doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.04.007

一类非线性二阶常微分方程周期问题正解的存在性

马满堂
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了非线性二阶常微分方程周期边值问题

$$\begin{cases}-u''+\mu^2 u=\lambda g(t)f(u), 0<t<2\pi,\\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi)\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $\mu>0$ 为常数，λ 是一个正参数，$g:[0,2\pi]\to[0,\infty)$，$f:[0,\alpha)\to[0,\infty)$ 为连续函数，$\alpha>0$ 为常数. 主要结果的证明基于锥拉伸与压缩不动点定理.

关键词：周期问题；锥；正解；存在性
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)04-0693-05

Existence of positive solutions for a class of nonlinear second-order periodic problems

MA Man-Tang
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we consider the existence of positive solutions for the following nonlinear second-order periodic problems

$$\begin{cases}-u''+\mu^2 u=\lambda g(t)f(u), 0<t<2\pi,\\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi),\end{cases}$$

where $\mu>0$ is a constant, λ is a positive parameter, $g:[0,2\pi]\to[0,\infty)$, $f:[0,\alpha)\to[0,\infty)$ are continuous functions, and $\alpha>0$ is a constant. The proofs of the main results are based on the fixed-point theorem of cone expansion-compression.

Keywords: Periodic problem; Cone; Positive solution; Existence
(2010 MSC 35J20, 35B85, 35B33)

1 引　言

二阶边值问题是常微分方程的经典问题之一，其正解的存在性引起许多学者的关注，并且已有一些有趣的结果[1-13]. 其中，Graef 等[1]获得了二阶周期边值问题

$$\begin{cases}u''+a(t)u=g(t)f(u), 0<t<2\pi,\\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi)\end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$，$a\in C([0,2\pi],[0,\infty))$，$g\in C([0,2\pi],[0,\infty))$. 他们利用锥拉伸与压缩不动点定理建立了如下结果：

定理 A　设 $\eta=\min\limits_{t\in[0,2\pi]}g(t)>0$. 若 f 满足下列条件之一：

(i) $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$;

(ii) $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=0$,

则问题 (1) 至少存在一个正解，这里

$$f_0=\lim_{s\to0}\frac{f(s)}{s}, f_\infty=\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}.$$

收稿日期：2017-12-27
基金项目：国家自然科学基金(11671322, 11361054)
作者简介：马满堂(1995－)，男，甘肃天水人，硕士研究生，主要研究方向常微分方程边值问题. E-mail：mantangma@163.com

2012年，Ma等[2]利用Rabinowitz's全局分歧理论获得了二阶周期边值问题

$$\begin{cases} -u''+\rho^2 u=\lambda a(t)f(u), 0<t<2\pi, \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi) \end{cases} \quad (2)$$

正解的存在性，其中$\rho>0$为常数，$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$，且对任意的$s>0$都有$f(s)>0$.

值得注意的是，文献[1, 2]都只是在非线性项$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$的条件下获得了相应问题正解的存在性. 长期以来，当f定义在一个有限区间$[0,\alpha)$上，即

$$f\in C([0,\alpha),[0,\infty))(\alpha>0\text{为一常数}) \quad (3)$$

时，关于二阶常微分方程边值问题正解存在性的研究工作很少. 特别地，2013年，Ma等[12]在f满足(3)的条件下用时间映像分析法获得了非线性二阶Dirichlet边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+\lambda f(u(t))=0, 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \quad (4)$$

正解的存在性，其中$f\in C^1([0,\alpha),[0,\infty))$，且当$s\in(0,\alpha)$时有$f(s)>0$及$\lim\limits_{s\to\alpha^-}(\alpha-s)f(s)=+\infty$. 该文的主要结果为：

定理B 若$f_0=0$，则对任意$\lambda\in(0,\infty)$，问题(4)至少存在一个正解.

一个自然的问题是：当问题(2)中非线性项f满足条件(3)时，二阶周期边值问题是否存在正解？基于上述工作，本文将运用锥拉伸与压缩不动点定理考察二阶周期边值问题

$$\begin{cases} -u''+\mu^2 u=\lambda g(t)f(u), 0<t<2\pi, \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi) \end{cases} \quad (5)$$

正解的存在性.

本文总假定：

(A1)：$f:[0,\alpha)\to[0,\infty)$连续，$\alpha>0$为常数，且对$0<u<\alpha$都有$f(u)>0$；

(A2)：$g:[0,2\pi]\to[0,\infty)$连续且$\int_0^{2\pi}g(t)\mathrm{d}t>0$.

记

$$f_0=\lim_{s\to0}\frac{f(s)}{s}, f_\alpha=\lim_{s\to\alpha^-}\frac{f(s)}{\alpha-s}$$

并设

$$f^*(u)=\max_{0\leqslant t\leqslant u}\{f(t)\}.$$

则

$$f_0^*=\lim_{s\to0}\frac{f^*(s)}{s}, f_\alpha^*=\lim_{s\to\alpha^-}\frac{f^*(s)}{\alpha-s}.$$

本文的主要结果是：

定理1.1 假设(A1)，(A2)成立，则有

(a) 若$f_0=0$或$f_\alpha=0$，则存在$\lambda_0>0$，使得当$\lambda>\lambda_0$时问题(5)至少存在一个正解；

(b) 若$f_0=\infty$或$f_\alpha=\infty$，则存在$\lambda_0>0$，使得当$0<\lambda<\lambda_0$时问题(5)至少存在一个正解；

(c) 若$f_0=f_\alpha=0$，则存在$\lambda_0>0$，使得当$\lambda>\lambda_0$时问题(5)至少存在两个正解；

(d) 若$f_0=f_\alpha=\infty$，则存在$\lambda_0>0$，使得当$0<\lambda<\lambda_0$时问题(5)至少存在两个正解；

(e) 若$f_0>0$且$f_\alpha>0$，则存在$\lambda_0>0$，使得当$\lambda>\lambda_0$时问题(5)不存在正解；

(f) 若$f_0<\infty$且$f_\alpha<\infty$，则存在$\lambda_0>0$，使得当$0<\lambda<\lambda_0$时问题(5)不存在正解.

2 预备知识

引理2.1[14] 假定(A1)成立，则$f_0^*=f_0$且$f_\alpha^*=f_\alpha$.

引理2.2[15] 设X是Banach空间，$K\subset X$是X中的一个锥，Ω_1,Ω_2是X的开子集，$0\in\Omega_1$，$\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 若全连续算子$A:K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$满足：

(i) $\|Au\|\leqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_1$且$\|Au\|\geqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2$，或

(ii) $\|Au\|\geqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_1$且$\|Au\|\leqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2$，

则A在$K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$上有一个不动点.

设$X=C[0,2\pi]$，其在范数$\|u\|=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}|u(t)|$下构成Banach空间. 设

$$K=\{u\in C[0,2\pi]:0\leqslant u(t)<\alpha, \min_{0\leqslant t\leqslant2\pi}u(t)\geqslant\sigma\|u\|\}$$

是X中的锥，其中$\sigma=\dfrac{2e^{\mu\pi}}{(1+e^{2\mu\pi})}$. 对$0<r<\alpha$，设$\Omega_r=\{u\in K:\|u\|<r\}$.

定义算子$T_\lambda:K\to X$为

$$T_\lambda u(t)=\lambda\int_0^{2\pi}H(t,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s, \quad 0\leqslant t\leqslant2\pi,$$

其中$H(t,s)$表示线性齐次周期边值问题

$$\begin{cases} -u''+\mu^2 u=0, 0<t<2\pi, \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi) \end{cases}$$

的Green函数，即

$$H(t,s)=\begin{cases} \dfrac{e^{\mu(t-s)}+e^{\mu(2\pi-t+s)}}{2\mu(e^{2\mu\pi}-1)}, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant2\pi, \\ \dfrac{e^{\mu(s-t)}+e^{\mu(2\pi-s+t)}}{2\mu(e^{2\mu\pi}-1)}, 0\leqslant t\leqslant s\leqslant2\pi. \end{cases}$$

令

$$\hat{H}(x) = \frac{e^{\mu x} + e^{\mu(2\pi - x)}}{2\mu(e^{2\mu\pi} - 1)}, x \in [0, 2\pi].$$

易见 $\hat{H}$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，在 $[\pi, 2\pi]$ 上单调递增，且 $H(t,s) = \hat{H}(|t-s|)$. 因此

$$\frac{e^{\mu\pi}}{\mu(e^{2\mu\pi}-1)} = \hat{H}(\pi) \leqslant H(t,s) \leqslant \hat{H}(0) = \frac{1+e^{\mu 2\pi}}{2\mu(e^{2\mu\pi}-1)}, t,s \in [0,2\pi].$$

引理 2.3　假定(A1),(A2)成立，则 $T_\lambda(K) \subset K$，且 $T_\lambda: K \to K$ 是一个全连续算子.

证明　假设 $u \in K$，则 $T_\lambda u(t) \geq 0, t \in [0, 2\pi]$，且

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} T_\lambda u(t) \geq \hat{H}(\pi)\lambda \int_0^{2\pi} g(s) f(u(s)) ds = \sigma \hat{H}(0)\lambda \int_0^{2\pi} g(s) f(u(s)) ds \geq \sigma \| T_\lambda u \|,$$

即 $T_\lambda(K) \subset K$. 显然 $T_\lambda: K \to K$ 是一个全连续算子.

问题(5)的解等价于算子方程 $T_\lambda u = u$ 的不动点. 令

$$\Gamma = \hat{H}(\pi)\sigma \int_0^{2\pi} g(s) ds.$$

引理 2.4　假定(A1)成立. 设 $\xi > 0$. 若 $u \in K$，且 $f(u(t)) \geq u(t)\xi, t \in [0, 2\pi]$，则

$$\| T_\lambda u \| \geq \lambda \Gamma \xi \| u \|.$$

证明　从 $T_\lambda u$ 和 K 的定义可得

$$\| T_\lambda u(t) \| \geq \lambda \hat{H}(\pi) \int_0^{2\pi} g(s) f(u(s)) ds \geq \lambda \hat{H}(\pi)\xi \int_0^{2\pi} g(s) u(s) ds \geq \lambda \hat{H}(\pi)\xi\sigma \| u \| \int_0^{2\pi} g(s) ds = \lambda \Gamma \xi \| u \|.$$

证毕.

引理 2.5　假定(A1)成立并设 $0 < r < \alpha$. 若存在 $\zeta > 0$，使得 $f^*(r) \leqslant \zeta r$，则

$$\| T_\lambda u \| \leqslant \lambda \zeta \| u \| \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) ds, u \in \partial\Omega_r.$$

证明　从 $T_\lambda u$ 的定义可得

$$\| T_\lambda u(t) \| \leqslant \lambda \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) f(u(s)) ds \leqslant \lambda \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) f^*(r) ds \leqslant \lambda \zeta \| u \| \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) ds, u \in \partial\Omega_r.$$

证毕.

引理 2.6　假定(A1),(A2)成立. 若 $u \in \partial\Omega_r$，$0 < r < \alpha$，则

$$\| T_\lambda u \| \geq \lambda \hat{m}_r \hat{H}(\pi) \int_0^{2\pi} g(s) ds,$$

其中 $\hat{m}_r = \min\limits_{r\sigma\leqslant t\leqslant r} \{f(t)\} > 0$.

证明　因为 $f(u(t)) \geq \hat{m}_r, t \in [0, 2\pi]$，所以

$$\| T_\lambda u \| \geq \lambda \hat{H}(\pi) \int_0^{2\pi} g(s) f(u(s)) ds \geq \lambda \hat{m}_r \hat{H}(\pi) \int_0^{2\pi} g(s) ds, u \in \partial\Omega_r.$$

证毕.

引理 2.7　假定(A1),(A2)成立. 若 $u \in \partial\Omega_r$，$0 < r < \alpha$，则

$$\| T_\lambda u \| \leqslant \lambda \hat{M}_r \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) ds,$$

其中 $\hat{M}_r = 1 + \max\limits_{0\leqslant t\leqslant r} \{f(t)\} > 0$.

证明　因为 $f(u(t)) \leqslant \hat{M}_r, t \in [0, 2\pi]$，所以

$$\| T_\lambda u \| \leqslant \lambda \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) f(u(s)) ds \leqslant \lambda \hat{m}_r \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) ds, u \in \partial\Omega_r.$$

证毕.

3　主要结果的证明

定理 1.1 的证明　(a). 取 $0 < r_1 < \alpha$. 由引理 2.6 得

$$\| T_\lambda u \| > \| u \|, \lambda > \lambda_0, u \in \partial\Omega_{r_1},$$

其中

$$\lambda_0 \geq \frac{r_1}{\hat{m}_{r_1} \hat{H}(\pi) \int_0^{2\pi} g(s) ds} > 0.$$

若 $f_0 = 0$，则由引理 2.1 可得 $f_0^* = 0$，且存在 $r_2 \in (0, r_1)$，使得 $f^*(r_2) \leqslant \zeta r_2$，其中 $\zeta > 0$ 满足

$$\lambda \zeta \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) ds < 1 \tag{6}$$

则由引理 2.5 可得

$$\| T_\lambda u \| \leqslant \lambda \zeta \| u \| \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) ds < \| u \|, u \in \partial\Omega_{r_2}.$$

若 $f_\alpha = 0$，则由引理 2.1 可得 $f_\alpha^* = 0$. 因而存在 $r_3 \in (2r_1, \alpha)$ 使得 $f^*(r_3) \leqslant \zeta r_3$，其中 $\zeta > 0$ 满足式(6). 则

$$\| T_\lambda u \| \leqslant \lambda \zeta \| u \| \hat{H}(0) \int_0^{2\pi} g(s) ds < \| u \|, u \in \partial\Omega_{r_3}.$$

则由引理 2.2 可得，当 $f_0 = 0$ 或 $f_\alpha = 0$ 时，T_λ 在 $\overline{\Omega}_{r_1} \backslash \Omega_{r_2}$ 或 $\overline{\Omega}_{r_3} \backslash \Omega_{r_1}$ 上有一个不动点. 因此当 $\lambda > \lambda_0$ 时，问题(5)存在一个正解.

(b). 取 $0 < r_1 < \alpha$. 由引理 2.7，存在 $\lambda_0 > 0$ 使

得

$$\| T_\lambda u \| < \| u \|, 0<\lambda<\lambda_0, u\in\partial\Omega_{r_1}.$$

若 $f_0=\infty$, 则存在 $r_2\in(0,r_1)$ 使得 $f(u)\geq\xi u, 0\leqslant u\leqslant r_2$, 其中 $\xi>0$ 满足

$$\lambda\Gamma\xi>1 \tag{7}$$

易见

$$f(u(t))\geq\xi u(t), u\in\partial\Omega_{r_2}, t\in[0,2\pi].$$

则由引理 2.4 可得

$$\| T_\lambda u \| \geq\lambda\Gamma\xi\| u \| > \| u \|, u\in\partial\Omega_{r_2}.$$

若 $f_\alpha=\infty$, 则存在 $0<P<\alpha$, 使得当 $P\leqslant u<\alpha$ 时有 $f(u)\geq\xi u$, 其中 $\xi>0$ 满足(7)式. 设 $r_3=\max\{2r_1,\frac{P}{\sigma}\}$. 若 $u\in\partial\Omega_{r_3}$, 则

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} u(t)\geq\sigma\| u \| \geq P.$$

因此

$$f(u(t))\geq\xi u(t), t\in[0,2\pi].$$

则由引理 2.4 可得

$$\| T_\lambda u \| \geq\lambda\Gamma\xi\| u \| > \| u \|, u\in\partial\Omega_{r_3}.$$

再由引理 2.2 可得, 当 $f_0=\infty$ 或 $f_\alpha=\infty$ 时 T_λ 在 $\overline{\Omega}_{r_1}\backslash\Omega_{r_2}$ 或 $\overline{\Omega}_{r_3}\backslash\Omega_{r_1}$ 上有一个不动点. 因此当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时问题(5)存在一个正解.

(c). 取 $0<r_3<r_4<\alpha$. 由引理 2.6, 存在 $\lambda_0>0$ 使得

$$\| T_\lambda u \| > \| u \|, \lambda>\lambda_0, u\in\partial\Omega_{r_i}, i=3,4.$$

因为 $f_0=f_\alpha=0$, 从定理 1.1(a)的证明可知存在 $r_1\in(0,\frac{r_3}{2}), r_2\in(2r_4,\alpha)$ 使得

$$\| T_\lambda u \| < \| u \|, u\in\partial\Omega_{r_i}, i=1,2.$$

进而由引理 2.2 可得 T_λ 至少有两个不动点 u_1,u_2 且满足

$$0<r_1<\| u_1 \| \leqslant r_3<r_4\leqslant \| u_2 \| \leqslant r_2<\alpha \tag{8}$$

其中 $u_1\in\overline{\Omega}_{r_3}\backslash\Omega_{r_1}, u_2\in\overline{\Omega}_{r_2}\backslash\Omega_{r_4}$. 因此当 $\lambda>\lambda_0$ 时问题(5)至少存在两个正解.

(d). 取 $0<r_3<r_4<\alpha$. 由引理 2.7, 存在 $\lambda_0>0$ 使得

$$\| T_\lambda u \| < \| u \|, 0<\lambda<\lambda_0, u\in\partial\Omega_{r_i}, i=3,4.$$

因为 $f_0=f_\alpha=\infty$, 从定理 1.1(b)的证明可得存在 $r_1\in(0,\frac{r_3}{2}), r_2\in(2r_4,\alpha)$ 使得

$$\| T_\lambda u \| > \| u \|, u\in\partial\Omega_{r_i}, i=1,2.$$

进而由引理 2.2 知 T_λ 至少有两个不动点 u_1,u_2, 且满足式(8), 其中 $u_1\in\Omega_{r_3}\backslash\overline{\Omega}_{r_1}, u_2\in\Omega_{r_2}\backslash\overline{\Omega}_{r_4}$. 因此当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时问题(5)至少存在两个正解.

(e). 因为 $f_0>0$ 且 $f_\alpha>0$, 则存在 $\xi_1,\xi_2,r_1,r_2>0$, 使得 $r_1<r_2<\alpha$, 且

$$f(u)\geq\xi_1 u, u\in[0,r_1],$$
$$f(u)\geq\xi_2 u, u\in[r_2,\alpha).$$

设 $\xi_3>0$ 满足

$$\xi_3=\max\{\xi_1,\xi_2,\max_{r_1\leqslant u\leqslant r_2}\{\frac{f(u)}{u}\}\}.$$

则

$$f(u)\geq\xi_3 u, u\in[0,\alpha).$$

假设 $v(t)$ 是问题(5)的一个正解, 即 $T_\lambda v(t)=v(t), t\in[0,2\pi]$, 则当 $\lambda>\lambda_0=\frac{1}{\Gamma\xi_3}$ 时由引理 2.4 可得

$$\| v \| = \| T_\lambda v \| \geq\lambda\Gamma\xi_3\| v \| > \| v \|.$$

矛盾. 故问题(5)不存在正解.

(f). 因为 $f_0<\infty$ 且 $f_\alpha<\infty$, 则存在 $\zeta_1,\zeta_2,r_1,r_2>0$, 使得 $r_1<r_2<\alpha$, 且

$$f(u)\leqslant\zeta_1 u, u\in[0,r_1],$$
$$f(u)\leqslant\zeta_2 u, u\in[r_2,\alpha).$$

设 $\zeta_3>0$ 满足

$$\zeta_3=\max\{\zeta_1,\zeta_2,\max_{r_1\leqslant u\leqslant r_2}\{\frac{f(u)}{u}\}\}.$$

则

$$f(u)\leqslant\zeta_3 u, u\in[0,\alpha).$$

假设 $v(t)$ 是问题(5)的一个正解, 即 $T_\lambda v(t)=v(t), t\in[0,2\pi]$, 则当

$$0<\lambda<\lambda_0=\frac{1}{\zeta_3\hat{H}(0)\int_0^{2\pi}g(s)\mathrm{d}s}$$

时由引理 2.5 可得

$$\| v \| = \| T_\lambda v \| \leqslant \lambda\hat{H}(0)\zeta_3\| v \| \int_0^{2\pi}g(s)\mathrm{d}s < \| v \|.$$

矛盾. 故问题(5)不存在正解. 证毕.

参考文献:

[1] Graef J R, Kong L J, Wang H Y. A periodic boundary value problem with vanishing Green function [J]. Appl Math Lett, 2008, 21: 176.

[2] Ma R Y, Xu J, Han X L. Global structure of positive solutions for superlinear second-order periodic boundary value problems [J]. Appl Math Comput, 2012, 218: 5982.

[3] 闫东亮, 马如云. 带导数项 Neumann 问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 1136.

[4] Atici F M, Guseinov G S. On the existence of positive solutions for nonlinear differential equations with periodic boundary conditions [J]. J Comput Appl Math, 2001, 132: 341.

[5] Wu X R, Wang F. Existence of positive solutions of singular second-order periodic boundary value problems [J]. Math Pract Theor, 2008, 38: 227.

[6] Ma R Y, Chen R P, He Z Q. Positive periodic solutions of second-order differential equations with weak singularities [J]. Appl Math Comput, 2014, 232: 97.

[7] Torres P J. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem [J]. J Differ Equat, 2003, 190: 643.

[8] 龙严. 非线性二阶 Robin 问题多正解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54，：249.

[9] Ma R Y, Gao C H, Chen R P. Existence of positive solutions of nonlinear second-order periodic boundary value problems [J]. Bound Value Probl, 2010, 1: 1.

[10] Jiang D Q, Chu J F, Zhang M R. Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations [J]. J Differ Equat, 2005, 211:282.

[11] Zhang Z X, Wang J Y. On existence and multiplicity of positive solutions to periodic boundary value problems for singular nonlinear second-order differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2003, 281: 99.

[12] Ma R Y, Xie C J, Ahmed A. Positive solutions of the one-dimensional p-laplacian with nonlinearity defined on a finite interval [J]. Abstr Appl Anal, 2013, 2: 900.

[13] 叶芙梅. 一类非线性二阶常微分方程 Dirichlet 问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：463.

[14] Wang H Y. On the number of positive solutions of nonlinear system [J]. J Math Anal Appl, 2003, 281: 287.

[15] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科学技术出版社，1985.

引用本文格式：

中　文：马满堂. 一类非线性二阶常微分方程周期问题正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：693.

英　文：Ma M T. Existence of positive solutions for a class of nonlinear second-order periodic problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 693.