doi：10.3969/j. issn. 0490-6756. 2019. 03. 002

求解 BBM 方程的高精度非线性 CN 差分格式

黄妗彤[1]，胡劲松[1]，贾其涛[2]
(1. 西华大学理学院，成都 610039；2. 四川省渠县中学，达州 635200)

摘　要：本文对一类带有齐次边界条件的 BBM 方程的初边值问题进行了数值研究，提出了一个在时间上具有二阶理论精度，在空间上具有四阶理论精度的两层非线性 Crank-Nicolson 差分格式，该格式合理地模拟了原问题的一个守恒性质. 此外，本文还讨论了差分解的存在唯一性，并利用能量方法分析了该格式的二阶收敛性与稳定性. 数值实验表明该方法是可靠的.

关键词：BBM 方程；Crank Nicolson 差分格式；收敛性；稳定性
中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)03-0387-05

High precise nonlinear CN difference scheme for BBM equation

HUANG Jin-Rong[1], *HU Jin-Song*[1], *JIA Qi-Tao*[2]
(1. School of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China;
2. Quxian Middle School of Sichuan Province, Dazhou 635200, China)

Abstract: In this paper, numerical solution for the initial-boundary value problem of BBM equation with homogeneous boundary is considered. A two-level nonlinear Crank-Nicolson difference scheme with second order in time and fourth order in space is proposed. The difference scheme simulates the conservation property of the problem. The existence and uniqueness of the difference solutions are proved. Using the discrete energy method, the stability and convergence are proved. Numerical experiments confirm the theoretical results.

Keywords: BBM equation; Crank Nicolson difference scheme; Convergence; Stability
(2010 MSC 65M60)

1　引　言

本文考虑如下带有非线性扩散项和耗散项的 BBM 方程的初边值问题：

$$u_t - u_{xxt} + u_x - u_{xx} + uu_x = 0,\quad (x,t)\in(x_L,x_R)\times(0,T] \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in[x_L,x_R] \tag{2}$$

$$u(x_L,t)=u(x_R,t)=0,\ t\in[0,T] \tag{3}$$

其中 $u_0(x)$ 是已知光滑的函数. 初边值问题(1)～(3)具有如下守恒量[1]：

$$\boldsymbol{Q}(t)=\int_{x_L}^{x_R} u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{x_L}^{x_R} u_0(x)\mathrm{d}x=\boldsymbol{Q}(0) \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(0)$ 为仅与初始条件有关的常数.

方程(1)是为描述非线性弥散系统中长波的单向传播而提出来的[2]，是对用来描述浅水波损耗现象的 KdV 方程的一个修改. 文献[3,4] 研究了其的解的衰减性，文献[5,6]研究了方程(1)解的存在唯一性及收敛性. 文献[7～15]对 BBM 方程进行了

收稿日期：2018-06-04
基金项目：国家自然科学基金青年基金(11701481)；四川省教育厅重点科研基金(16ZA0167)；西华大学重点科研基金(Z1513324)；四川省应用基础研究项目(2019YJ0387)
作者简介：黄妗彤(1993－)，女，四川三台人，主要研究方向为微分方程数值解.
通讯作者：贾其涛. E-mail：1684017939@qq. com

数值方法研究. 但这些研究一般都只具有二阶理论精度,且都没有模拟守恒量(4).

本文对问题(1)~(3)构造一个理论精度为 $O(\tau^2+h^4)$ 的两层非线性差分格式,该格式合理地模拟了守恒量(4),然后讨论了差分解的存在性和唯一性,并利用离散泛函分析方法[16]给出了格式的收敛性、稳定性的理论证明.

2 差分格式及其守恒律

对区域 $[x_L, x_R]\times[0,T]$ 作网格剖分. 取空间步长 $h=\dfrac{x_R-x_L}{J}$,时间步长为 τ, $x_j=x_L+jh(0\le j\le J)$, $t_n=n\tau(n=0,1,2,\cdots,N, N=\left[\dfrac{T}{\tau}\right])$.

记

$$u_j^n=u(x_j,t_n), U_j^n\approx u(x_j,t_n),$$
$$Z_h^0=\{U=(U_j)\,|\,U_{-1}=U_0=U_J=U_{J+1}=0,\ j=-1,0,\cdots,J,J+1\},$$

用 C 表示与 τ 和 h 无关的一般正常数(即在不同地方可以有不同的取值),并定义如下记号:

$$(U_j^n)_x=\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h},\ (U_j^n)_{\bar{x}}=\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h},$$
$$(U_j^n)_{\hat{x}}=\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h},\ (U_j^n)_{\ddot{x}}=\frac{U_{j+2}^n-U_{j-2}^n}{4h},$$
$$(U_j^n)_t=\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau},\ U_j^{n+\frac{1}{2}}=\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2},$$
$$\langle U^n,V^n\rangle=h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nV_j^n,$$
$$\|U^n\|^2=\langle U^n,U^n\rangle,\ \ \|U^n\|_\infty=\max_{1\le j\le J-1}|U_j^n|.$$

对问题(1)~(3),考虑如下有限差分格式:

$$(U_j^n)_t-\frac{4}{3}(U_j^n)_{x\bar{x}t}+\frac{1}{3}(U_j^n)_{\hat{x}\hat{x}t}+\frac{4}{3}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\frac{1}{3}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}+\varphi(U_j^{n+\frac{1}{2}})-\phi(U_j^{n+\frac{1}{2}})-\frac{4}{3}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{x}}=0,$$
$$j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1 \tag{5}$$
$$U_j^0=u_0(x_j), j=0,1,2,\cdots,J \tag{6}$$
$$U^n\in Z_h^0, n=0,1,2,\cdots,N \tag{7}$$

其中

$$\varphi(U_j^{n+\frac{1}{2}})=\frac{4}{9}\{U_j^{n+\frac{1}{2}}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+[(U_j^{n+\frac{1}{2}})^2]_{\hat{x}}\},$$
$$\phi(U_j^{n+\frac{1}{2}})=\frac{1}{9}\{U_j^{n+\frac{1}{2}}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}+[(U_j^{n+\frac{1}{2}})^2]_{\ddot{x}}\}.$$

定理 2.1 设 $u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 则差分格式(1)~(3)关于以下离散能量守恒:

$$Q^n=h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n=Q^{n-1}=\cdots=Q^0,\quad n=1,2,\cdots,N \tag{8}$$

证明 将(5)式两端乘以 h 后对 j 从 1 到 $J-1$ 求和,由边界条件(7)和分部求和公式[16]有

$$h\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^n)_t=0.$$

然后,对 n 递推可得(8)式.

3 差分解的存在性和先验估计

引理 3.1[17] $\forall U\in Z_h^0$,恒有 $\|U_{\hat{x}}\|^2\le\|U_x\|^2$.

引理 3.2(Brouwer 不动点定理) 设 H 是有限维的内积空间,$g:H\to H$ 是连续算子,且存在一个 $\alpha>0$ 使得任意 $x\in H$, $\|x\|=\alpha$ 时有 $\langle g(x),x\rangle>0$. 则存在一个 $x^*\in H$ 使得 $g(x^*)=0$, $\|x^*\|=\alpha$.

定理 3.3 存在 $U^n\in Z_h^0$ 满足差分格式(5)~(7)($1\le n\le N$).

证明 用数学归纳法. 假设当 $n\le N-1$ 时存在 $U^0,U^1,\cdots,U^n$ 满足差分格式(5)~(7),下面证明存在 U^{n+1} 满足差分格式(5)~(7). 定义 Z_h^0 上的算子 g 满足

$$g(v)=2v-2U^n-\frac{8}{3}v_{x\bar{x}}+\frac{8}{3}U_{x\bar{x}}^n+\frac{2}{3}v_{\hat{x}\hat{x}}-\frac{2}{3}U_{\hat{x}\hat{x}}^n+\frac{4}{3}\tau v_{\hat{x}}-\frac{1}{3}\tau v_{\ddot{x}}+\tau\varphi(v)-\tau\phi(v)-\frac{4}{3}\tau v_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}\tau v_{\hat{x}\hat{x}} \tag{9}$$

将(9)式与 v 作内积,由分部求和公式[16]有

$$\langle v_{\hat{x}},v\rangle=0,\langle v_{\ddot{x}},v\rangle=0 \tag{10}$$

$$\langle\phi(v),v\rangle=\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(v_j)^2(v_j)_{\hat{x}}+\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}[(v_j)^2]_{\hat{x}}v_j=\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(v_j)^2(v_j)_{\hat{x}}-\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(v_j)^2(v)_{\hat{x}}=0 \tag{11}$$

$$\langle\varphi(v),v\rangle=\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(v_j)^2(v_j)_{\ddot{x}}+\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}[(v_j)^2]_{\ddot{x}}v_j=\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(v_j)^2(v_j)_{\ddot{x}}-\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(v_j)^2(v_j)_{\ddot{x}}=0 \tag{12}$$

于是，由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 3.1 得

$$\begin{aligned}\langle g(v),v\rangle=&2\|v\|^2-2\langle U^n,v\rangle+\\&\frac{8}{3}\|v_x\|^2-\frac{8}{3}\langle U_x^n,v_x\rangle-\frac{2}{3}\|v_{\hat{x}}\|^2+\\&\frac{2}{3}\langle U_{\hat{x}}^n,v_{\hat{x}}\rangle+\frac{4\tau}{3}\|v_x\|^2-\frac{\tau}{3}\|v_{\hat{x}}\|^2\geq\\&2\|v\|^2-(\|U^n\|^2+\|v\|^2)+\\&\frac{8}{3}\|v_x\|^2-\frac{4}{3}(\|U_x^n\|^2+\|v_x\|^2)-\\&\frac{2}{3}\|v_{\hat{x}}\|^2-\frac{1}{3}(\|U_{\hat{x}}^n\|^2+\|v_{\hat{x}}\|^2)\geq\\&\|v\|^2-\|U^n\|^2+\frac{1}{3}\|v_x\|^2-\\&\frac{4}{3}\|U_x^n\|^2-\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^n\|^2\geq\\&\|v\|^2-(\|U^n\|^2+\frac{4}{3}\|U_x^n\|^2+\\&\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^n\|^2).\end{aligned}$$

因此，只要取 $v\in Z_h^0$，

$$\|v\|^2=\|U^n\|^2+\frac{4}{3}\|U_x^n\|^2+\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^n\|^2+1,$$

就有 $\langle g(v),v\rangle>0$ 成立. 由引理 3.2 可知，存在 $v^*\in Z_h^0$ 使得 $g(v^*)=0$. 令 $U^{n+1}=2v^*-U^n$. U^{n+1} 即为差分格式(5)～(7)的解. 证毕.

定理 3.4　设 $u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 则差分格式(5)～(7)的解满足

$$\|U^n\|\leq C,\ \|U_x^n\|\leq C,\ \|U^n\|_\infty\leq C,\ n=1,2,\cdots,N.$$

证明　将(5)式与 $2U^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积，类似(10)～(12)式有

$$\langle U_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}},U^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0,\ \langle U_{\ddot{x}}^{n+\frac{1}{2}},U^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0,$$

$$\langle\phi(U^{n+\frac{1}{2}}),U^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0,\ \langle\varphi(U^{n+\frac{1}{2}}),U^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0.$$

于是，由引理 3.1 得

$$\begin{aligned}&\|U^n\|_t^2+\frac{4}{3}\|U_x^n\|_t^2-\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^n\|_t^2=\\&-\frac{8}{3}\|U_x^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{2}{3}\|U_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2\leq\\&-\|U_x^{n+\frac{1}{2}}\|^2\leq0\end{aligned}\tag{13}$$

将(13)式对 n 递推可得

$$\begin{aligned}&\|U^n\|^2+\frac{4}{3}\|U_x^n\|^2-\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^n\|^2<\cdots<\\&\|U^0\|^2+\frac{4}{3}\|U_x^0\|^2-\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^0\|^2=C.\end{aligned}$$

再由引理 3.1 得

$$\|U^n\|^2+\|U_x^n\|^2\leq\|U^n\|^2+\frac{4}{3}\|U_x^n\|^2-\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^n\|^2=C,$$

即 $\|U^n\|\leq C$，$\|U_x^n\|\leq C$. 再由离散的 Sobolev 不等式[16]得 $\|U^n\|_\infty\leq C$. 证毕.

4　差分格式的收敛性、稳定性及差分解的唯一性

差分格式(5)～(7)的截断误差定义如下：

$$\begin{aligned}r_j^n=&(u_j^n)_t-\frac{4}{3}(u_j^n)_{x\bar{x}t}+\frac{1}{3}(u_j^n)_{\hat{x}\hat{x}t}+\\&\frac{4}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\frac{1}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}+\\&\varphi(u_j^{n+\frac{1}{2}})-\phi(u_j^{n+\frac{1}{2}})-\\&\frac{4}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{x}}\end{aligned}\tag{14}$$

由 Taylor 展开可知，当 $h,\tau\to0$ 时，$|r_j^n|=O(\tau^2+h^4)$.

引理 4.1[10]　设 $u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 则初边值问题(1)～(3)的解满足

$$\|u\|_{L_2}\leq C,\ \|u_x\|_{L_2}\leq C,\ \|u\|_{L_\infty}\leq C.$$

定理 4.2　设 $u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 则差分格式(5)～(7)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛到初边值问题(1)～(3)的解，且收敛阶为 $O(\tau^2+h^4)$.

证明　记 $e_j^n=u_j^n-U_j^n$. 由(14)式减去(5)式得

$$\begin{aligned}r_j^n=&(e_j^n)_t-\frac{4}{3}(e_j^n)_{x\bar{x}t}+\frac{1}{3}(e_j^n)_{\hat{x}\hat{x}t}+\\&\frac{4}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\frac{1}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}+\\&\varphi(u_j^{n+\frac{1}{2}})-\varphi(u_j^{n+\frac{1}{2}})+\varphi(u_j^{n+\frac{1}{2}})-\varphi(u_j^{n+\frac{1}{2}})-\\&\frac{4}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{x}}\end{aligned}\tag{15}$$

将(15)式两端与 $2e^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积，类似(10)式有

$$\langle e_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0,\langle e_{\ddot{x}}^{n+\frac{1}{2}},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0.$$

于是

$$\begin{aligned}\langle r^n,2e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=&\|e^n\|_t^2+\frac{4}{3}\|e_x^n\|_t^2-\\&\frac{1}{3}\|e_{\hat{x}}^n\|_t^2+\frac{8}{3}\|e_x^{n+\frac{1}{2}}\|^2-\frac{2}{3}\|e_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}\|+\\&2\langle\varphi(u^{n+\frac{1}{2}})-\varphi(U^{n+\frac{1}{2}}),e^{n+\frac{1}{2}}\rangle-\\&2\langle\phi(u^{n+\frac{1}{2}})-\phi(U^{n+\frac{1}{2}}),e^{n+\frac{1}{2}}\rangle\end{aligned}\tag{16}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，引理 3.1，定理 3.3 和引理 4.1 有

$$\begin{aligned}&\langle\varphi(u^{n+\frac{1}{2}})-\varphi(U^{n+\frac{1}{2}}),e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=\\&\frac{4h}{9}\sum_{j=1}^{J-1}[u_j^{n+\frac{1}{2}}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+e_j^{n+\frac{1}{2}}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}]e_j^{n+\frac{1}{2}}-\end{aligned}$$

$$\frac{4h}{9}\sum_{j=1}^{J-1}[e_j^{n+\frac{1}{2}}(u_j^{n+\frac{1}{2}}+U_j^{n+\frac{1}{2}})](e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}\le C(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2) \tag{17}$$

$$\langle\phi(u^{n+\frac{1}{2}})-\phi(U^{n+\frac{1}{2}}),e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=\frac{h}{9}\sum_{j=1}^{J-1}[u_j^{n+\frac{1}{2}}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}+e_j^{n+\frac{1}{2}}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}]e_j^{n+\frac{1}{2}}-\frac{h}{9}\sum_{j=1}^{J-1}[e_j^{n+\frac{1}{2}}(u_j^{n+\frac{1}{2}}+U_j^{n+\frac{1}{2}})](e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}\le C(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2) \tag{18}$$

$$\langle r^n,2e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=\langle r^n,e^{n+1}+e^n\rangle\le\|r^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2 \tag{19}$$

将(17)～(19)式代入(16)式,整理得

$$\|e^n\|_t^2+\frac{4}{3}\|e_x^n\|_t^2-\frac{1}{3}\|e_{\bar{x}}^n\|_t^2\le\|r^n\|^2+C(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2) \tag{20}$$

令 $B^n=\|e^n\|^2+\frac{4}{3}\|e_x^n\|^2-\frac{1}{3}\|e_{\bar{x}}^n\|^2$. 对(20)式从 0 到 $n-1$ 递推求和得

$$B^n\le B^0+C\tau\sum_{l=0}^{n-1}\|r^l\|^2+C\tau\sum_{l=0}^{n}(\|e^l\|^2+\|e_x^l\|^2) \tag{21}$$

又

$$\tau\sum_{l=0}^{n-1}\|r^l\|^2\le n\tau\max_{0\le l\le n-1}\|r^l\|^2\le T\cdot O(\tau^2+h^4)^2,\ B^0=O(\tau^2+h^4)^2,$$

再由引理 3.1 知(21)式即为

$$\|e^n\|^2+\|e_x^n\|^2\le B^n\le O(\tau^2+h^4)^2+C\tau\sum_{l=0}^{n}(\|e^l\|^2+\|e_x^l\|^2).$$

由离散 Gronwall 不等式[16]可得

$$\|e^n\|\le O(\tau^2+h^4),\ \|e_x^n\|\le O(\tau^2+h^4).$$

最后由离散 Sobolev 不等式[16]有

$$\|e^n\|_\infty\le O(\tau^2+h^4).$$

证毕.

与定理 4.2 类似,可以证明

定理 4.3 在定理 4.2 的条件下,差分格式(5)～(7)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 关于初值无条件稳定.

定理 4.4 差分格式(5)～(7)的解是唯一的.

5 数值实验

在 $t=0$ 时耗散还没有产生,所以在数值实验中我们把问题(1)～(3)中的初值函数取为 RLW 方程的初值函数[17] $u(x,0)=\mathrm{sech}^2(\frac{1}{4}x)$. 由于不知道方程(1)的精确解,用类似文献[8,9]中的处理方法将细网格 ($\tau=h=\frac{1}{160}$)上的数值解作为精确解来估计误差. 固定 $x_L=-20$, $x_R=40$, $T=10$. 就 τ 和 h 的不同取值,格式(5)～(7)在几个不同时刻的误差及其对理论精度的检验见表 1、2,对守恒量(4)的数值模拟见表 3.

表 1 格式在几个不同时刻的误差

Tab. 1 The error of the scheme at various time

	$\tau=0.4,h=0.2$		$\tau=0.1,h=0.1$		$\tau=0.025,h=0.05$	
	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$
$t=2$	4.86340e−3	2.51329e−3	3.04539e−4	1.57245e−4	1.79266e−5	9.25328e−6
$t=4$	6.18643e−3	2.98140e−3	3.85959e−4	1.85613e−4	2.27087e−5	1.09193e−5
$t=6$	6.35287e−3	2.87435e−3	3.95572e−4	1.78572e−4	2.32690e−5	1.05060e−5
$t=8$	6.13166e−3	2.63135e−3	3.81366e−4	1.63454e−4	2.24294e−5	9.61353e−6
$t=10$	5.78752e−3	2.63135e−3	3.59701e−4	1.47580e−4	2.11539e−5	8.68019e−6

表 2 对格式的理论精度 $O(\tau^2+h^4)$ 的数值检验

Tab. 2 The numerical example of the scheme on theoretical precision $O(\tau^2+h^4)$

	$\|e^n(h,\tau)\|/\|e^{4n}(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4})\|$			$\|e^n(h,\tau)\|_\infty/\|e^{4n}(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4})\|_\infty$		
	$\tau=0.4\ h=0.2$	$\tau=0.1\ h=0.1$	$\tau=0.025\ h=0.05$	$\tau=0.4\ h=0.2$	$\tau=0.1\ h=0.1$	$\tau=0.025\ h=0.05$
$t=2$	—	15.9697	16.9881	—	15.9833	16.9935
$t=4$	—	16.0287	16.9961	—	16.0624	16.9986
$t=6$	—	16.0599	17.0000	—	16.0963	16.9971
$t=8$	—	16.0781	17.0030	—	16.0984	17.0025
$t=10$	—	16.0898	17.0040	—	16.1140	17.0020

表 3　两层格式对守恒量(4)的数值模拟

Tab. 3　Numerial simulations on the conservation invariant (4) of the scheme

	$\tau=0.4$，$h=0.2$	$\tau=0.1$，$h=0.1$	$\tau=0.025$，$h=0.05$
$t=0$	7.9996546571	7.9996458044	7.9996413214
$t=2$	7.9994786108	7.9994501907	7.9994433030
$t=4$	7.9994775052	7.9994490928	7.9994422018
$t=6$	7.9994688421	7.9994409614	7.9994341161
$t=8$	7.9994151067	7.9993903805	7.9993838140
$t=10$	7.9991353239	7.9991242579	7.9991189636

从数值算例可以看出，本文对初边值问题(1)～(3)提出的差分格式(5)～(7)是有效的.

参考文献：

[1] 李玉. 几类非线性发展方程不变解和守恒律的研究[D]. 聊城：聊城大学，2017.

[2] Benjamin T B，Bona J L，Mahony J J. Model equations for long waves nonlinear dispersive system [J]. Phil Trans R Soc London，1972，A272：47.

[3] Mei M. Large-time behavior of solution for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers eqation [J]. Nonlinar Anal-Real，1998，4：699.

[4] Mei M. decay rates of solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers eqation [J]. Diff Equat +，1999，158：314.

[5] Zhao H J，Xuan B J. Existence and convegence of solutions for generalized BBM-Burgers eqation with dissipative terms [J]. Nonlinear Anal-Real，1997，28：1835.

[6] Wang B X. Attractors and approximate inertial manifolds for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation [J]. Math Method Appl Sci，1997，20：189.

[7] 胡劲松，王玉兰. Benjamin-Bona-Mahony 方程的拟紧致差分算法 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35：64.

[8] 胡劲松. 求解 Benjamin-Bona-Mahony 方程的拟紧致差分格式 [J]. 云南大学学报：自然科学版，2010，32：1.

[9] Che H T，Pan X T，Zhang L M，*et al*. Numerical analysis of a linear-implicit average scheme for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation [J]. J Appl Math 2012，2012：308410.

[10] 张岩，胡劲松，胡兵，闵心畅，等. Benjamin-Bona-Mahony 方程的平均隐式差分格式 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2012，49：955.

[11] 覃燕梅，孔花，罗丹，等. BBM 方程的全离散混合有限元方法 [J]. 应用数学学报，2015，38：597.

[12] 闫静叶，孙建强，赵鑫. BBM 方程的多辛整体保能量方法 [J]. 湖北大学学报：自然科学版，2016，38：310.

[13] 杨怀君. 非线性 BBM 方程的有限元分析 [D]. 郑州：郑州大学，2015.

[14] Lyu P，Vong S. A linearized second-order finite difference scheme for time fractional generalized BBM equation [J]. Appl Math Lett，2018，78：16.

[15] Can L. Linearized difference schemes for a BBM equation with a fractional nonlocal viscous term [J]. Appl Math Comput，2017，311：240.

[16] Zhou Y L. Application of discrete functional analysis to the finite difference methods [M]. Beijing：International Academic Publishers，1990.

[17] Zheng K L，Hu J S. High-order consrevative Crank-Nicolson scheme for regularized long wave equation [J]. Adv Differ Equ，2013，1：287.

引用本文格式：

中　文：黄妗彤，胡劲松，贾其涛. 求解 BBM 方程的高精度非线性 CN 差分格式 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：387.

英　文：Huang J R，Hu J S，Jia Q T. High precise nonlinear CN difference scheme for BBM equation [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2019，56：387.