2019 年 3 月 四川大学学报(自然科学版) Mar. 2019
第 56 卷 第 2 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 56 No. 2

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.02.003

一种新的求解圆锥规划的非内点算法

程 欢，穆学文，宋琦悦
(西安电子科技大学数学与统计学院 西安 710126)

摘 要：针对一般的圆锥优化问题，本文提出了一种新的非内点算法. 该算法根据圆锥与二阶锥的关系通过引入一个与圆锥规划互补条件等价的投影方程将问题转化为线性方程组求解，且在每步迭代中只需求解一个系数矩阵固定的线性方程组并执行两次投影运算. 该算法还具有可以从任意初始点开始且不要求仿射约束系数矩阵的行向量组线性独立等特点. 本文还在较弱的假设条件下证明了算法的全局收敛性. 数值实验结果表明该算法快速有效.

关键词：圆锥规划；非内点算法；投影方程；全牛顿步

中图分类号：O221.2 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2019)02-0203-06

A new non-interior point algorithm for circular cone programming

CHENG Huan, *MU Xue-Wen*, *SONG Qi-Yue*
(College of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi′an 710126, China)

Abstract: A new non-interior point algorithm is proposed for solving the circular cone programming (CCP). Based on the relationship between the circular cone and the second-order cone, a projection equation that is equivalent to the complementary condition of the CCP is introduced. Then the problem is transformed into a linear system. The method only needs to solve the linear equations with same coefficient matrix and compute two projections at each iteration. Moreover, the algorithm can start from arbitrary point and does not require the row vectors of the affine constraint coefficient matrix to be linearly independent. Under weaker assumptions, the global convergence of the algorithm is proved. Numerical results show that the algorithm is fast and effective.

Keywords: Circular cone programming; Non-interior point algorithm; Projection equation; Full-Newton step
(2010 MSC 90C25)

1 引 言

本文研究如下圆锥规划原问题及其对偶问题[1]：

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \in C_\theta\} \tag{1}$$

$$\max\{b^T y : A^T y + s = c, s \in C_\theta^*\} \tag{2}$$

其中 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$，$c \in \mathbf{R}^n$，$b \in \mathbf{R}^m$ 是已知参数，未知变量为 $(x, s) \in C_\theta \times C_\theta^*$，$C_\theta$ 是若干个圆锥的笛卡尔积，即 $C_\theta = C_\theta^1 \times C_\theta^2 \times \cdots \times C_\theta^N$，$C_\theta^*$ 是 C_θ 的对偶锥. 为了方便讨论算法，不失一般性，在之后的分析中均假设 $N=1$.

圆锥规划(CCP)是非对称锥规划[2]的特例，在金融及图像处理和实际工程问题中有着广泛应用，如多指机器人的最优抓取操作问题[3,4]及接触力优化问题[5]等. 在标准内积下，圆锥通常是非对称锥.

收稿日期：2018-03-29
基金项目：陕西省自然科学基金(2015JM1031)；中央高校基本科研业务费(JB150713)
作者简介：程欢(1994－)，女，山西运城人，硕士研究生，主要研究方向为锥规划的快速算法. E-mail：1328447232@qq.com

对于圆锥规划问题的求解，目前已有一些研究. 2015 年，Bai 等人[6]提出一种求解凸二次圆锥优化的原-对偶内点算法. 2016 年，Bai 等人[1]基于核函数给出求解圆锥规划的多项式时间复杂性的内点法. 这两种内点法都要求初始点严格可行，而在实际问题中很难找到严格可行点. 此外，2017 年，Chi 等人[7]通过引入光滑函数提出了求解圆锥规划的无需初始点可行的光滑牛顿算法. 在一定的假设条件下，这些内点法和光滑算法是全局收敛的，但大都要求矩阵 A 行满秩，并且需要合适的一维搜索寻找步长.

本文在借鉴文献[8]的基础上提出一种新的求解圆锥规划的非内点算法. 受到变分不等式问题交替方向法[9-11]的启发，该算法把圆锥规划的互补条件重新表述成一个投影方程，将问题转化成一个线性系统求解，且对初始点不做任何要求，每次迭代都采用完全牛顿步，不需要任何一维搜索. 同已有算法相比，该算法并未直接将圆锥规划转化为二阶锥规划求解，避免了“截断误差”[12]. 此外，算法产生的序列全局收敛到最优解，无需严格互补条件，也不要求矩阵 A 行满秩.

2 预备知识

假设圆锥规划原问题及其对偶问题的严格可行解集非空. 根据圆锥规划的对偶理论[1]可知，求解式(1)和式(2)等价于求解如下的最优性条件：

$$\begin{cases} Ax=b, x\in C_\theta, \\ A^T y+s=c, s\in C_\theta^*, \\ x^T s=0 \end{cases} \tag{3}$$

其中圆锥及其对偶锥的定义分别为[13]：

$$C_\theta := \{x=(x_0, x_{1:n})\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1} \mid \|x_{1:n}\|\le x_0\tan\theta\},$$

$$C_\theta^* := \{x=(x_0, x_{1:n})\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1} \mid \|x_{1:n}\|\le x_0\cot\theta\}.$$

给定的旋转角是 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\|\cdot\|$ 是欧几里得范数，即 $\|x\|=\sqrt{x^T x}$. 当 $\theta=\pi/4$ 时，n 维圆锥退化为 n 维二阶锥 K^n，定义为[14]：

$$K^n := \{\tilde{x}=(\tilde{x}_0, \tilde{x}_{1:n})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1} \mid \|\tilde{x}_{1:n}\|\le\tilde{x}_0\}.$$

文献[13]指出，二阶锥可视为圆锥的特例，并且给出圆锥与二阶锥的代数关系：对任意的 $(x,s)\in C_\theta\times C_\theta^*$，存在 $(\tilde{x},\tilde{s})\in K^n\times K^n$ 满足

$$\tilde{x}=Hx, \tilde{s}=H^{-1}s, x^T s=0 \tag{4}$$

当且仅当

$$\tilde{x}^T\tilde{s}=0 \tag{5}$$

其中 $H=\begin{bmatrix}\tan\theta & 0\\ 0 & I_{n-1}\end{bmatrix}$，$H^{-1}$ 是 H 的逆矩阵，I_{n-1} 是 $n-1$ 维单位向量.

下面简单介绍有关二阶锥上约当投影的一些结果[15].

对于任意的向量 $x=(x_0, x_{1:n})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$，它与二阶锥 K^n 相关联的谱分解为：

$$x=\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2,$$

其中，特征值

$$\lambda_i=x_0+(-1)^i\|x_{1:n}\|, i=1,2$$

对应的特征向量为

$$u_i(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1,(-1)^i\frac{x_{1:n}}{\|x_{1:n}\|}\right), x_{1:n}\ne 0,\\ \frac{1}{2}(1,(-1)^i\omega), x_{1:n}=0.\end{cases}$$

这里 $\omega\in\mathbf{R}^{n-1}$ 是满足 $\|\omega\|=1$ 的任意向量.

对于任意向量 $x=(x_0, x_{1:n})\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$，假定 $P_K(x)$ 表示 x 在二阶锥 K^n 上的投影. 则有如下定义：

$$P_K(x)=\lambda_1^+\mu_1+\lambda_2^+\mu_2,$$

其中 $\lambda_i^+=\max\{\lambda_i,0\}$. 显然 $P_K(x)\in K^n$.

二阶锥作为闭凸集，其上的投影有如下重要性质：对于任意的 $u,v\in\mathbf{R}^n$，$\omega\in K^n$ 满足

$$\langle v-P_K(v), \omega-P_K(v)\rangle\le 0 \tag{6}$$

$$\|P_K(u)-P_K(v)\|\le\|u-v\| \tag{7}$$

其中 $\langle\cdot\rangle$ 表示两个向量的内积.

3 与圆锥规划等价的投影方程组

定理 3.1 对任意的 $(x,s)\in C_\theta\times C_\theta^*$ 和可逆矩阵 $H\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$x^T s=0$ 当且仅当 $H^{-1}s=P_K(H^{-1}s-Hx)$.

证明 首先证必要性. 设 $(x,s)\in C_\theta\times C_\theta^*$ 且 $x^T s=0$. 由式(4)和式(5)知，存在 $(\tilde{x},\tilde{s})\in K^n\times K^n$，满足

$$\tilde{x}=Hx, \tilde{s}=H^{-1}s, \tilde{x}^T\tilde{s}=0.$$

令 $v=\tilde{s}-\tilde{x}$，$\omega=\tilde{s}\in K^n$. 根据式(6)可得

$$\langle\tilde{s}-P_K(v)-\tilde{x}, \tilde{s}-P_K(v)\rangle\le 0.$$

整理后得

$$\langle\tilde{x}, \tilde{s}-P_K(v)\rangle\ge\|\tilde{s}-P_K(v)\|^2 \tag{8}$$

由投影定义知 $P_K(v)\in K^n$. 根据二阶锥对偶理论知 $\langle\tilde{x}, P_K(v)\rangle\ge 0$. 再根据 $\tilde{x}^T\tilde{s}=0$ 有

$$\langle\tilde{x}, \tilde{s}-P_K(v)\rangle\le 0 \tag{9}$$

结合式(8)和式(9)可得 $\tilde{s}-P_K(v)=0$，即 $H^{-1}s=$

$P_K(H^{-1}s-Hx)$.

充分性. 已知 $H^{-1}s=P_K(H^{-1}s-Hx)$，由投影定义可知 $H^{-1}s\in K^n$. 令 $\tilde{x}=Hx$，$\tilde{s}=H^{-1}s$，对任意 $x^0\in K^n$，由式(6)可得

$$\langle \tilde{s}-\tilde{x}-P_K(\tilde{s}-\tilde{x}),x^0-P_K(\tilde{s}-\tilde{x})\rangle = \langle -\tilde{x},x^0-\tilde{s}\rangle\le 0 \tag{10}$$

所以由式(10)容易得到

$$\|(\tilde{s}-\tilde{x})-x^0\|^2-\|\tilde{x}\|^2=\|\tilde{s}-x^0\|^2+2\langle\tilde{x},x^0-\tilde{s}\rangle\ge 0 \tag{11}$$

对于任意的 $\omega\in K^n$ 和 $t\in(0,+\infty)$，由于 $\tilde{s}\in K^n$，令 $x^0=\tilde{s}+t\omega$ 则有 $x^0\in K^n$. 代入式(11)得到

$$t^2\|\omega\|^2+2t\langle\omega,\tilde{x}\rangle\ge 0.$$

两端同时除以 t 并令 $t\to 0$ 可知，对于任意的 $\omega\in K^n$，都有 $\langle\omega,\tilde{x}\rangle\ge 0$ 成立. 基于二阶锥规划对偶性理论可得 $\tilde{x}\in K^n$. 在不等式(10)中，分别取 $x^0=0\in K^n$ 和 $x^0=2\tilde{s}\in K^n$，可得 $\langle\tilde{x},\tilde{s}\rangle=0$. 最后，由圆锥和二阶锥的关系式(4)和(5)可知，存在 $x=H^{-1}\tilde{x}\in C_\theta$，$s=H\tilde{s}\in C_\theta^*$，满足 $x^Ts=0$. 证毕.

令 $u=(x,y,s)\in C_\theta\times R^m\times C_\theta^*$. 根据定理 3.1 我们可以得到条件(3)式的等价表述：

$$F(u)=F(x,y,s)=\begin{pmatrix} Ax-b \\ c-A^Ty-s \\ H^{-1}s-P_K(H^{-1}s-Hx)\end{pmatrix}=0 \tag{12}$$

4　算法及其收敛性

本节给出求解圆锥规划的一个新的非内点算法及其收敛性分析. 基于文献[8]，该算法将求解二阶锥规划问题的全牛顿步非内点算法扩展到圆锥规划领域. 为了方便讨论，首先假定

$$z=\begin{pmatrix} Hx \\ y\end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix} I_n & -(AH^{-1})^T \\ AH^{-1} & I_m\end{pmatrix},$$

$$q=\begin{pmatrix} H^{-1}(c-s) \\ -b\end{pmatrix},$$

$$e(u)=\begin{pmatrix} H^{-1}(c-A^Ty-s) \\ Ax-b.\end{pmatrix}.$$

对于任意的初始点 $(x,y)\in C_\theta\times\mathbf{R}^m$，如果把 s 更新为 $s=HP_K(H^{-1}(c-A^Ty)-Hx)$，则由式(12)可知，只需满足 $Ax-b=0$ 且 $c-A^Ty-s=0$，即满足 $e(u)=0$ 就可以得到 $u=(x,y,s)$ 是最优性条件(3)的一个解，从而得到圆锥规划问题式(1)和式(2)的一个最优解.

4.1　算法

Step 0　取参数 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\gamma\in(0,2)$ 并给定误差容限 $\varepsilon>0$. 随机产生初始点 $(x^0,y^0)\in C_\theta\times\mathbf{R}^m$，将 s^0 更新为 $s^0=HP_K(H^{-1}(c-A^Ty^0)-Hx^0)$，置 $k=0$；

Step 1　若 $\|e(u^k)\|^2\le\varepsilon$，则停止迭代，否则转步 2；

Step 2　求解下面的线性方程组：

$$M(\Delta z^k)=-\gamma e(u^k) \tag{13}$$

得到 $\Delta z^k:=(\Delta x^k,\Delta y^k)^T\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$；

Step 3　产生新的迭代点

$$x^{k+1}=H^{-1}P_K(Hx^k+\Delta x^k),$$

$$y^{k+1}=y^k+\Delta y^k,\ s^{k+1}=HP_K(H^{-1}(c-A^Ty^{k+1})-Hx^{k+1}),$$

且令 $k=k+1$，返回步 1.

定理 4.1　对于任意的仿射约束系数矩阵 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 及可逆矩阵 $H\in\mathbf{R}^{n\times n}$，算法是适定的.

证明　在算法的步骤 2 中，式(13)的系数矩阵 $M=\begin{pmatrix} I_n & -(AH^{-1})^T \\ AH^{-1} & I_m\end{pmatrix}$. 对于任意的 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 和 $H\in\mathbf{R}^{n\times n}$，有 $AH^{-1}\in\mathbf{R}^{m\times n}$. 则 $AH^{-1}(AH^{-1})^T$ 总是半正定的. 所以 I_n 在系数矩阵中的 Schur 补 $I_m+AH^{-1}(AH^{-1})^T$ 总是正定的. 因此系数矩阵 M 总是可逆的. 在算法中步骤 2 的线性方程组式(13)必有唯一解，算法是适定的. 证毕.

4.2　收敛性分析

借鉴文献[8]中关于二阶锥规划非内点算法的收敛性分析，下面给出算法的全局收敛性. 设 Ψ^* 是最优性条件式(3)的解集，且假定 Ψ^* 非空有界. 首先，我们给出以下引理.

引理 4.2　设 $(x^k,y^k)\in C_\theta\times\mathbf{R}^m$，

$$z^k=(Hx^k,y^k)^T,$$

$$s^k=HP_K(H^{-1}(c-A^Ty^k)-Hx^k).$$

则对任意的 $u^*=(x^*,y^*,s^*)\in\Psi^*$ 有

$$\langle e(u^k),M(z^k-z^*)\rangle\ge\|e(u^k)\|^2 \tag{14}$$

证明　由于 $u^*\in\Psi^*$ 满足最优性条件式(3)，根据圆锥和二阶锥的关系式(4)和(5)有 $(Hx^*,H^{-1}s^*)\in K^n\times K^n$ 且

$$\langle Hx^*,H^{-1}s^*\rangle=0.$$

再由二阶锥规划的对偶理论知

$$\langle(Hx^*;y^*),(H^{-1}(s^k-s^*);0_m)\rangle\ge 0 \tag{15}$$

取 $v=H^{-1}(c-A^Ty^k)-Hx^k$，$\omega=H^{-1}s^*$. 由已知条件有 $P_K(v)=H^{-1}s^k$. 同时，考虑到式(6)可得

$$\langle (v-H^{-1}s^k;\beta_m),(H^{-1}(s^k-s^*);0_m)\rangle \geq 0 \tag{16}$$

把式(16)合并到式(15)上并令

$$\hat{x}=H(x^k-x^*)-H^{-1}(c-A^Ty^k-s^k),$$

$$\hat{y}=\beta_m-y^*,$$

整理后得到

$$\langle (\hat{x};\hat{y}),(H^{-1}s^*-H^{-1}s^k;0_m)\rangle \geq 0.$$

令 $\beta_m=y^k-Ax^k+b$. 由于 $u^*\in\Psi^*$,变换后得

$$\langle z^k-z^*-e(u^k),(I-M)(z^k-z^*)+e(u^k)\rangle \geq 0.$$

又因为

$$\langle z^k-z^*,(I-M)(z^k-z^*)\rangle=0,$$

所以

$$\langle e(u^k),M(z^k-z^*)\rangle \geq \| e(u^k)\|^2.$$

证毕.

引理 4.3 设 $u^k=(x^k,y^k,s^k)$是由新的非内点算法产生的迭代点列,则

$$\| F(u^k)\|^2 \leq \| e(u^k)\|^2+\| c-A^Ty^k-s^k\|^2.$$

证明 由新的非内点算法中 s^k 的更新规则可知,

$$s^k=HP_K(H^{-1}(c-A^Ty^k)-Hx^k).$$

结合投影性质((7)式)得

$$\| H^{-1}s^k-P_K(H^{-1}s^k-Hx^k)\|^2 \leq \| H^{-1}(c-A^Ty^k-s^k)\|^2 \tag{17}$$

再根据式(12)中 $F(u)$的定义,可得结论

$$\| F(u^k)\|^2 \leq \| e(u^k)\|^2+\| c-A^Ty^k-s^k\|^2.$$

引理 4.4 设 u^k 是由新的非内点算法产生的迭代点列,$\gamma\in(0,2)$. 则对任意的 $u^*\in\Psi^*$ 都有

$$\| M(z^{k+1}-z^*)\|^2 \leq \| M(z^k-z^*)\|^2-\gamma(2-\gamma)\| e(u^k)\|^2.$$

证明 由算法描述中的步骤 2 可知,$Mz^{k+1}=Mz^k-\gamma e(u^k)$. 两边同时减去 Mz^* 得到

$$M(z^{k+1}-z^*)=M(z^k-z^*)-\gamma e(u^k).$$

结合引理 4.2 知

$$\| M(z^{k+1}-z^*)\|^2= \| M(z^k-z^*)\|^2+\gamma^2\| e(u^k)\|^2-2\gamma\langle M(z^k-z^*),e(u^k)\rangle \leq \| M(z^k-z^*)\|^2-\gamma(2-\gamma)\| e(u^k)\|^2 \tag{18}$$

定理 4.5 设$\{u^k\}$是由算法产生的任一迭代点列. 则$\{u^k\}$的任一聚点 $u^*=(x^*,y^*,s^*)$都是 $F(u)=0$ 的解,从而(x^*,y^*,s^*)是圆锥规划问题式(1)和式(2)的解.

证明 设 $\hat{u}=(\hat{x},\hat{y},\hat{s})\in\Psi^*$,$\hat{z}=(H\hat{x},\hat{y})^T$. 则

$$\| M(z^k-\hat{z})\|^2= \| z^k-\hat{z}+(M-I)(z^k-\hat{z})\|^2= \| z^k-\hat{z}\|^2+\|(M-I)(z^k-\hat{z})\|^2 \tag{19}$$

结合引理 4.4 有

$$\| z^k-\hat{z}\|^2 \leq \| M(z^k-\hat{z})\|^2 \leq \| M(z^0-\hat{z})\|^2 \tag{20}$$

这表明序列$\{z^k\}$有界. 另一方面,由 s^k 的定义和投影算子的连续性可知$\{s^k\}$有界,因而序列$\{u^k\}$有界,至少有一个聚点.

假设 $u^*=(x^*,y^*,s^*)$是序列$\{u^k\}$的任一聚点. 不失一般性,假设存在一子序列$\{u^{ki}\}$收敛到 u^*. 根据引理 4.3 和引理 4.4 容易得到

$$\lim_{k\to\infty}\| e(u^k)\|^2=0,$$

则$\lim\limits_{k\to\infty}\| F(u^k)\|^2=0$. 因此

$$\lim_{k\to\infty}F(x^{ki},y^{ki},s^{ki})=F(x^*,y^*,s^*)=0.$$

因此 u^* 是 $F(u)=0$ 的一个解. 从而(x^*,y^*,s^*)是圆锥规划问题式(1)和式(2)的解. 证毕.

5 数值实验

本节的数值试验使用 MATLAB R2015b 在配置为 2.20GHZ CPU 处理器,4.00GB 内存的个人计算机.

随机生成算法的测试问题分为三类. 其中小规模问题的维数介于 10 到 90,中等规模问题的维数介于 100 到 900,大规模问题的维数介于 1000 到 5000. 每一类问题中圆锥的旋转角分别取 $\theta=\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}$,参数取 $\gamma=0.8$. 问题生成的具体步骤为:假定 $n=2m$,随机生成矩阵 A,其中包含 A 行向量组线性相关的情况. 随机生成向量 x 满足 $x\in C_\theta$. 另外生成随机向量 $y\in\mathbf{R}^m$,使其满足条件 $c-A^Ty\in C_\theta^*$. 计算 $b=Ax$. 算法的终止条件是 $\| e(u)\|^2\leq 10^{-6}$. 数值结果分别记录在表 1~3 中. “iter”表示平均迭代次数;“CPU”表示平均的 CPU 时间,单位为 s.

从表 1~3 的数值结果看出,随着测试问题维数的增加,算法的迭代次数和所需要的 CPU 时间都有所增加. 总体来看,运用该算法求解不同规模时不同旋转角的圆锥规划问题所需的平均 CPU 时间比较少,并且平均迭代次数在 40 次以内,比较稳定. 综合分析测试问题及其测试结果可以发现,算法能处

理矩阵 A 为行向量组线性相关的情况，并且对于求解大规模稀疏性圆锥规划问题具有很好的执行效果.

表 1　小规模问题的数值结果

Tab. 1　Numerical results of the small-scale problem

n	$\theta=\frac{\pi}{12}$		$\theta=\frac{\pi}{6}$		$\theta=\frac{\pi}{4}$		$\theta=\frac{\pi}{3}$		$\theta=\frac{5\pi}{12}$	
	iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU
10	18	0.0100	19	0.0093	19	0.0089	19	0.0095	18	0.0079
30	21	0.0227	18	0.0128	17	0.0136	19	0.0141	20	0.0275
50	21	0.0507	18	0.0361	19	0.0443	18	0.0330	21	0.0270
70	21	0.0446	18	0.0400	19	0.0579	19	0.0527	22	0.0452
90	20	0.0755	19	0.0704	18	0.0745	20	0.0786	21	0.0851

表 2　中等规模问题的数值结果

Tab. 2　Numerical results of the medium-scale problem

n	$\theta=\frac{\pi}{12}$		$\theta=\frac{\pi}{6}$		$\theta=\frac{\pi}{4}$		$\theta=\frac{\pi}{3}$		$\theta=\frac{5\pi}{12}$	
	iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU
100	22	0.0873	19	0.0704	19	0.0679	19	0.0580	22	0.0584
300	23	0.7248	21	0.7017	19	0.6122	22	0.4997	21	0.4782
500	26	3.0691	21	2.4108	22	2.4700	21	1.7333	26	2.1328
700	24	6.3392	21	3.9402	20	5.2461	26	4.8898	22	4.1688
900	27	13.4527	21	7.7181	21	10.4264	25	9.0667	26	9.6565

表 3　大规模问题的数值结果

Tab. 3　Numerical results of the large-scale problem

n	$\theta=\frac{\pi}{12}$		$\theta=\frac{\pi}{6}$		$\theta=\frac{\pi}{4}$		$\theta=\frac{\pi}{3}$		$\theta=\frac{5\pi}{12}$	
	iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU
1000	28	15.3356	24	11.4336	20	14.7869	28	13.2885	29	13.5715
1500	29	18.6939	25	12.4674	26	13.2603	21	10.3206	26	20.0792
2000	33	39.0869	33	37.9438	31	34.3291	33	38.7357	28	30.8473
2500	33	62.3272	27	53.8612	32	45.4482	33	63.8192	29	72.3346
3000	29	90.6724	29	87.0463	32	102.7323	27	82.4323	33	98.5321
3500	29	146.4293	27	139.2924	36	192.4474	34	125.7607	36	156.4900
4000	30	205.4816	36	189.2279	36	257.7407	36	201.2377	36	213.4650
4500	33	403.5372	43	431.9849	34	344.5215	39	411.3329	30	433.2072
5000	40	525.8962	39	519.1986	38	506.1335	38	509.3221	39	535.8554

参考文献：

[1]　Bai Y Q, Ma P F, Zhang J. A polynomial-time interior-point method for circular cone programming based on kernel functions [J]. J Ind Manag Optim, 2016, 12: 739.

[2]　Matsukawa Y, Yoshise A. A primal barrier function Phase-I algorithm for nonsymmetric conic optimization problems [J]. Jpn J Ind Appl Math, 2012, 29: 499.

[3]　Li Z L, Ge S S, Liu S B. Contact-force distribution optimization and control for quadruped robots using both gradient and adaptive neural network [J]. IEEE T Neur Net Lear, 2014, 25: 1460.

[4]　Bai Y Q, Gao X R, Yu C J. A primal-dual interior-point method for optimal grasping manipulation of multi-finger-ed hand-arm robots [J]. J Oper Res Soc, 2017, 5: 177.

[5]　Boyd S P, Wegbreit B. Fast computation of optimal

contact forces [J]. IEEE T Robot, 2007, 23: 1117.
[6] Bai Y Q, Gao X R, Wang G Q. Primal-dual interior-point algorithms for the convex quadratic circular cone optimiz-ation [J]. Numer Algebra Contr Optim, 2015, 5: 211.
[7] Chi X N, Wei H J, Wan Z P, *et al*. Smoothing newton algorithm for the circular cone programming with a non-monotone line search [J]. Acta Math Sci, 2017, 37B: 1262.
[8] Fang L, He G P, Sun L. A globally convergent non-interior point algorithm with full Newton-step for second-order cone programming [J]. Appl Math-czech, 2009, 54: 447.
[9] He B S, Liao L Z, Han D R, *et al*. A new inexact alternati- ng directions method for monotone variational inequality [J]. Math Program, 2002, 92: 103.
[10] 陈小彪，薛小维. 非精确求解凸规划的部分交替方向算法 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2015, 52: 736.
[11] 李欢，寇喜鹏. 一种新的求解单调变分不等式的非精确并行分裂法 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 503.
[12] Zhou J C, Chen J S, Mordukhovich B S. Variatiational analysis of circular cone programs [J]. Optimization, 2014, 64: 113.
[13] Zhou J C, Chen J S. Properties of circular cone and spectral factorization associated with circular cone [J]. J Nonlinear Convex A, 2013, 14: 807.
[14] Alizadeh F, Goldfarb D. Second-order cone programming [J]. Math Program, 2003, 95: 3.
[15] 穆学文，张亚玲. 二阶锥规划的一种快速的投影收缩算法 [J]. 应用数学学报, 2015, 38: 16.

引用本文格式：
中　文：程欢，穆学文，宋琦悦. 一种新的求解圆锥规划的非内点算法 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：203.
英　文：Cheng H, Mu X W, Song Q Y. A new non-interior point algorithm for circular cone programming [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 203.