doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.06.007

单边增长条件下的 $2n$ 阶常微分方程的奇周期解

文 乾，李永祥
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘 要：本文讨论了 $2n$ 阶微分方程

$$u^{(2n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),\cdots,u^{(2n-1)}(t)),t\in\mathbf{R}$$

奇 2π-周期解的存在性，其中 n 是正整数，$f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}$ 连续且关于 t 是以 2π 为周期的奇函数. 运用 Leray-Schauder 不动点定理与 Fourier 分析的方法，本文在允许非线性项 f 超线性增长的条件下获得了该方程的奇 2π-周期解.

关键词：单边增长；奇周期解；Leray-Schauder 不动点定理
中图分类号：O177.91 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2018)06-1167-04

Odd periodic solutions for $2n$ order ordinary differential equation under unilateral growth condition

WEN Qian, LI Yong-Xiang
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we discuss the existence of odd 2π-periodic solutions for the nonlinear $2n$-order differential equation

$$u^{(2n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),\cdots,u^{(2n-1)}(t)),t\in\mathbf{R},$$

where n is a positive integer, $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}$ is continuous odd function and 2π-periodic with respect to t. By applying the Leray-Schauder fixed point theorem and Fourier analysis method, the existence of odd 2π-periodic solutions is obtained under the condition that nonlinear term f satisfies unilateral growth.

Keywords: Unilateral growth; Odd periodic solution; Leray-Schauder fixed point theorem
(2010 MSC 34B15)

1 引 言

本文讨论 $2n$ 阶微分方程

$$u^{(2n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),\cdots,u^{(2n-1)}(t)),t\in\mathbf{R} \tag{1}$$

奇 2π-周期解的存在性，其中 n 是正整数，$f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}$ 连续，关于 t 以 2π 为周期.

周期解的存在性是常微分方程定性理论中的一个重要课题. 对于一些特殊形式的常微分方程周期边值问题，已有许多作者研究[1-11]. 对方程(1)中 $n=1$ 的情形，即如下二阶周期边值问题

$$\begin{cases}u''(t)=f(t,u(t),u'(t)),t\in[0,2\pi],\\ u(0)=u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi)\end{cases} \tag{2}$$

文献 [2]在非线性项 f 满足

$$f(t,x,y)\geq -ax^2-by^2-C_0$$

(这里 $a,b,C_0\geq 0$ 且 $a+b<1$)与 Nagumo 型条件下运用 Fourier 分析与 Leray-Schauder 不动点定理的方法获得了问题 (2) 奇 2π-周期解的存在性

收稿日期：2018-03-13
基金项目：国家自然科学基金(11661071)
作者简介：文乾 (1993-)，男，甘肃陇南人，硕士研究生，主要研究方向为非线性泛函分析. E-mail: 957761041@qq.com
通迅作者：李永祥. E-mail: liyxnwnu@163.com

结果. 在文献 [7]中,丛福仲研究了如下 $2n$ 阶周期边值问题

$$\begin{cases} u^{(2n)}(t)+\sum_{j=1}^{n-1}c_j u^{(2j)}(t)=f(t,u(t)), \\ \quad t\in[0,2\pi], \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi), i=0,1,2,\cdots, \\ \quad 2n-1 \end{cases} \tag{3}$$

在非线性项 f 满足

$$0\le N^{2n}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{j-n}C_jN^{2j}+\varepsilon\le (-1)^n f_u(t,u)\le (N+1)^{2n}+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-n}C_j(N+1)^{2j}-\varepsilon$$

的条件下,该文得到了问题 (3) 解的存在唯一性结论,其中 N 为正整数,$\varepsilon>0$. 一般地,文献 [9]研究了非线性项不含奇数阶导数的 $2n$ 阶常微分方程

$$u^{(2n)}(t)=f(t,u(t),u''(t),\cdots,u^{(2n-2)}(t)),\quad t\in\mathbf{R} \tag{4}$$

这里 $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 连续且 $f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ 关于 t 以 2π 为周期. 在非线性项 f 满足超线性或次线性条件下,该文获得了方程 (4) 奇 2π-周期解的存在唯一性. 最近,文献 [10]在非线性项 f 一次增长的条件下得到了方程 (1) 奇 2π-周期解的存在唯一性结果.

注意到以上文献均未讨论完全的 $2n$ 阶常微分方程在允许非线性项 f 超线性增长条件下周期解的存在性,本文将文献 [2]的结论推广到 $2n$ 阶微分方程. 在允许非线性项 f 单边超线性增长的条件下,本文运用 Leray-Schauder 不动点定理与 Fourier 分析的方法获得了方程 (1)奇 2π-周期解的存在性结果. 本文的主要结论如下:

定理 1.1 设 $f:\mathbf{R}^{(2n+1)}\to\mathbf{R}$ 连续,关于 t 以 2π 为周期,满足下列条件:

(F1) f 为奇函数,即

$$f(-t,-x_0,-x_1,\cdots,-x_{2n-1})=-f(t,x_0,x_1,\cdots x_{2n-1}),\quad \forall(t,x_0,x_1,\cdots,x_{2n-1})\in\mathbf{R}^{2n+1};$$

(F2) 存在常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{2n-1}\ge 0$ 满足 $a_0+a_1+\cdots+a_{2n-1}<1$ 及 $C_0>0$,使得 f 满足

$$f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{2n-1})x_{2n-2}\ge -a_0x_0^2-a_1x_1^2-\cdots-a_{2n-1}x_{2n-1}^2-C_0,\quad \forall(t,x_0,x_1,\cdots,x_{2n-1})\in\mathbf{R}^{2n+1};$$

(F3) $\forall c>0$, 存在连续函数 $g_c:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足

$$\int_0^{+\infty}\frac{\rho}{g_c(\rho)}\mathrm{d}\rho=+\infty \tag{5}$$

使得 f 满足

$$|f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{2n-1})|\le g_c(|x_{2n-1}|),t\in\mathbf{R},$$
$$|x_0|\le c,|x_1|\le c,\cdots|x_{2n-2}|\le c,x_{2n-1}\in\mathbf{R}.$$

则方程(1)至少存在一个奇 2π-周期解.

在定理中,条(F2)允许 $f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{2n-1})$ 关于 $x_0,x_1,\cdots,x_{2n-1}$ 超线性增长,条件(F3)为关于 x_{2n-1} 的 Nagumo 型增长条件,该条件限制 $f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{2n-1})$ 关于 x_{2n-1} 至多 2 次增长.

2 主要结果的证明

记 $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ 为 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数按范数 $\|u\|_C=\max_{0\le t\le 2\pi}|u(t)|$ 构成的 Banach 空间. $\forall m\in\mathbf{N}$,$C_{2\pi}^m(\mathbf{R})$ 表示全体以 2π 为周期的 m 阶连续可微函数构成的 Banach 空间,其范数为

$$\|u\|_{C^n}=\max\{\|u\|_C,\|u'\|_C,\cdots,\|u^{(n)}\|_C\},$$

这里 n 为正整数. $L_{2\pi}^2(\mathbf{R})$ 表示以 2π 为周期的局部平方可积函数构成的 Hilbert 空间,其上内积为 $(u,v)=\int_0^{2\pi}u(t)v(t)\mathrm{d}t$, 范数为

$$\|u\|_2=\left(\int_0^{2\pi}|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

用 $H_{2\pi}^m(\mathbf{R})$ 表示通常的以 2π 为周期有直到 m 阶局部平方可积导数的函数 u 按范数

$$\|u\|_{m,2}=\left(\sum_{i=0}^m\|u^{(i)}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

构成的 Sobolev 空间. $u\in H_{2\pi}^m(\mathbf{R})$ 意指 $u\in C_{2\pi}^{m-1}(\mathbf{R})$, $u^{(m-1)}$ 在 $[0,2\pi]$ 上绝对连续, 且 $u^{(m)}\in L_{2\pi}^2(\mathbf{R})$. 设 V 为 $L_{2\pi}^2(\mathbf{R})$ 中的奇函数构成的子空间. 记 $V^n=H_{2\pi}^n(\mathbf{R})\cap V$, $W=C_{2\pi}(R)\cap V$, $W^n=C_{2\pi}^n(\mathbf{R})\cap V$. 易知 V^n 为 $H_{2\pi}^n(\mathbf{R})$ 中的闭子空间,所以 V^n 按范数 $\|u\|_{m,2}=\left(\sum_{i=0}^m\|u^{(i)}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 构成 Banach 空间. W^n 为 $C_{2\pi}^n(\mathbf{R})$ 中的闭子空间,按范数 $\|u\|_{C^n}$ 构成 Banach 空间.

设 $h\in V$, 考虑 $2n$ 阶线性微分方程

$$u^{(2n)}(t)=h(t),t\in\mathbf{R} \tag{6}$$

奇 2π-周期解的存在性.

引理 2.1 $\forall h\in V$, 线性方程(6)存在唯一奇 2π-周期解 $u:=Sh\in V^{2n}(\mathbf{R})$,且解算子 $S:V\to V^{2n}$ 为线性有界算子.

证明 $\forall h\in V$, h 可表示为 Fourier 正弦级数 $h(t)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k\sin kt$, 这里 $h_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}h(s)\sin ks\,\mathrm{d}s$, $k=$

$1,2,\cdots$，且 Parseval 等式 $\|h\|^2=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|h_k|^2$ 成立. 容易验证

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n h_k}{k^{2n}}\sin kt:=Sh(t) \tag{7}$$

属于 V^{2n} 且为线性问题(6)唯一的奇 2π-周期解. 如果 $h\in W$，则解 $u\in W^{2n}$ 为古典解. 由式(7)易知 $S:V\to V^{2n}$ 为线性有界算子.

引理 2.2 $\forall h\in V$，方程(1)的奇 2π-周期解 $u\in V^{2n}$ 满足

$$\|u^{(i)}\|_2\le\|u^{(2n-1)}\|_2,\ i=0,1,\cdots,2n-2 \tag{8}$$

证明 设 $u\in V^{2n}$ 为方程(1)奇 2π-周期解. 则 $u,u'',\cdots,u^{(2n-2)}$ 为奇函数，可展为正弦级数，u'，$u^{(3)},\cdots,u^{(2n-1)}$ 为偶函数，可展为余弦级数. 设 u 的展式为

$$u(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k\sin kt,$$

其中

$$u_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}h(s)\sin ks\,\mathrm{d}s.$$

由 Fourier 系数公式易得

$$u^{(2m)}(t)=(-1)^m\sum_{k=1}^{+\infty}k^{2m}u_k\sin kt,\ m=1,2,\cdots n-1,$$

$$u^{(2m-1)}(t)=(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{+\infty}k^{2m-1}u_k\cos kt,\ m=1,2,\cdots,n.$$

由 Paseval 等式，有

$$\|u^{(2m)}\|_2^2=\pi\sum_{k=1}^{+\infty}|k^{2m}u_k|^2,$$

$$\|u^{(2m-1)}\|_2^2=\pi\sum_{k=1}^{+\infty}|k^{2m-1}u_k|^2.$$

因此

$$\|u^{(i)}\|_2\le\|u^{(2n-1)}\|_2,\ i=0,1,\cdots,2n-2.$$

证毕.

引理 2.3 设 $f:\mathbf{R}^{2n+1}\to\mathbf{R}$ 连续，$f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{2n-1})$ 关于 x_{2n-1} 满足(F2). 则对任意 $M_1>0$，存在 $M=M(M_1)$，使得对方程(1)的任一 2π-周期解 $u\in C_{2\pi}^{2n}(\mathbf{R})$，当 $\|u\|_{C^{2n-2}}\le M_1$ 时有 $\|u^{(2n-1)}\|_C\le M$.

证明 设 $M_1>0$，$u(t)$ 为方程(1)的 2π-周期解，满足 $\|u\|_{C^{2n-2}}\le M_1$. 取 $M>0$，使得

$$\int_0^M\frac{\rho}{g_c(M)}\mathrm{d}\rho>2M_1 \tag{9}$$

下证 $\|u^{(2n-1)}\|_C\le M$.

不妨设 $\|u^{(2n-1)}\|_C\ne0$. 则存在 $t_0\in(0,2\pi)$，$t_1\in[0,2\pi]$，$t_0\ne t_1$ 使得

$$u^{(2n-1)}(t_0)=0,\ |u^{(2n-1)}(t_1)|=\|u^{(2n-1)}\|_C.$$

下面我们分四种情形讨论：

(i) $t_0<t_1,\ u^{(2n-1)}(t_1)>0$；

(ii) $t_0>t_1,\ u^{(2n-1)}(t_1)>0$；

(iii) $t_0<t_1,\ u^{(2n-1)}(t_1)<0$；

(iv) $t_0>t_1,\ u^{(2n-1)}(t_1)>0$.

我们仅证明情形(i)，其他的情形可类似证明. 令

$$t_2=\sup\{t'\in[t_0,t_1)\,|\,u^{(2n-1)}(t')=0\}.$$

则有

$$0<t_2<t_1<2\pi,\ u^{(2n-1)}(t_2)=0,\quad u^{(2n-1)}(t)>0,\ t\in(t_2,t_1].$$

由方程(1)与条件(F3)有

$$u^{(2n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),\cdots,u^{(2n-1)}(t))\le |f(t,u(t),u'(t),\cdots,u^{(2n-1)}(t))|\le g_{M_1}(|u^{(2n-1)}(t)|)=g_{M_1}(u^{(2n-1)}(t)),$$

因而

$$\frac{u^{(2n)}(t)u^{(2n-1)}(t)}{g_c(u^{(2n-1)}(t))}\le u^{(2n-1)}(t),\ t\in[t_2,t_1].$$

上式两边在 $[t_2,t_1]$ 上积分，左侧作积分变换 $\rho=u^{(2n-1)}(t)$ 有

$$\int_0^{u^{(2n-1)}(t_1)}\frac{\rho}{g_c(\rho)}\mathrm{d}\rho\le u^{(2n-2)}(t)\Big|_{t_2}^{t_1}=u^{(2n-2)}(t_1)-u^{(2n-2)}(t_2)\le2M_1.$$

由(9)式可得

$$\|u^{(2n-1)}\|_C=u^{(2n-1)}(t_1)\le M_1.$$

证毕.

定理 1.1 的证明 对 $u\in W^{2n-1}$，令

$$F(u)(t)=f(t,u(t),u'(t),\cdots,u^{(2n-1)}(t)).$$

由 f 的连续性与条件(F1)，$F:W^{2n-1}\to W$ 连续且把有界集映为有界集. 定义映射 $A=S\circ F$. 由引理 2.1 及 $C_\omega^{2n}(\mathbf{R})\to C_\omega^{2n-1}(\mathbf{R})$ 的紧性，复合算子 $A:W^{2n-1}\to W^{2n-1}$ 全连续. 由算子 S 的定义，方程(1)的 2π-周期解等于算子 A 的不动点. 我们用 Leray-Schauder 不动点定理证明算子 A 至少存在一个动点. 为此，我们考虑同伦方程簇

$$u=\lambda Au,\ 0<\lambda<1 \tag{10}$$

我们需要证明方程簇(10)的解集在 W^{2n-1} 中有界.

设 $u\in W^{2n-1}$ 为(10)中 $\lambda\in(0,1)$ 对应的解. 则 $u=S(\lambda F(u))$. 令 $h=\lambda F(u)$. 由 S 的定义，$u=Sh$ 为线性方程(6)的唯一奇 2π-周期解，因而 $u\in W^{2n-1}$ 满足方程

$$u^{(2n)}(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t),\cdots,u^{(2n-1)}(t)).$$

上式两边同乘 $u^{(2n-2)}(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 上积分，由条件

(F2)与引理 2.2,有

$$-\|u^{(2n-1)}\|_2^2=\lambda\int_0^{2\pi}f(t,u'(t),u''(t),\cdots,u^{(2n-1)}(t))u^{(2n-2)}(t)\mathrm{d}t\geq$$
$$\lambda\int_0^{2\pi}-a_0u^2(t)-a_1(u'(t))^2-\cdots-a_{2n-1}(u^{(2n-1)}(t))^2-C_0\mathrm{d}t\geq$$
$$\int_0^{2\pi}-a_0u^2(t)-a_1(u'(t))^2-\cdots-a_{2n-1}(u^{(2n-1)}(t))^2-C_0\mathrm{d}t=$$
$$-a_0\|u\|_2^2-a_1\|u'\|_2^2-\cdots-a_{2n-1}\|u^{(2n-1)}\|_2^2-2\pi C_0.$$

因此

$$\|u^{(2n-1)}\|_2^2\leq\frac{2\pi C_0}{1-(a_0+a_1+\cdots+a_{2n-1})}\tag{11}$$

由(8),(11)式有

$$\|u\|_{2n-1,2}=\Big(\sum_{i=0}^{2n-1}\|u^{(i)}\|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{2n}\|u^{(2n-1)}\|_2\leq\Big(\frac{4n\pi C_0}{1-(a_0+a_1+\cdots+a_{2n-1})}\Big)^{\frac{1}{2}}:=C_1.$$

再由 Sobolev 嵌入 $H_{2\pi}^{2n-1}(\mathbf{R})\to C_{2\pi}^{2n-1}(\mathbf{R})$的连续性有

$$\|u\|_{C^{2n-2}}\leq C\|u\|_{2n-1,2}\leq CC_1:=M_1,$$

这里 C 为嵌入常数. 由引理 2.3,存在 $M=M(M_1)$,使得 $\|u^{(2n-1)}\|_C\leq M$. 所以

$$\|u\|_{C^{2n-1}}=\max\{\|u\|_{C^{2n-2}},\|u^{(2n-1)}\|_C\}\leq\max\{M_1,M\}.$$

即同伦簇方程的解集在 W^{2n-1}中有界. 由 Leray-Schauder 不动点定理,A 在 W^{2n-1}中存在不动点,该不动点即为方程(1)的解. 证毕.

参考文献:

[1] Lakshmikantham V, Leela S. Existence and monotone method for periodic solutions of first-order differential equations [J]. J Math Anal Appl, 1983, 91: 237.

[2] Li Y, Guo L. Odd periodic solutions of fully second-order ordinary differential equations with superlinear nonlinearities [J]. J Funct Spaces, 2017, 2017: 1.

[3] Omari P, Villari G, Zanolin F. Periodic solutions of the Liénard equation with one-sided growth restrictions [J]. J Differ Equ, 1987, 67: 278.

[4] Torres P J. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem [J]. J Differ Equ, 2003, 190: 643.

[5] Cabada A. The method of lower and upper solutions for second, third, fourth, and higher order boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1994, 185: 302.

[6] Cong F, Huang Q, Shi S. Existence and uniqueness of periodic solutions for (2n+1) th-order differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2000, 241: 1.

[7] Cong F. Periodic solutions for $2k$ th order ordinary differential equations with nonresonance [J]. J Math Anal Appl, 2001, 259: 157.

[8] Li Y. Existence and uniqueness for higher order periodic boundary value problem under spectral seperation conditions [J]. J Math Anal Appl 2006, 322: 530.

[9] Li Y, Mu J. Odd periodic solutions for $2n$ th-order ordinary differential equations [J]. Nonlinear Anal, 2010, 73: 3268.

[10] 李永祥,郭兰珺. 完全 2n 阶常微分方程的奇周期解[J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2018, 54: 6.

[11] 魏丽萍. 一类三阶周期边值共振问题解的存在性[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2018, 55: 260.

引用本文格式:

中　文: 文乾,李永祥. 单边增长条件下的 $2n$ 阶常微分方程的奇周期解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 1167.

英　文: Wen Q, Li Y X. Odd periodic solutions for $2n$ order ordinary differential equations under unilateral growth conditions [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 1167.