振和广义随机共振现象.

2 系统模型

我们考虑经典 Frenkel-Kontorova 模型^[20]并忽略惯性效应,在外力 $f_i(t)$ 和噪声 $\xi_i(t)$ 的驱动

下,确定性耦合结构中的 N 个布朗粒子在棘齿势 $U(x_i)$ 中的运动方程可由如下 Langevin 方程刻画:

$$\dot{x}_i(t) = -\frac{\partial U(x_i)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^N F(x_i, x_j) + f_i(t) + \sqrt{2D}\xi_i(t), i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 $x_i(t)$ 为粒子 i 在 t 时刻位移, $F(x_i, x_j)$ 为粒子 i 和 j 之间的耦合力, D 为环境噪声强度, $\xi_i(t)$ 为高斯白噪声,且 $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_i(t)\xi_j(s) \rangle = \delta_{ij}\delta(t-s)$. 本文把耦合系统建模为图 1 所示的中心关联结构,中心粒子与周围粒子 i 发生形式为 $F(x, x_j) = k(x - x_j)$ 的随机弹性耦合,即关联的起始时刻是随机的,在系统演化时间 $[0, \tau]$ 中服从均匀分布,持续时间服从参数为 Δ 均匀分布,粒子 i 与中心粒子的关联发生在一个随机时间段 $S_i = [T_i, T_i + \Delta t_i]$. 由此对应如下运动方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + \sum_{i=1}^N k(x_i - x) + f(t) + \sqrt{2D}\xi(t), \\ \dot{x}_i(t) = -\frac{\partial U(x_i)}{\partial x_i} + k(x - x_i) + f(t) + \sqrt{2D}\xi_i(t), t \in S_i \end{cases} \quad (2)$$

其中 $i=1, 2, \dots, N$. 假设同性粒子在介质中均匀分布,各粒子的随机关联时刻和持续时间均满足均匀分布: $T_i \sim U(0, T)$, $\Delta t_i \sim U(0, 2\Delta)$,且在 $i \neq j$ 时满足统计特性

$$\langle T_i T_j \rangle = 0, \langle \Delta t_i \Delta t_j \rangle = 0, \langle T_i \Delta t_j \rangle = 0 \quad (3)$$

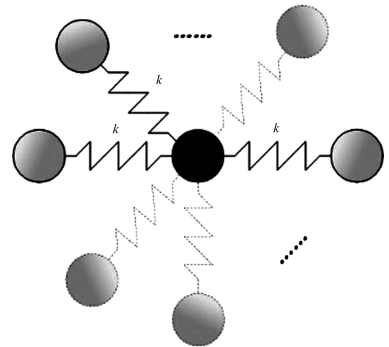


图 1 中心耦合结构

Fig. 1 Centralized coupled structure

本文取外部驱动力为 $f(t) = A\cos\omega t$ 无偏置对称形式,其中 A 为驱动幅度, ω 为驱动角频率,并考虑周期 $l=1$ 的棘齿势

$$U(x) = -U_0 [\sin 2\pi x + \mu \sin 4\pi x] \quad (4)$$

其中 U_0 为势垒高度控制参数, μ 反映了棘齿势的对称性. 选取 $U_0 = 0.454$, 势垒高度归一化的势函数如图 2

所示. 此时粒子在非对称势场力作用下易于产生正向运输.

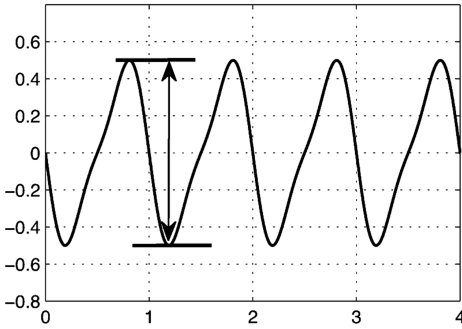


图 2 棘齿势函数 $U_0 = 0.454, \mu = 0.25$

Fig. 2 Ratchet potential with $U_0 = 0.454$ and $\mu = 0.25$

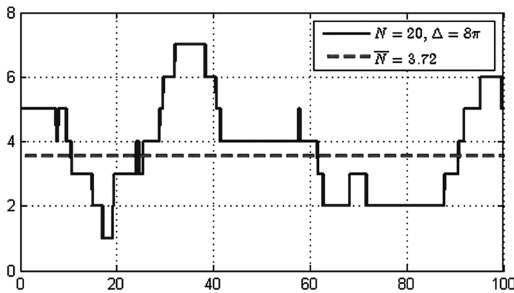
记 $n_j(t)$ 为粒子 j 随时间是否发生耦合关系的示性函数, 即有

$$n_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in S_j, \\ 0, & t \notin S_j \end{cases} \quad (5)$$

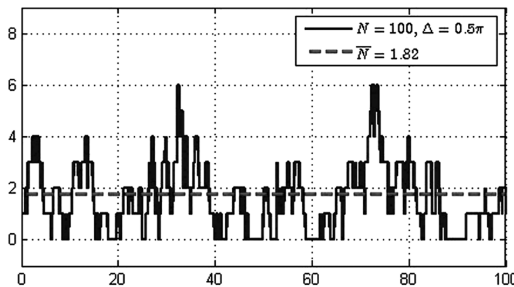
则演化过程中耦合粒子数涨落的随机过程 $N(t)$ 可表示为

$$N(t) = \sum_{j=1}^N n_j(t) \quad (6)$$

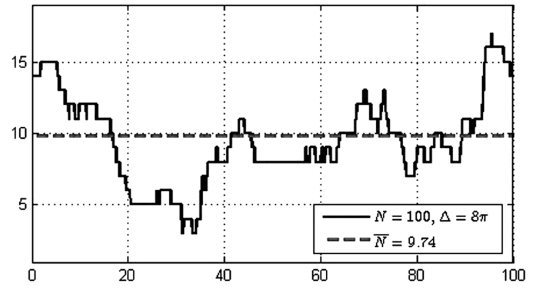
给定不同的 N 和 Δ 参数值, 在系统演化时长 $[t_0, t]$ 内, 仿真粒子的涨落过程 (如图 3 所示) 在该系统的平均耦合粒子数 $\bar{N} = N\Delta / (t - t_0)$ 上下波动: Δ 越小或 N 越大, $N(t)$ 变化越快; 同样, N 或 Δ 越大, 波动越剧烈.



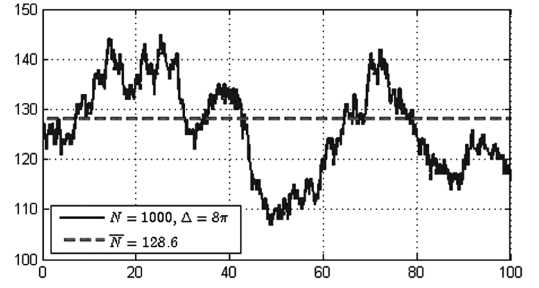
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3 不同 N 和 Δ 情况下随机耦合系统的粒子涨落
Fig. 3 Fluctuating number of particles in coupled system with different N and Δ

3 系统模拟与结果分析

对于 Langevin 方程形式的系统 (2), 显式 Euler 和 Milstein 数值计算公式形式相同. 设定系统随时间演化的离散化步长 h , 中心粒子的位移迭代公式如下:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h[-U'(x(t_n)) + F(x(t_n) - x_i(t_n)) + f(t_{n+1})] + h\sqrt{2D}\xi(t_{n+1}) \quad (7)$$

其中给定初始条件 $x(t_0) = 0$. 耦合粒子 i 在随机时间段 $S_i = [T_i, T_i + \Delta t_i]$ 上的位移迭代公式为

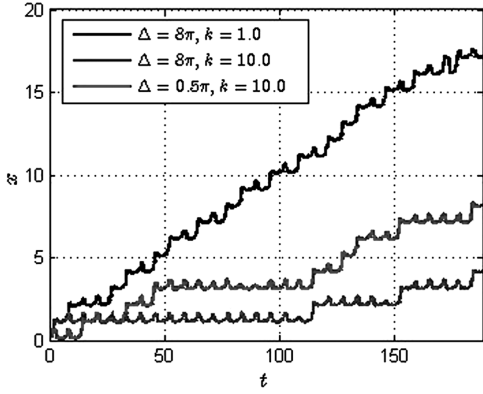
$$x_i(t_{n+1}) = \begin{cases} x_i(t_n) + h[-U'(x_i(t_n)) + F_i(x(t_n) - x_i(t_n)) + f(t_{n+1})] + h\sqrt{2D}\xi_i(t_{n+1}), & t_{n+1} \in S_i, \\ x(t_{n+1}), & t_{n+1} \notin S_i \end{cases} \quad (8)$$

其中 $F(y) = -\sum_{i=1}^N F_i(y)$. 本文主要关注粒子的运输行为, 为此选用中心粒子流速来度量:

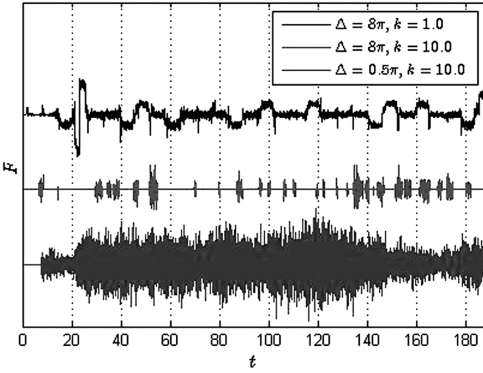
$$V = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \dot{x}(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \quad (9)$$

其中, 起始时刻 t_0 和终止时刻 t 分别设置为 0 和 T , $\langle \cdot \rangle$ 表示对粒子运动轨道的空间平均. 在下面的各模拟实验中, 我们均采用 Monte Carlo 方法进行 500 次数值仿真取平均值作为中心耦合粒子的平均运输速度. 若无特殊说明, 选取一

般参数如下：时间演化步长 $h=0.005$ ，外部周期驱动频率 $\omega=1.0$ ， $\Delta l=0.005$ ，仿真时间取 $T=60\pi$ ，为保证外力无偏置，取 $T=32\pi$ ，耦合粒子个数 $N=50$ 。



(a)



(b)

图 4 (a) 平均作用时间 Δ 和耦合强度 k 不同的情况下中心粒子位移 x 随时间 t 的演化；(b) 对应耦合作用力 F 随时间 t 的变化情况

Fig. 4 (a) The trajectories of central particle with different interacting time Δ and coupling constant k ; (b) The coupling force F of central particle with the time t , $N=40$

给定外部驱动幅度 $A=2.3$ 和噪声强度 $D=3$ ，我们来考察不同平均关联时间 Δ 和耦合强度 k 对中心粒子平均位移 x 随时间 t 演化的影响。从图 4(a) 可以明显看出：三种参数设置下都出现了粒子正向输运行为。其中， $\Delta=8\pi$ 对应较大的粒子涨落，较小系数 $k=1$ 控制了耦合力(图 4(b))对粒子链的协助跃迁作用，前向跃迁概率的显著增加产生最大输运速度； $k=10$ 较大时，耦合力表现为过剩噪声，使粒子链前向和后向跃迁概率差减小，此时输运速度主要取决于棘齿势的非对称性； $\Delta=0.5\pi$ 时粒子涨落较小，即使 $k=10$ ，耦合力也仅表现为稀疏的协助激励，而且由图 4(b) 可见粒子链前向跃迁也都出现在

该激励时段。此外，图 5 还给出以上参数设置下对应的粒子流速 V 与随机耦合粒子数 N 的关系。此时 N 在 5 到 85 范围内增加时，观察到 V 递增或递减的单调变化，并逐步逼近于一稳定流速。

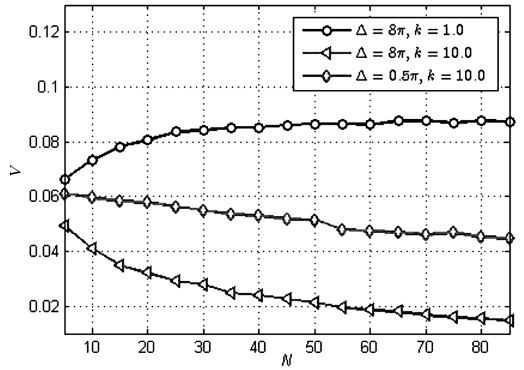


图 5 平均作用时间 Δ 和耦合强度 k 不同的情况下粒子流速 V 与随机耦合粒子数 N 之间的关系

Fig. 5 The average velocity V vs the fluctuating number N with different interacting time Δ and coupling constant k

图 6 给出了不同 Δ 情况下布朗粒子平均流速 V 与环境噪声强度 D 的关系，其中参数 $A=2.3$ ， $k=2.0$ ， $\mu=0.25$ 。可以看出：速度 V 随 D 增加表现出明显的经典随机共振行为。噪声强度增加逐渐加大了粒子链正向跃迁概率，但达到一定值后 D 增加所形成的系统无序性在统计意义上又降低粒子正向流速。此外，随 Δ 增加，峰值流速显著增加，共振峰位置发生微小前移，表明粒子涨落产生的随机耦合力在一定程度上对粒子跃迁具有协助作用，较大的随机耦合力对应了较小噪声强度下达到系统的峰值流速，虽然这种作用表现的并非十分明显。

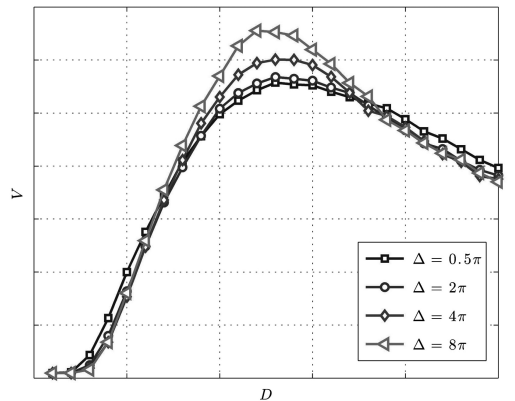


图 6 平均作用时间 Δ 不同的情况下粒子流速 V 与噪声强度 D 之间的关系

Fig. 6 The average velocity V vs the noise intensity D with different interacting time Δ

同样, 图 7 给出了不同 Δ 时粒子平均流速 V 与外部周期力幅度 A 的关系, 其中参数 $D=3$, $k=2.0, \mu=0.25$. 可以看出: 速度 V 随 A 增加也具有先增后减的非线性趋势, 即具有随参数 A 的广义随机共振现象, 此时随机耦合力作用不显著, 曲线趋势主要依赖于 A 的变化, 且在 $A=4.2$ 处达到峰值流速. 考虑等效摇摆势:

$$U_{eff}(x) = U(x) - A \cos \omega t \cdot x,$$

驱动周期内左右最大摆幅下对应的势函数分别为 $U(x) + Ax$ 和 $U(x) - Ax$. A 的增加首先加大了粒子跃迁概率的非对称性, 并在 $U(x) - Ax$ 中前向跃迁所要克服的能量势垒恰好消失时产生峰值流速, 随 A 的继续增加, $U(x) + Ax$ 中后向跃迁能量势垒也将消失, 粒子流速开始减小, 最终又依赖于棘齿势 $U(x)$ 的自身非对称性.

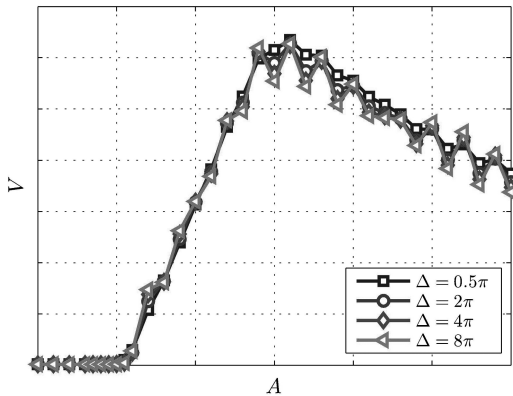


图 7 平均作用时间 Δ 不同的情况下粒子流速 V 与周期力幅度 A 之间的关系
Fig. 7 The average velocity V vs the driving amplitude A with different interacting time Δ

在平均耦合作用时间 Δ 不同的情况下, 图 8 给出了粒子流速 V 与耦合系数 k 的关系, 其中给定参数 $A=2.3, \mu=0.25, D=3$. 可以看出: 速度 V 表现出随参数 k 的广义随机共振行为, 并且随着 Δ 的增加, 峰值流速显著提高, 共振峰位置发生右移. 在 $k=0$ 时, 耦合系统退化为单粒子布朗马达, 可观察到不同 Δ 对应相同的粒子流速 $V=0.061$, 但此时环境噪声 $D=3$ 不足以激励耦合粒子链的最优前向跃迁. 因此, 随 k 的增加粒子涨落产生的随机耦合力在一定程度上辅助噪声的激励行为, 分别在 $0 < k < 4$ 区间某一位位置达到峰值流速后减小, $k=4$ 时基本具有相同粒子流速, 但在强耦合 $k > 4$ 时, Δ 增加降低了粒子流速. 这主要是因为 Δ 较大对应了大幅波动的粒子数随机涨落, 耦合力表现为过剩噪声行为.

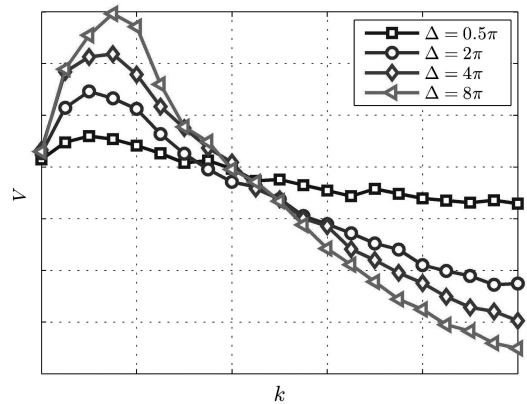


图 8 平均作用时间 Δ 不同的情况下, 粒子流速 V 与耦合强度 k 之间的关系
Fig. 8 The average velocity V vs the coupling constant k with different interacting time Δ

图 9 给出了 Δ 不同情况下, 粒子流速 V 与对称性参数 μ 的关系, 其中设置参数 $A=2.0, k=2.0, D=3$. 可以看出: 给定 $\Delta=0.5\pi$ 时, 速度 V 随 μ 增加呈现明显的非单调变化趋势, 并伴有共振峰出现. 共振峰随 Δ 增加显著减弱, 但共振峰位置 $\mu=0.2$ 没有发生变化. 一方面, μ 的增加使势垒高度相应增加, 导致粒子正向跃迁概率减小. 另一方面, μ 增加同时也改变了棘齿势对称性, 正向斜率减小导致粒子前向跃迁概率增加, 两种作用效果使 V 在 $\mu < 0.2$ 范围内出现了微弱的先减后增趋势; 随 μ 继续增加, 棘齿势出现双势垒, 其中粒子前向跃迁所需克服的双势垒高度之和将大于后向跃迁势垒高度, 随之减弱了棘齿势非对称性所产生粒子正向跃迁概率增加的效果, 因此在 $0.1 < \mu < 1.0$ 区间内又观察到了 V 的先增后减变化趋势.

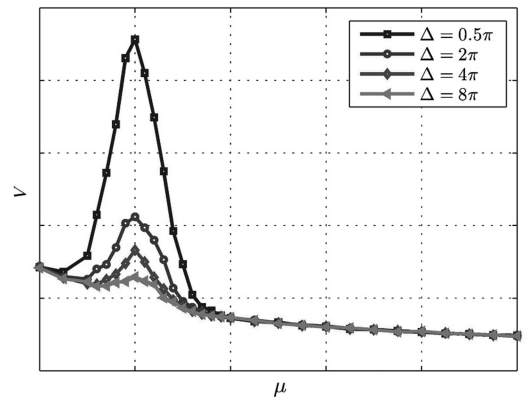


图 9 平均作用时间 Δ 不同的情况下粒子流速 V 与棘齿势对称性 μ 之间的关系
Fig. 9 The average velocity V vs the ratchet symmetry μ with different interacting time Δ

4 结 论

近年来,耦合系统的定向输运问题引起学者们广泛关注.虽取得了诸多成果,但多限于确定性粒子链耦合结构情形.本文针对耦合系统与外界环境间作用形成的随机解耦合和再耦合行为引入新的具有中心随机耦合结构的布朗马达模型.仿真结果表明,耦合系统中内部结构参数、势场对称性、噪声强度等对粒子输运行为产生显著影响,并且系统输运速度表现出随多个参数的随机共振行为.这有助于我们对耦合系统动力学行为操控技术或手段的改进和完善.

参考文献:

- [1] Hanggi P, Marchesoni F, Nori F. Brownian motors [J]. *Ann Phys*, 2004, 14: 51.
- [2] Guerin T, Prost J, Martin P. Coordination and collective properties of molecular motors: theory [J]. *Curr Opin Cell Biol*, 2010, 22: 14.
- [3] 陈宏斌,郑志刚. 分子马达定向运动的合作机制[J]. *上海理工大学学报*, 2012, 34: 6.
- [4] Savel E S, Marchesoni F, Nori F. Controlling transport in mixtures of interacting particles using Brownian motors [J]. *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 010601.
- [5] Veigel C, Schmidt C F. Moving into the cell: single-molecule studies of molecular motors in complex environments [J]. *Nat Rev Mol Cell Bio*, 2011, 12: 163.
- [6] Lipowsky R, Klumpp S, Nieuwenhuizen T M. Random walks of cytoskeletal motors in open and closed compartments [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 87: 108101.
- [7] Downton M T, Zuckermann M J, Craig E M, *et al.* single-polymer Brownian motor: a simulation study [J]. *Phys Rev E*, 2006, 73: 011909.
- [8] Roostalu J, Hetrich C, Bieling P, *et al.* Directional

switching of the kinesin cin8 through motor coupling [J]. *Science*, 2011, 332: 94.

- [9] Porto M, Urbakh M, Klafter J. Atomic scale engines: cars and wheels [J]. *Phys Rev Lett*, 2000, 84: 6058.
- [10] Zheng Z G, Hu G, Hu B. Collective directional transport in coupled nonlinear oscillators without external bias [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 2273.
- [11] 赖莉,屠浙,罗懋康. 色噪声环境下系统记忆性对分数阶布朗马达合作输运特性的影响[J]. *四川大学学报:自然科学版*, 2016, 53: 705.
- [12] 秦天奇,王飞,杨博,等. 带反馈的分数阶耦合布朗马达的定向输运[J]. *物理学报*, 2015, 64: 120501.
- [13] Lv W Y, Wang H Q, Lin L F, *et al.* Transport properties of elastically coupled fractional Brownian motors [J]. *Physica A*, 2015, 437: 149.
- [14] 范黎明,吕明涛,黄仁忠,等. 反馈控制棘轮的定向输运效率研究[J]. *物理学报*, 2017, 66: 27.
- [15] Igarashi A, Tsukamoto S, Goko H. Transport properties and efficiency of elastically coupled Brownian motors [J]. *Phys Rev E*, 2001, 64: 051908.
- [16] da Silva R M, de Souza Silva C C, Coutinho S. Reversible transport of interacting Brownian ratchets [J]. *Phys Rev E*, 2008, 78: 061131.
- [17] Mangioni S, Deza R, Wio H. Transition from anomalous to normal hysteresis in a system of coupled Brownian motors: a mean-field approach [J]. *Phys Rev E*, 2001, 63: 041115.
- [18] Jin P, Marthaler M, Shnirman A, *et al.* Strong coupling of spin qubits to a transmission resonator [J]. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 190506.
- [19] Deng G, Zhu D, Wang X, *et al.* Strongly coupled nanotube electromechanical resonators [J]. *Nano Lett*, 2016, 16: 5456.
- [20] Braun O M, Kivshar Y S. *The Frenkel-Kontorova model: concepts, methods and application* [M]. New York: Springer, 2004.

引用本文格式:

中文:倪飞翔,王会琦,吕王勇,等.随机中心耦合布朗马达的定向输运与随机共振[J].*四川大学学报:自然科学版*, 2018, 55: 661.

英文: Ni F X, Wang H Q, Lü W Y, *et al.* Directed transport and stochastic resonance in centralized coupled Brownian motors with stochastic interactions [J]. *J Sichuan Univ: Nat Sci Ed*, 2018, 55: 661.