doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.03.007

非线性 m 点边值问题正解的新结果

达佳丽，寇　磊，王　婷
(西北师范大学知行学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究非线性 m 点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(u)=0, t\in(0,1) \\ u'(0)=0, u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i) \end{cases}$$

正解的存在性. 利用 Leray-Schauder 不动点定理，本文获得了问题正解的存在性条件. 这个条件弱化了已有的相关结果.

关键词：非线性 m 点边值问题；正解；Leray-Schauder 不动点定理
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)03-0419-04

New results for positive solutions of nonlinear *m*-point boundary value problem

DA Jia-Li, *KOU Lei*, *WANG Ting*
(Zhi Xing College of Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we investigate the existence of positive solutions for the following second-order nonlinear m-point boundary value problem:

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u'(0)=0, u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i). \end{cases}$$

By using the Leray-Schauder fixed point theorem, we give some sufficient conditions for the existence of positive solutions, which improve the known results.

Keywords: Nonlinear m-point boundary value problem; Positive solution; Leray-Schauder fixed point theorem
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

2002 年，马和代[1]研究了非线性 m 点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u'(0)=0, u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $\alpha_i\geq 0, i=1,2,\cdots,m-2, 0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$. 假定

(A_1) $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$；

(A_2) $a\in C([0,1],[0,\infty))$，并且存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $a(x_0)>0$.

令 $f_0=\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{f(u)}{u}, f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}$. 文献[1]得到如下结果：

定理 A　假设(A_1)，(A_2)成立，且 $\alpha_i\geq 0$，0

收稿日期：2018-07-13
基金项目：西北师范大学知行学院 2017 年校级科学研究项目(2017001KA)；甘肃省高等学校科研项目(2015B-203)
作者简介：达佳丽(1990－)，女，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：335855313@qq.com

$<\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i<1$. 如果 f 满足

(i)超线性条件：$f_0=0$ 和 $f_\infty=\infty$,

或

(ii)次线性条件：$f_0=\infty$和 $f_\infty=0$,

则边值问题(1)在[0,1]上至少有一个正解.

本文将利用 Leray-Schauder 不动点定理来研究边值问题(1)正解的存在性[1-8]. 所得结果弱化了定理 A 的条件.

2 预备知识

对边值问题

$$\begin{cases}u''(t)+y(t)=0, t\in(0,1),\\ u'(0)=0, u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i)\end{cases}\tag{2}$$

我们有

引理 2.1[1] 设 $\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\neq 1$. 则对 $y\in C[0,1]$, 边值问题(2)式有唯一解

$$u(t)=-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s.$$

引理 2.2[1] 设 $\alpha_i\geq 0, 0\leqslant\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i<1$. 如果 $y\in C[0,1]$且 $y\geq 0$,则边值问题(2)式的唯一解 $u(t)$ 满足 $u(t)\geq 0, t\in[0,1]$.

引理 2.3[1] 设 $\alpha_i\geq 0, 0<\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i<1$. 如果 $y\in C[0,1], y\geq 0$,则边值问题(2)式的唯一解 $u(t)$ 满足 $\min_{t\in[0,1]}u(t)\geq\gamma\|u\|$,其中

$$\gamma=\frac{\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i(1-\xi_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\xi_i}.$$

对任意 $u(t)\in C[0,1]$, 考虑边值问题

$$\begin{cases}u''(t)+a(t)f(u(t))=0, t\in(0,1),\\ u'(0)=0, u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i)\end{cases}\tag{3}$$

根据引理 2.1, 我们知道边值问题(3)式有唯一解

$$u(t)=-\int_0^t(t-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s.$$

定义算子

$$Tu(t)=-\int_0^t(t-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s.$$

显然, $u(t)$是边值问题(3)式的解当且仅当 $u(t)$是算子 T 的不动点.

引理 2.4[2] (Leray-Schauder 不动点定理) 令 Ω 是 Banach 空间 X 的凸子集, $0\in\Omega$, $T:\Omega\to\Omega$ 是全连续算子. 则

(i) T 至少有一个不动点,

或

(ii) $\{x\in C\mid x=\lambda Tx, 0<\lambda<1\}$是无界的.

3 主要结果

在本文中, 我们获得非线性 m 点边值问题(1)式正解的存在性. 令

$$X=C[0,1], \beta=\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s.$$

定理 3.1 假设(A_1),(A_2)成立. 如果 $f_0=0$, 则边值问题(1)式至少有一个正解.

证明 选取 $\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon\leqslant\frac{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}{\beta}$. 由于 $f_0=0$,则存在常数 $B>0$,使得对 $0<u\leqslant B$, $f(u)<\varepsilon u$. 令

$$\Omega=\{u\mid u\in C[0,1], u\geq 0, \|u\|\leqslant B, \min_{t\in[0,1]}u(t)\geq\gamma\|u\|\}.$$

则 Ω 是 X 的凸子集. 对任意 $u\in\Omega$,根据引理 2.2 和引理 2.3, 我们有

$$Tu(t)\geq 0, \min_{t\in[0,1]}Tu(t)\geq\gamma\|Tu\|.$$

另一方面

$$Tu(t)\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)a(s)u(s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\|u\|\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\|u\|\leqslant B.$$

这样，$\|Tu\|\leqslant B$. 因此 $T\Omega\subset\Omega$, $T:\Omega\to\Omega$ 是全连续的.

对任意 $u\in\Omega$ 且 $u=\lambda Tu$, $0<\lambda<1$,我们有

$u(t)=\lambda Tu(t)<Tu(t)\leqslant B.$

故 $\|u\|\leqslant B$,即 $\{u\in\Omega\,|\,u=\lambda Tu, 0<\lambda<1\}$ 是有界的. 根据引理 2.4，我们知道算子 T 至少有一个不动点. 这样边值问题(1)式至少有一个正解. 证毕.

注 1　定理 3.1 的条件比定理 A[1]弱化了，条件 $f_\infty=\infty$ 不需要了.

定理 3.2　假设(A_1),(A_2)成立. 如果 $f_\infty=0$,则边值问题(1)式至少有一个正解.

证明　选取 $\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon\leqslant\dfrac{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}{2\beta}$. 由于 $f_\infty=0$，则存在常数 $N>0$,使得对任何 $u>N$, $f(u)\leqslant\varepsilon u$. 选择

$$B\geq N+1+\frac{2\beta}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\max_{0\leqslant u\leqslant N}f(u).$$

令

$$\Omega=\{u\,|\,u\in C[0,1], u\geq0, \|u\|\leqslant B, \min_{t\in[0,1]}u(t)\geq\gamma\|u\|\}.$$

则 Ω 是 X 的凸子集. 对任意 $u\in\Omega$,根据引理 2.2 和引理 2.3，我们有

$$Tu(t)\geq0,\ \min_{t\in[0,1]}Tu(t)\geq\gamma\|Tu\|.$$

另一方面

$$Tu(t)\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\Big(\int_{J_1=\{s\in[0,1],u(s)>N\}}(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s+$$
$$\int_{J_2=\{s\in[0,1],u(s)\leqslant N\}}(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\Big)\leqslant\frac{\varepsilon\|u\|}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{\max_{0\leqslant u\leqslant N}f(u(s))}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\varepsilon B}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\beta+\frac{\beta}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\max_{0\leqslant u\leqslant N}f(u)\leqslant\frac{B}{2}+\frac{1}{2}B=B.$$

这样，$\|Tu\|\leqslant B$. 因此 $T\Omega\subset\Omega$, $T:\Omega\to\Omega$ 是全连续的.

对任意 $u\in\Omega$ 且 $u=\lambda Tu$, $0<\lambda<1$,我们有 $u(t)=\lambda Tu(t)<Tu(t)\leqslant B$,故 $\|u\|\leqslant B$. 从而 $\{u\in\Omega\,|\,u=\lambda Tu, 0<\lambda<1\}$ 是有界的. 根据引理 2.4，我们知道算子 T 至少有一个不动点. 这样边值问题(1)式至少有一个正解. 证毕.

注 2　定理 3.2 的条件比定理 A[1]弱化了，条件 $f_0=\infty$ 不需要了.

定理 3.3　假设(A_1),(A_2)成立，如果存在常数 $\rho_1>0$,使得 $f(u)\leqslant\dfrac{\rho_1(1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i)}{\beta}$ 对任意 $0<u\leqslant\rho_1$ 成立,则边值问题(1)式至少有一个正解.

证明　令

$$\Omega=\{u\,|\,u\in C[0,1], u\geq0, \|u\|\leqslant\rho_1, \min_{t\in[0,1]}u(t)\geq\gamma\|u\|\}.$$

则 Ω 是 X 的凸子集. 对任意 $u\in\Omega$,根据引理 2.2 和引理 2.3 有

$$Tu(t)\geq0,\ \min_{t\in[0,1]}Tu(t)\geq\gamma\|Tu\|.$$

另一方面

$$Tu(t)\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\rho_1.$$

因此 $\|Tu\|\leqslant\rho_1$,从而 $T\Omega\subset\Omega$, $T:\Omega\to\Omega$ 是全连续.

对任意 $u\in\Omega$ 且 $u=\lambda Tu$, $0<\lambda<1$,我们有 $u(t)=\lambda Tu(t)<Tu(t)\leqslant\rho_1$, $\|u\|\leqslant\rho_1$. 所以 $\{u\in\Omega\,|\,u=\lambda Tu, 0<\lambda<1\}$ 是有界的. 根据引理 2.4，我们知道算子 T 至少有一个不动点，这样边值问题(1)式至少有一个正解. 证毕.

定理 3.4　假设(A_1),(A_2)成立. 如果存在常数 $\rho_2>0$,使得

$$f(u)\leqslant\frac{\rho_2(1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i)}{\beta}$$ 对任意 $u\geq\rho_2$ 成立,则

边值问题(1)式至少有一个正解.

证明 取 $d>1+\rho_2+\dfrac{\beta}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\max\limits_{0\leqslant u\leqslant\rho_2}f(u)$.

令

$$\Omega=\{u\,|\,u\in C[0,1],u\geq 0,\ \|u\|\leqslant d,\ \min_{t\in[0,1]}u(t)\geq\gamma\|u\|\}.$$

则 Ω 是 X 的凸子集. 对任意 $u\in\Omega$,根据引理 2.2 和引理 2.3 有

$$Tu(t)\geq 0\text{ 且 }\min_{t\in[0,1]}Tu(t)\geq\gamma\|Tu\|.$$

另一方面

$$Tu(t)\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\left(\int_{J_1=\{s\in[0,1],u(s)>\rho_2\}}(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\int_{J_2=\{s\in[0,1],u(s)\leqslant\rho_2\}}(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$\frac{\rho_2(1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i)}{(1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i)\beta}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s+\frac{\beta}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\max_{0\leqslant u\leqslant\rho_2}f(u)=$$

$$\rho_2+\frac{\beta}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}\max_{0\leqslant u\leqslant\rho_2}f(u)<d.$$

因此 $\|Tu\|\leqslant d$,$T\Omega\subset\Omega$,$T:\Omega\to\Omega$ 是全连续.

对任意 $u\in\Omega$ 且 $u=\lambda Tu$,$0<\lambda<1$,我们有 $u(t)=\lambda Tu(t)<Tu(t)\leqslant d$,$\|u\|\leqslant d$. 所以$\{u\in\Omega\,|\,u=\lambda Tu,0<\lambda<1\}$是有界的. 根据引理 2.4,我们知道算子 T 至少有一个不动点,这样边值问题(1)式至少有一个正解. 证毕.

参考文献:

[1] 马巧珍,代祖华. 非线性 m 点边值问题正解的存在性[J]. 西北师范大学学报:自然科学版,2002,38:4.

[2] Zhi J Y. New results of positive solutions for second-order nonlinear three-point integral boundary value problems [J]. Nonlinear Sci Appl, 2015, 8: 93.

[3] Du Z J, Ge W G, Li X J. Existence of solutions for a class of third-order nonlinear boundary value problems [J]. Math Anal Appl, 2004, 294: 104.

[4] Feng Y Q, Liu S Y. Solvability of a third-order two-point boundary value problem [J]. Appl Math Letters, 2005,18: 1034.

[5] Graef J R, Qian C, Yang B. A three point boundary value problem for nonlinear fourth order differential equations [J]. Math Anal Appl, 2003, 287: 217.

[6] Graef J R, Yang B. Positive solutions to a multi-point higher order boundary value problem [J]. Math Anal Appl, 2006, 316: 409.

[7] Granas A, Dugundji J. Fixed point theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[8] Avery R I, Anderson D R. Fixed point theorem of cone espansion and compression of functional type [J]. J Diff Equat Appl, 2002, 8: 1073.

引用本文格式:

中 文:达佳丽,寇磊,王婷. 非线性 m 点边值问题正解的新结果[J]. 四川大学学报:自然科学版,2019,56:419.

英 文:Da J L, Kou L, Wang T. New results for positive solutions of nonlinear m-point boundary value problem [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 419.