doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2019. 01. 005

表示直向代数的模的刻画

马思雪
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：设 Λ 是有限域 k 上的表示直向代数. 对任意有限生成右 Λ-模 M，本文利用 Hall 数定义了模 M 的一个同构不变量，证明了该不变量可以在同构意义下唯一确定模 M，从而揭示了表示直向代数上的模的 Hall 数与模的同构类分类问题的内在联系.

关键词：表示直向代数；模；Hall 数
中图分类号：O154.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)01-0017-04

A characterization of modules for representation-directed algebras

MA Si-Xue
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Let Λ be a representation-directed algebra over finite field k. For arbitrary finitely generated right Λ- module M, we define an invariant for M by using Hall numbers associated to M. It is proved that the invariant uniquely determines the module M up to isomorphism, thus revealed the relation between the Hall number and the isomorphic classification problem of the module.

Keywords: Representation-directed algebra; Module; Hall number
(2010 MSC 18E10, 18E35)

1　引　言

模是代数学的主要研究对象之一[1-11]. 给定一个有限维结合代数，对其上的有限生成模在同构意义下进行分类是代数学的一个基本问题. 显然，对一般的有限维结合代数，上述分类问题根本无法完成. 因此人们尝试对满足一定性质的结合代数或者具有某种特殊同调性质的有限生成模考虑相应的分类问题，参见文献[2，3，5，6，8]等.

Gabriel[6]利用模的维数向量给出了 ADE 型遗传代数上的不可分解模的分类. Auslander 和 Reiten[2]对不具有短循环的代数证明了其上的不可分解模在同构意义下也由其维数向量唯一确定. Geng 和 Peng[7]及 Ringel[10]分别证明了表示有限型丛倾斜代数上的不同构的不可分解模具有不同的维数向量. 利用 ADE 量子群的 Feigin 映射，Reineke[9]观察到 ADE 型路代数上的模可由与此模相关的 Hall 数唯一确定，从而给出了 ADE 型路代数上模的同构类的一个刻画. Fu[4]利用表示有限型遗传代数模范畴上的字母序给出了 Reineke 的刻画的表示论方法的证明，进而将 Reineke 的刻画推广至有限域上的一般的表示有限型遗传代数.

表示直向代数是代数表示论中一类重要的表示有限型代数. 特别地，表示有限型遗传代数都是表示直向代数. 与 ADE 型路代数相似，表示直向代数上的不可分解模也由其维数向量唯一确定[1]，并且表示直向代数的模范畴上也存在自然的全序. 本文的主要结果即是将文献[4]中关于有限表示型遗传代数的模的刻画推广至一般的表示直向代数.

在本文中，Λ 总是假定为有限域 k 上的表示直

收稿日期：2018-04-09
作者简介：马思雪(1992－)，女，硕士，主要研究方向为代数表示论. E-mail：sixueyw@163.com

向代数，对 Λ- 模 M 及 $a\in N$,以 M^a 表示 a 个 M 作直和.

2 预备知识

设 Λ 是有限域 k 上的表示直向代数,mod Λ 表示有限生成的右 Λ-模范畴,ind Λ 表示不可分解右 Λ-模的同构类代表元的集合. 分别记 τ 和 τ^{-1} 为范畴 mod Λ 上的 Auslander-Reiten 平移. 令 $G_0(\mathrm{mod}\ \Lambda)$ 表示 mod Λ 的 Grothendieck 群，对 $M\in\mathrm{mod}\ \Lambda$,$[M]$表示 M 在 $G_0(\mathrm{mod}\ \Lambda)$ 中的象.

表示直向代数是有限表示型代数，即它的不可分解右模的个数在同构意义下是有限的，且可以对不可分解右模进行排序. 所以,我们不妨设

$$\mathrm{ind}\ \Lambda=\{M_1,M_2,\cdots,M_\nu\},$$

且满足 $\mathrm{Hom}(M_i,M_j)=0(j>i)$,其中 $|\mathrm{ind}\ \Lambda|=\nu$. 记 $J=\{1,2,\cdots,n\}$. 设 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 为 Λ 的所有不同构的单模，且满足

$$\mathrm{Ext}^1(S_i,S_j)=0(j<i).$$

记 $P_1,P_2,\cdots P_n$ 为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的投射盖,$I_1,I_2,\cdots,I_n$ 为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的入射包.

设 $M\in\mathrm{mod}\ \Lambda$,由 Krull-Schmidt 定理知,任何模都可以写成不可分解模的直和，所以存在唯一的 $a_1^M,a_2^M,\cdots,a_\nu^M\in N$,使得

$$M\cong M_1^{a_1^M}\oplus\cdots\oplus M_\nu^{a_\nu^M}.$$

定义 2.1 任意 $M,N\in\mathrm{mod}\ \Lambda$,称 $M<N$,如果存在 $1\leqslant k\leqslant\nu$,使得

$$a_1^M=a_1^N,\cdots,a_{k-1}^M=a_{k-1}^N,a_k^M<a_k^N.$$

引理 2.2 设 $X,Y,Z\in\mathrm{mod}\ \Lambda$. 如果存在短正合列 $0\to X\to Y\to Z\to 0$,那么我们有 $Z\leqslant Y$.

定义 2.3 任取 $M,N_1,N_2,\cdots,N_s\in\mathrm{mod}\ \Lambda$,称

$$F^M_{N_1,N_2,\cdots,N_S}:=\#\{0=U_{s+1}\subseteq U_s\subseteq\cdots\subseteq U_2\subseteq U_1=M|U_i/U_{i+1}\cong N_i,1\leqslant i\leqslant s\}$$

为模 $M,N_1,N_2,\cdots,N_s\in\mathrm{mod}\ \Lambda$ 的 Hall 数.

定义 2.4 称 $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_s\}$是 ind Λ 的直向划分，其中 $D_i(1\leqslant i\leqslant s)$是 ind Λ 的子集，如果 ind Λ 是 $D_1,D_2,\cdots,D_s$ 的无交并，且满足

(i) $\mathrm{Ext}^1(U,V)=0$,其中 $U,V\in D_k$;

(ii) $\mathrm{Hom}(V,U)=0=\mathrm{Ext}^1(U,V)$,其中 $U\in D_k,V\in D_l,1\leqslant k<l\leqslant s$.

对于一个给定的 ind Λ 的直向划分 $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_s\}$,记 M_{D_k} 是 D_k 中的所有不可分解模的直和,add M_{D_k} 是 M_{D_k} 的有限直和的直和项构成的满子范畴.

引理 2.5 设 D 是 ind Λ 的任意的直向划分. 则 $\dim_k\mathrm{Hom}(\tau^{-1}M_{D_k},M_{D_k})=0$.

证明 任取 $M_{k_l},M_{k_t}\in D_k$. 反设 $\tau^{-1}M_{k_l}\neq 0$ 且

$$\dim_k\mathrm{Hom}(\tau^{-1}M_{k_l},M_{k_t})\neq 0.$$

由直向划分的定义知,存在 $1\leqslant i\leqslant k\leqslant s$,使得 $\tau^{-1}M_{k_l}\in D_i$. 考虑 M_{k_l} 的 Auslander-Reiten 序列

$$0\to M_{k_l}\to X\to\tau^{-1}M_{k_l}\to 0.$$

再次由直向划分的定义可知,存在 $k\leqslant j\leqslant s$,使得 $\tau^{-1}M_{k_l}\in D_j$,从而 $i=j=k$. 但是,$\mathrm{Ext}^1(\tau^{-1}M_{k_l},M_{k_l})\neq 0$ 与直向划分的定义矛盾. 所以假设不成立. 证毕.

定义 2.6 设 $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_s\}$是 ind Λ 的直向划分,$1\leqslant k\leqslant s$,$S_k:=\{i\in J\,|\,\mathrm{Hom}(P_i,M_{D_k})\neq 0\}$并记 $s_k=|S_k|$. 定义 $w_k=(i_1i_2\cdots i_{s_k})\in J^{s_k}$,其中 $i_1<i_2<\cdots<i_{s_k}\in S_k$. 称

$$w_D=(w_1w_2\cdots w_s):=(j_1j_2\cdots j_\mu)\in J^\mu$$

为由直向划分 D 定义的词，其中 $\mu=\sum_{k=1}^{s}s_k$.

定义 2.7 设 D 是 ind Λ 的直向划分,$w_D=(j_1j_2\cdots j_\mu)$是由 D 定义的词. 对任意 $M\in\mathrm{mod}\ \Lambda$,我们定义 N^μ 的一个子集

$$S_M(w_D):=\{\underline{a}=(a_1,\cdots,a_\mu)\in N^\mu\,|\,F^M_{S_{j_1}^{a_1},\cdots,S_{j_\mu}^{a_\mu}}\neq 0\}.$$

3 主要结果

本文的主要结论如下.

定理 3.1 设 $M,N\in\mathrm{mod}\ \Lambda,D=(D_1,\cdots,D_s)$是 ind Λ 的直向划分,$w_D=(j_1\cdots j_\mu)$是由 D 定义的词. 则下述条件等价：

(i) $M\cong N$;

(ii) $\forall\,\underline{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_\mu)\in N^\mu,F^M_{S_{j_1}^{a_1},\cdots,S_{j_\mu}^{a_\mu}}=F^N_{S_{j_1}^{a_1},\cdots,S_{j_\mu}^{a_\mu}}$;

(iii) $S_M(w_D)=S_N(w_D)$.

主要结论的证明还需要下面的知识.

定义 3.2 设 $X\in\mathrm{mod}\ \Lambda,0\to X\to\bigoplus_{i=1}^{n}I_i^{a_i}\to\bigoplus_{i=1}^{n}I_i^{b_i}$ 是 X 的极小入射预解. 称 $i(X)=(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n)$是模 X 的 i-向量.

我们先回顾如下的引理，该结论是文献[1]中的特殊情形.

引理 3.3 对任意 $X,M\in\mathrm{mod}\ \Lambda$ 有

$$(\underline{\dim}M)^T\cdot i(X)=\dim_k\mathrm{Hom}(M,X)-\dim_k\mathrm{Hom}(\tau^{-1}X,M),$$

其中$\underline{\dim}\,M$ 表示模 M 的维数向量.

定义 3.4 设 $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_s\}$ 是 ind Λ 的直向划分，$w_D=(j_1\cdots j_\mu)$ 是由 D 定义的词. 任意 $M\in \mathrm{add}\ M_{D_k}$，有

$$[M]=m_1[S_{i_1}]+\cdots+m_{s_k}[S_{i_{s_k}}]\in G_0(\mathrm{mod}\ \Lambda).$$

我们称

$$v(M):=(0,\cdots,0,m_1,m_2,\cdots,m_{s_k},0,\cdots,0)\in N^\mu$$

为 M 的生成向量.

任意 $M\in \mathrm{mod}\ \Lambda$，记

$$M_{(k)}:=\bigoplus_{U\in D_k}U^{\mu_U^M},$$

其中 μ_U^M 表示不可分解模 U 作为模 M 的直和项的重数. 则 $M\cong\bigoplus_{k=1}^{s}M_{(k)}$. 显然，$M_{(k)}\in \mathrm{add}\ M_{D_k}$. 我们称

$$v(M):=\sum_{k=1}^{s}v(M_{(k)})$$

为 M 的生成向量.

定义 3.5 设 $\underline{a}=(a_1a_2\cdots a_m)\in N^m$，$x=(i_1i_2\cdots i_m)\in J^m$. 定义

$$\varepsilon(\underline{a},x):=\{X\mid F^X_{S_{i_1}^{a_1},S_{i_2}^{a_2},\cdots,S_{i_m}^{a_m}}\neq 0\}.$$

引理 3.6 设 Λ 是有限域 k 上的表示直向代数，D 是 ind Λ 的直向划分，$w_D=(j_1\cdots j_\mu)$ 是由划分 D 定义的词. 设 $N\in \mathrm{add}\ M_{D_k}$，$v(M)\in N^\mu$ 是 N 的生成向量. 我们有

(i) $N\in\varepsilon(v(N),w_D)$；

(ii) $\forall L\in\varepsilon(v(N),w_D)$，$N\leqslant L$.

证明 (i) 可由 $v(N)$ 和 $\varepsilon(v(N),w_D)$ 的定义得到.

(ii) 反设 $L<N$. 设 $D_k=\{M_{k_1},\cdots,M_{k_t}\}$，使得 $\mathrm{Hom}(M_{k_i},M_{k_j})=0(1\leqslant j<i\leqslant t)$. 则 N 可表示为

$$N=M_{k_1}^{a_1}\oplus\cdots\oplus M_{k_t}^{a_t},$$

其中 $a_t\in N$，$1\leqslant i\leqslant t$. 因为 $\underline{\dim}L=\underline{\dim}N$，且 $L<N$，所以 L 可表示成

$$L=M_{k_1}^{b_1}\oplus\cdots\oplus M_{k_t}^{b_t}\oplus L_0,$$

其中

$$L_0\in \mathrm{add}\ M_{D_{k+1}}\oplus\cdots\oplus M_{D_s},$$

且存在 $1\leqslant l\leqslant t$ 使得

$$b_1=a_1,\cdots,b_{l-1}=a_{l-1},b_l<a_l.$$

考虑

$$N_1=M_{k_l}^{a_l}\oplus\cdots\oplus M_{k_t}^{a_t},$$

$$L_1=M_{k_l}^{b_l}\oplus\cdots\oplus M_{k_t}^{b_t}\oplus L_0.$$

则 $\underline{\dim}N_1=\underline{\dim}L_1$. 特别地，

$$(\underline{\dim}N_1)^T\cdot i(M_{k_l})=(\underline{\dim}L_1)^T\cdot i(M_{k_l}).$$

由引理 3.3 知

$$\begin{aligned}&(\underline{\dim}\,N_1)^T\cdot\ i(M_{k_l})=\\&\dim_k\mathrm{Hom}(N_1,M_{k_l})-\\&\dim_k\mathrm{Hom}(\tau^{-1}M_{k_l},N_1)=\\&a_l>b_l=\dim_k\mathrm{Hom}(L_1,M_{k_l})\geqslant\\&\dim_k\mathrm{Hom}(L_1,M_{k_l})-\\&\dim_k\mathrm{Hom}(\tau^{-1}M_{k_l},L_1)=\\&(\underline{\dim}\,L_1)^T\cdot\ i(M_{k_l}).\end{aligned}$$

矛盾. 故假设不成立. 所以 $N\leqslant L$.

命题 3.7 设 Λ 是有限域 k 上的表示直向代数，D 是 ind Λ 的直向划分，$w_D=(j_1\cdots j_\mu)$ 是由划分 D 定义的词. 设 $M\in \mathrm{mod}\ \Lambda$，$v(M)$ 是 M 的生成向量. 我们有

(i) $M\in\varepsilon(v(M),w_D)$；

(ii) $\forall L\in\varepsilon(v(M),w_D)$，$M\leqslant L$.

证明 (i) $M\in \mathrm{mod}\ \Lambda$，则 $M=\bigoplus_{k=1}^{s}M_{(k)}$，其中 $M_{(k)}=\bigoplus_{U\in D_k}U^{\mu_U^M}$. 由定义知

$$\varepsilon(v(M),w_D)=\{X\mid F^X_{X_1,\cdots,X_S}\neq 0,$$

其中 $X_k\in\varepsilon(v(M_{(k)}),w_D)\}$.

一方面，根据引理 3.6 (i)，我们知道 $M_{(k)}\in\varepsilon(v(M_{(k)}),w_D)$. 另一方面，$F^X_{M_{(1)},\cdots,M_{(s)}}\neq 0$ 当且仅当

$$X=M_{(1)}\oplus\cdots\oplus M_{(s)}=M.$$

此时，

$$F^X_{M_{(1)},\cdots,M_{(s)}}=F^M_{M_{(1)},\cdots,M_{(s)}}=1,$$

满足定义 3.5 的条件.

(ii) 设 $L\in\varepsilon(v(M),w_D)$. 存在 $L_i\in\varepsilon(v(M_{(i)}),w_D)$，使得 $F^L_{L_1,\cdots,L_s}\neq 0(1\leqslant i\leqslant s)$. 如果 $L_i\cong M_{(i)}(1\leqslant i\leqslant s)$，那么 $L\cong M$. 所以要证命题成立，只需证存在 $1\leqslant i\leqslant s$ 使得 $L_i\neq M_{(i)}$，则 $M<L$.

假设

$$L_1=M_{(1)},\cdots,L_{k-1}=M_{(k-1)},L_k>M_{(k)}.$$

设

$$b:=v(M_{(k+1)})+\cdots+v(M_{(s)}),$$

$$X=M_{(1)}\oplus\cdots\oplus M_{(k-1)}.$$

由 L 的定义可以得到正合列

$$0\to Y\to Z\to L_k\to 0 \text{ 和 } 0\to Z\to L\to X\to 0,$$

其中 $Y\in\varepsilon(b,w_D)$，$Z\in \mathrm{mod}\ \Lambda$. 不妨设

$$L=M_1^{a_1}\oplus\cdots\oplus M_v^{a_v},$$

$$M=M_1^{b_1}\oplus\cdots\oplus M_v^{b_v},$$

$$X=M_1^{b_1}\oplus\cdots\oplus M_t^{b_t},$$

其中 $t=|D_1|+\cdots|D_{k-1}|$. 由引理 2.2，我们知道 $X\leqslant L$. 则

(i) 存在 $1 \leqslant l \leqslant t$,使得 $b_1 = a_1, \cdots, b_{l-1} = a_{l-1}$, $b_l = a_l$;

(ii) $b_1 = a_1, \cdots, b_{t-1} = a_{t-1}, b_t = a_t$.

对于情况 (i),由定义 2.1 可得 $M < L$. 下面考虑情况(ii). 设

$$L' := M_{t+1}^{a_{t+1}} \oplus \cdots \oplus M_v^{a_v}.$$

由 $\mathrm{Hom}(M_j, M_i) = 0 (1 \leqslant i < j \leqslant v)$ 可得 $\mathrm{Hom}(L', X) = 0$. 因此短正合列 $0 \to Z \to L \to X \to 0$ 是可裂的. 所以 $L = Z \oplus X$. 再次根据引理 2.2 可得 $L_k \leqslant Z$ 且 $M_{(k)} < L_k$. 因而 $M < L$.

定理 3.1 的证明 (i)⇒(ii), (ii)⇒(iii)是显然的.

(iii)⇒(i). 设 $v(M) = (m_1, \cdots, m_\mu)$, $v(N) = (n_1, \cdots, n_\mu)$分别为 M, N 的生成向量. 根据定义 2.7,我们可以得到

$$v(M) \in S_M(w_D) = S_N(w_D),$$

$$v(N) \in S_N(w_D) = S_M(w_D),$$

则 $v(M) \in S_N(w_D)$,即

$$F^N_{S_{j_1}^{m_1}, \cdots S_{j_\mu}^{m_\mu}} \neq 0, \quad N \in \varepsilon(v(M), w).$$

根据命题 3.7(ii),M≤N. 同理可证 $N \leqslant M$. 所以 $M \cong N$. 证毕.

参考文献:

[1] Auslander M, Reiten I. Modules determined by their composition factors [J]. Illinois J Math, 1985, 29: 280.

[2] Bongartz K, Smalo S. Modules determined by their tops and socles [J]. Proc Amer Math Soc, 1986, 96: 34.

[3] Fu C, Geng S. On indecomposable [J]-rigid modules for cluster-tilted algebras of tame type [J]. arXiv: 1705.10939.

[4] Gabriel P. Unzerlegbare darstellungen I [J]. Manuscripta Math, 1972, 6: 71.

[5] Guo J. Conditions for algebras with radical squared zero to have the property that indecomposable modules are determined by their composition factors, I [J]. Acta Math Sin, 1988, 31: 181.

[6] Geng S, Peng L. The dimension vecotrs of indecomposable modules of cluster-tilted algebras and the Fomin-Zelevinsky denominators conjecture [J]. Acta Math Sinica, 2012, 28: 581.

[7] Ringel C M. Cluster-concealed algebras [J]. Adv Math, 2011, 226: 1513.

[8] Markus R. Feigin's map and monomial bases for quantized enveloping algebras [J]. Math. Z, 2001, 237: 653.

[9] Fu C. Feigin's map revisited [J]. J Pure Appl Algebra, 2018, 222: 4199

[10] Assem I, Simson D, Skowronski A. Elements of the representation theory of associative algebras, volume 1: techniques of representation theory [M]. London: Cambridge University Press, 2006.

[11] 杨静颖. $\tilde{A}$ 型路代数张量积的 Coxeter 变换 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 994.

引用本文格式:

中 文: 马思雪. 表示直向代数的模的刻画 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 17.

英 文: Ma S X. A characterization of modules for representation-directed algebras [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 17.