doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.02.005

(3+1)维非线性分数阶 Jimbo-Miwa 方程的新精确解

熊淑雪，孙峪怀，廖红梅，康 丽
(四川师范大学数学科学学院，成都 610066)

摘 要：本文首先利用复变换和整合分数阶导数方法将(3+1)维分数阶 Jimbo-Miwa 方程转化为常微分方程，再用扩展的(G′/G)-展开法和新的辅助方程求出了分数阶 JM 方程的新精确解. 这些解包括双曲函数解、三角函数解和有理函数解.

关键词：扩展的(G′/G)-展开法；(3+1)维分数阶 Jimbo-Miwa；精确解
中图分类号：O175.29 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2019)02-0213-04

New exact solution for (3+1) dimensional nonlinear fractional Jimbo-Miwa equation

XIONG Shu-Xue, *SUN Yu-Huai*, *LIAO Hong-Mei*, *KANG Li*
(School of Mathematical Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

Abstract: By using the complex transform and conformable fractional derivative transform methods, the (3+1) dimensional fractional Jimbo-Miwa equation is transformed into an ordinary differential equation. Then the expanded (G′/G) expansion method is employed to solve the fractional JM equation. The hyperbolic function solution, trigonometric function solution and rational function solution for the Jimbo-Miwa equation are obtained.

Keywords: Expanded (G′/G)-expansion method; (3+1)-dimensional fractional Jimbo-Miwa equation; Exact solution
(2010 MSC 35R11, 83C15)

1 引 言

分数阶偏微分方程有非常深厚的物理背景和丰富的理论内涵. 它不仅可以描述光学和流变学问题，还在很多领域有广泛应用，如热力系统、动力系统、力学信号处理和机器人等.

(3+1)维非线性分数阶 Jimbo-Miwa 方程[1]

$$2D_y^{\beta}D_t^{\alpha}u+3D_y^{\beta}uD_x^{2\eta}u+3D_x^{\eta}uD_x^{\eta}D_y^{\beta}u-3D_x^{\eta}D_z^{\gamma}u+D_x^{3\eta}D_y^{\beta}u=0 \tag{1}$$

(其中 $0<\alpha,\beta,\eta,\gamma\leq 1$，$D_x^{\eta},D_y^{\beta},D_z^{\gamma},D_t^{\alpha}$ 是整合分数阶导数)是由 Jimbo 和 Miwa 提出的[2]. 整数阶的(3+1)维 Jimbo-Miwa 方程的精确解的求解方法有很多，如双线性 Backlund 变换[3]、李群分析法[4]、平面动力系统理论与方法[5]、(G′/G)-展开法[6,7]、投影方程法和变量分析法[8]、Hirota 方程[9]和子方程法[10]等. 特别地，文献[11]利用双线性形式和扩展类测试方法得到该方程新的双周期的交叉扭结多孤子解. 文献[12]则研究了方程解与孤子之间的相互作用和它们之间的动力学行为，给出了两种激励现象，即聚变与裂变，还研究了“流氓波”.

但是，且前对于(3+1)维分数阶 Jimbo-Miwa 方程精确解的研究却很少. 文献[13]用修正的

收稿日期：2018-04-17
基金项目：国家自然科学基金(11371267)；四川省教育厅自然科学重点基金(2012ZA135)
作者简介：熊淑雪(1993－)，女，硕士生，主要研究方向为非线性偏微分方程. E-mail：374696617@qq.com
通讯作者：孙峪怀. E-mail：sunyuhuai63@163.com

Kudryashov 法得到了具有可解性意义的精确解,其在将 JM 方程转化为常微分方程时利用了有限级数形式的预测解和代数运算,通过代数运算确定方程与变换系数的关系就可以得到三维行波类型的解决方案. 文献[14]采用$\{\exp(-\varphi(\xi))\}$法构造精确解,并给出了均质平衡原理. 本文拟用复变换将分数阶偏微分方程转化为整数阶常微分方程,再利用(G′G)-展开法求解(3+1)维分数阶 Jimbo-Miwa 方程的新精确解.

2 方法描述

考虑如下时空分数阶偏微分方程:

$$P(u,D_t^{\alpha}u,D_x^{\eta}u,D_y^{\beta},D_z^{\gamma}u,\cdots)=0 \tag{2}$$

这里 P 是关于待求函数 $u=u(x,y,z,t)$ 及其偏导数的多项式. 用(G′/G)-展开法求解方程(2)的步骤如下:

步骤 1 做分数阶复变换

$$u(x,y,z,t)=u(\xi),\xi=\frac{x^{\eta}}{\eta}+\frac{y^{\beta}}{\beta}+\frac{z^{\gamma}}{\gamma}-\omega\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \tag{3}$$

其中 ω 为待求常数且不等于 0. 将式(2)转化为整数阶的常微分方程

$$F(u,u',u'',\cdots)=0 \tag{4}$$

步骤 2 假如式(4)的解可以表示成关于(G′/G)的多项式形式:

$$u(\xi)=\sum_{i=-m}^{m}a_i\left(\frac{G'}{G}\right)^i \tag{5}$$

其中 m 是根据平衡式(4)中最高阶导数项和非线性项确定,$a_{-m},\cdots a_0,\cdots,a_m$ 为待定常数,$G=G(\xi)$ 满足下列二阶非线性常微分方程,A,B,C 为常数,

$$G''G=A(G')^2+BGG'+CG^2 \tag{6}$$

步骤 3 合并式(4)中(G'/G)的相同幂次项,令该多项式的(G'/G)各阶幂次的系数为零,导出关于 $a_i(i=-m,\cdots,0,\cdots,m)$及 ω 的代数方程组,并求其解得出式(2)的精确解.

3 (3+1)维分数阶 Jimbo-Miwa 方程的新精确解

首先,对式(1)做分数阶复变换,积分一次,并令积分常数等于 0. 作变换(3)并令 $u'=v$ 可得

$$(2\omega+3)v-3v^2-v'=0 \tag{8}$$

平衡非线性项 v^2 和最高阶导数项 v' 有 $m+2=2m$,即 $m=2$. 式(8)的解变为:

$$v(\xi)=a_{-2}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{-2}+a_{-1}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{-1}+a_0+a_1\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)+a_2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2 \tag{9}$$

将 $v(\xi)$,$v'(\xi)$和 $v''(\xi)$代入式(8)中,合并$\left(\frac{G'}{G}\right)^i$$(i=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$,并令各幂次的系数为零,得到关于 $a_{-2},a_{-1},a_0,a_1,a_2,\omega$ 的代数方程组

$$\begin{cases}-3a_2^2-6a_1(A-1)^2=0,\\ -6a_1a_2-2a_1(A-1)^2-10a_2B(A-1)=0,\\ (2\omega+3)a_2-6a_0a_2-3a_1^2-6a_2C(A-1)-3a_1B(A-1)-4a_2B^2-2a_2C(A-1)=0,\\ (2\omega+3)a_1-6a_{-1}a_2-6a_0a_1-2a_1C(A-1)-6a_2BC-a_1B^2=0,\\ (2\omega+3)a_0-6a_{-2}a_2-6a_{-1}a_1-3a_0^2-a_1BC-2a_2C^2-2a_{-2}(A-1)^2-a_{-1}B(A-1)=0,\\ (2\omega+3)a_{-1}-6a_{-2}a_1-6a_{-1}a_0-6a_{-2}B(A-1)-a_{-1}B^2-2a_{-1}C(A-1)=0,\\ (2\omega+3)a_{-2}-6a_{-2}a_0-3a_{-1}^2-8a_{-2}C(A-1)-3a_{-1}BC-4a_{-2}B^2=0,\\ -6a_{-2}a_{-1}-10a_{-2}BC-2a_{-1}C^2=0,\\ -3a_{-2}^2-6a_{-2}C^2=0\end{cases} \tag{10}$$

解上述代数方程组得

(i)

$$a_2=a_1=0,a_0=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6},a_{-1}=-2BC,a_{-2}=-2C^2,\omega=\pm\frac{B^2+4C-4AC}{2}-\frac{3}{2} \tag{11}$$

(ii)

$$a_2=-2(A-1)^2,a_1=-2B(A-1),a_0=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6},a_{-1}=a_{-2}=0,$$

$$\omega=\pm\frac{B^2+4C-4AC}{2}-\frac{3}{2} \tag{12}$$

情形 1　当 $B^2+4C-4AC>0, A\neq 1$ 时，式(1)有如下的双曲函数解：

$$v_1(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}-2BC\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2(1-A)}H_1+\frac{B}{2(1-A)}\right)^{-1}-2C^2\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2(1-A)}H_1+\frac{B}{2(1-A)}\right)^{-2} \tag{13}$$

$$v_2(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}-\frac{B^2+4C-4AC}{2}H_1^2+\frac{1}{2}B^2 \tag{14}$$

其中

$$H_1=\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)}{C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)+C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)},$$

C_1, C_2 是任意的常数，

$$\xi=\frac{x^\eta}{\eta}+\frac{y^\beta}{\beta}+\frac{z^\gamma}{\gamma}+\left(\frac{3}{2}\mp\frac{B^2+4C-4AC}{2}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

特别地，当 $C_1\neq 0, C_2=0$ 时有

$$v_{11}(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}-2BC\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2(1-A)}\tanh\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)+\frac{B}{2(1-A)}\right)^{-1}-2C^2\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2(1-A)}\tanh\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)+\frac{B}{2(1-A)}\right)^{-2} \tag{15}$$

$$v_{21}(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}-\frac{B^2+4C-4AC}{2}\tanh^2\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)+\frac{1}{2}B^2 \tag{16}$$

当 $C_1=0, C_2\neq 0$ 时有

$$v_{12}(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}-2BC\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2(1-A)}\coth\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)+\frac{B}{2(1-A)}\right)^{-1}-2C^2\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2(1-A)}\coth\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)+\frac{B}{2(1-A)}\right)^{-2} \tag{17}$$

$$v_{22}(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}-\frac{B^2+4C-4AC}{2}\coth^2\left(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi\right)+\frac{1}{2}B^2 \tag{18}$$

情形 2　当 $B^2+4C-4AC<0, A\neq 1$ 时，式(1)有如下的三角函数解：

$$v_3(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}-2BC\left(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2(1-A)}H_2+\frac{B}{2(1-A)}\right)^{-1}-2C^2\left(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2(1-A)}H_2+\frac{B}{2(1-A)}\right)^{-2} \tag{19}$$

$$v_4(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}+\frac{B^2+4C-4AC}{2}H_2^2+\frac{1}{2}B^2 \tag{20}$$

其中

$$H_2=\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi\right)}{C_1\cos\left(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi\right)},$$

C_1, C_2 是任意的常数，

$$\xi=\frac{x^\eta}{\eta}+\frac{y^\beta}{\beta}+\frac{z^\gamma}{\gamma}+\left(\frac{3}{2}\mp\frac{B^2+4C-4AC}{2}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

情形 3　当 $B^2+4C-4AC=0, A\neq 1$ 时，式(1)有如下的有理函数解：

$$v_5(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}-2BC(1-A)\left(\frac{C_1}{C_1\xi+C_2}+\frac{B}{2}\right)^{-1}-$$

$$2C^2\left(1-A\right)^2\left(\frac{C_1}{C_1\xi+C_2}+\frac{B}{2}\right)^{-2} \tag{21}$$

$$v_6(\xi)=\frac{2\omega+3-B^2-8C(A-1)}{6}+2B\left(\frac{C_1}{C_1\xi+C_2}+\frac{B}{2}\right)-2\left(\frac{C_1}{C_1\xi+C_2}+\frac{B}{2}\right)^2 \tag{22}$$

其中

$$\xi=\frac{x^\eta}{\eta}+\frac{y^\beta}{\beta}+\frac{z^\gamma}{\gamma}+\left(\frac{3}{2}\mp\frac{B^2+4C-4AC}{2}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha},$$

C_1,C_2 是任意的常数.

4 结 论

本文在构建(3+1)维非线性分数阶 Jimbo-Miwa 方程的新精确解时为常微分方程的解添加了负指数幂,其中的(G'/G)满足的非线性辅助方程则采用了 $G'G=A(G')^2+BGG'+CG^2$ 的形式. 因此,文中给出的常微分方程解的形式和辅助方程与文献[5,6]有所不同. 事实上,文中所得到的新解在其他文献中没有出现过. 这也说明扩展的(G'/G)-展开法是求解分数阶偏微分方程的一种有效的工具且简单易行.

参考文献:

[1] Aksoy E, Guner O, Bekir A, *et al*. Cevikel. Exact solutions of the (3+1)-dimensional space-time fractional Jimbo-Miwa equation[C]//International Conference of Unmerical Analysis and Applied Mathematics, 2016, 1738.

[2] Jimbo M, Miwa T. Solitons and infinite dimensional Lie algebras [J]. Publ Res I Math Sci, 1983, 19: 943.

[3] 郭婷婷. (3+1)维 Jimbo-Miwa 方程的性质和精确解 [J]. 太原师范学院学报: 自然科学版, 2017, 16: 15.

[4] 熊维玲, 甘桦源. (3+1)维 Jimbo-Miwa 方程的非行波解 [J]. 广西科技大学学报, 2017, 28: 12.

[5] 黄婷, 李德生, 韩园媛. (3+1)维 Jimbo-Miwa 方程新的精确行波解 [J]. 平顶山学报, 2013, 28: 10.

[6] 李自由. (3+1)维 Jimbo-Miwa 方程的精确扭结解孤子解和周期形式解 [J]. 曲靖师范学院学报, 2010, 29: 30.

[7] Chen Y M, Ma S H, Ma Z Y. New exact solutions of a (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa system [J]. Chinese Phys B, 2013, 22: 510.

[8] 雷军, 马松华, 方建平. (3+1)维 Jimbo-Miwa 方程的精确解及局部激发 [J]. 物理学报, 2011, 60: 99.

[9] Wazwaz A M. Multiple-soliton solutions for extended (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equations [J]. Appl Math Lett, 2017, 64: 21.

[10] Mehdipoorad M, Neiramehab A. New soliton solutions to the (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation [J]. Optik, 2015, 126: 4718.

[11] Xu Z H, Chen H L. Cross-link multi-soliton solutions for the (3+1)-D Jimbo-Miwa equation [J]. Int J Numer Method H, 2015, 25: 19.

[12] Zhang X E, Chen Y. Rogue wave and a pair of resonance stripe solitons to a reduced (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation [J]. Commun Nonlinear Sci, 2017, 52: 24.

[13] Korkmaz A. Exact solutions to (3+1) comformable time fractional Jimbo-Miwa, Zakharov-Kuznetsov and modified Zakharov-Kuznetsov equation [J]. Commun Theor Phys, 2017, 67: 479.

[14] Kaplan M, Bekir A. Construction of exact solution to the space-time fractional differential equations via new approach [J]. Optik, 2017, 132: 1.

引用本文格式:

中 文: 熊淑雪, 孙峪怀, 廖红梅, 等. (3+1)维非线性分数阶 Jimbo-Miwa 方程的新精确解 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 213.

英 文: Xiong S X, Sun Y H, Liao H M, *et al*. New exact solution for (3+1) dimensional nonlinear fractional Jimbo-Miwa equation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 213.