doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.05.005

Benjamin-Bona-Mahony 方程的一个高精度线性差分格式

张　虹，王　希，胡劲松
(西华大学理学院，成都 610039)

摘　要：本文对一类带有齐次边界条件的 Benjamin-Bona-Mahony 方程的初边值问题进行了数值研究，提出了一个理论精度为 $O(\tau^2+h^4)$ 的三层线性差分格式，并利用能量方法分析了该格式的收敛性与稳定性. 该格式合理地模拟了原问题的一个守恒性质. 数值实验表明该方法是可靠的.

关键词：Benjamin-Bona-Mahony 方程；线性差分格式；收敛性；稳定性
中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)05-0813-06

High precise linearized difference scheme for Benjamin-Bona-Mahony equation

ZHANG Hong, *WANG Xi*, *HU Jin-Song*
(College of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: In this paper, numerical solution for the initial-boundary value problem of Benjamin-Bona-Mahony equation under homogeneous boundary is considered. A linearized three-level difference scheme is introduced. The difference scheme simulates a conservative quantity of the problem. Furthermore, convergence and stability of the difference scheme are proved by energy method. Numerical experiments indicate the reliability of this method.

Keywords: Benjamin-Bona-Mahony equation; Linearized difference scheme; Convergence; Stability
(2010 MSC 65M60)

1　引　言

在进行非线性扩散波的研究时，为了考虑非线性波在传播中的耗散原理，人们提出了 Benjamin-Bona-Mahony(BBM)方程[1]

$$u_t-u_{xxt}+u_x-u_{xx}+uu_x=0 \tag{1}$$

BBM 方程因其能描述大量的物理现象，如浅水波和离子波等而占有重要的地位. 它可被视为用于描述浅水波损耗现象的 KdV 方程的一个修改，并能很好地模拟 KdV 方程的几乎所有应用. 因此，对这类问题的研究有重要的理论价值. 文献[2,3]研究了其的解的衰减性，文献[4,5]研究了方程(1)解的存在唯一性及收敛性. 本文考虑如下带有非线性扩散项和耗散项的 BBM 方程的初边值问题：

$$u_t-u_{xxt}+u_x-u_{xx}+uu_x=0,\quad (x,t)\in(x_L,x_R)\times(0,T] \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in[x_L,x_R] \tag{3}$$

$$u(x_L,t)=u(x_R,t)=0,t\in[0,T] \tag{4}$$

其中 $u_0(x)$是已知光滑的函数. 初边值问题(2)～(4)具有如下守恒量[6]：

收稿日期：2018-09-26
基金项目：四川省教育厅重点科研基金(16ZA0167)；西华大学重点科研基金(Z1513324)；国家自然科学基金青年基金(11701481)；四川省应用基础项目(2019YJ0387)；西华大学研究生创新基金(ycjj2019098)
作者简介：张虹(1994－)，女，四川资阳人，主要研究方向为微分方程数值解. E-mail：1216463413@qq.com
通讯作者：胡劲松. E-mail：hjs888hjs@163.com

$$Q(t)=\int_{x_L}^{x_R} u(x,t)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{x_L}^{x_R} u_0(x)\mathrm{d}x=Q(0) \tag{5}$$

其中 $Q(0)$ 为仅与初始条件有关的常数.

值得注意的是,文献[7-15]对 BBM 方程进行了数值方法研究,但一般都只具有二阶理论精度,且都没有模拟守恒量(5). 此外,虽然文献[16]对问题(2)~(4)提出了一个理论精度为 $O(\tau^2+h^4)$ 的两层非线性差分格式,但数值求解需要非线性迭代[16-18],耗时较多. 本文在保持理论精度为 $O(\tau^2+h^4)$ 的前提下对问题(2)~(4)构造了一个三层线性差分格式,格式合理地模拟了守恒量(5),并利用离散泛函分析方法[19]给出了格式的收敛性、稳定性的证明.

2 差分格式及其守恒律

对区域 $[x_L,x_R]\times[0,T]$ 作网格剖分:取空间步长 $h=\dfrac{x_R-x_L}{J}$,时间步长为 τ, $x_j=x_L+jh$ $(0\leqslant j\leqslant J)$, $t_n=n\tau(n=0,1,2,\cdots,N,N=\left[\dfrac{T}{\tau}\right])$. 记 $u_j^n=u(x_j,t_n)$, $U_j^n\approx u(x_j,t_n)$ 和 $Z_h^0=\{U=(U_j)\,|\,U_{-1}=U_0=U_J=U_{J+1}=0,j=-1,0,\cdots,J,J+1\}$. 用 C 表示与 τ 和 h 无关的一般正常数(即在不同地方可以有不同的取值),并定义如下记号:

$$(U_j^n)_x=\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h},\quad (U_j^n)_{\bar{x}}=\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h},$$
$$(U_j^n)_{\hat{x}}=\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h},\quad (U_j^n)_{\ddot{x}}=\frac{U_{j+2}^n-U_{j-2}^n}{4h},$$
$$(U_j^n)_{\hat{t}}=\frac{U_j^{n+1}-U_j^{n-1}}{2\tau},\quad \bar{U}_j^n=\frac{U_j^{n+1}+U_j^{n-1}}{2},$$
$$\langle U^n,V^n\rangle=h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nV_j^n,\quad \|U^n\|^2=\langle U^n,U^n\rangle,$$
$$\|U^n\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant J-1}|U_j^n|.$$

对问题(2)~(4),考虑如下有限差分格式:

$$(U_j^n)_{\hat{t}}-\frac{4}{3}(U_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}}+\frac{1}{3}(U_j^n)_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}+\frac{4}{3}(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}-\frac{1}{3}(\bar{U}_j^n)_{\ddot{x}}-\frac{4}{3}(\bar{U}_j^n)_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}+\psi(U_j^n,\bar{U}_j^n)-\xi(U_j^n,\bar{U}_j^n)=0,$$
$$j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1 \tag{6}$$
$$U_j^0=u_0(x_j),\ j=0,1,2,\cdots,J \tag{7}$$
$$U_j^1-\frac{4}{3}(U_j^1)_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(U_j^1)_{\hat{x}\hat{x}}=u_0(x_j)-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_j)-\tau\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_j)+\tau\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_j)-\tau u_0(x_j)\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_j),$$
$$j=1,2,\cdots,J-1 \tag{8}$$
$$U^n\in Z_h^0,\ n=0,1,2,\cdots,N \tag{9}$$

其中

$$\psi(U_j^n,\bar{U}_j^n)=\frac{4}{9}[U_j^n(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}+(U_j^n\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}],$$
$$\xi(U_j^n,\bar{U}_j^n)=\frac{1}{9}[U_j^n(\bar{U}_j^n)_{\ddot{x}}+(U_j^n\bar{U}_j^n)_{\ddot{x}}].$$

定理 2.1 差分格式(6)~(9)关于以下离散能量是守恒的:

$$Q^n=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^{n+1}+U_j^n)+\frac{2h}{9}\tau\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}-\frac{h}{18}\tau\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\ddot{x}}=Q^{n-1}=\cdots=Q^0 \tag{10}$$

其中 $n=1,2,\cdots,N-1$.

证明 将(6)式两端乘以 h 后对 j 从1到 $J-1$ 求和,由边界条件(3)式和分部求和公式[19]有

$$h\sum_{j=1}^{J-1}\frac{(U_j^{n+1}-U_j^{n-1})}{2\tau}+\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}-\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(\bar{U}_j^n)_{\ddot{x}}=0 \tag{11}$$

$$h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n-1})_{\hat{x}}=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^{n-1}(U_j^n)_{\hat{x}} \tag{12}$$

$$h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(\bar{U}_j^n)_{\ddot{x}}=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\ddot{x}}+\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n-1})_{\ddot{x}}=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\ddot{x}}-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^{n-1}(U_j^n)_{\ddot{x}} \tag{13}$$

将(12)~(13)式代入(11)式,然后对 n 递推可得(10)式. 证毕.

3 差分格式的收敛性与稳定性

差分格式(6)~(9)的截断误差定义如下:

$$r_j^n=(u_j^n)_{\hat{t}}-\frac{4}{3}(u_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}}+\frac{1}{3}(u_j^n)_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}+\frac{4}{3}(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}-\frac{1}{3}(\bar{u}_j^n)_{\ddot{x}}+\psi(u_j^n,\bar{u}_j^n)-\xi(u_j^n,\bar{u}_j^n)-$$

$$\frac{4}{3}(\bar{u}_j^n)_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}\hat{x}},j=1,2,\cdots,$$
$$J-1,n=1,2,\cdots,N-1 \tag{14}$$

$$u_j^0=u_0(x_j),\ j=0,1,2,\cdots,J \tag{15}$$

$$u_j^1-\frac{4}{3}(u_j^1)_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(u_j^1)_{\hat{x}\hat{x}}=$$
$$u_0(x_j)-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_j)-\tau\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_j)+$$
$$\tau\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_j)-\tau u_0(x_j)\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_j)+r_j^0,$$
$$j=1,2,\cdots,J-1 \tag{16}$$

$$u^n\in Z_h^0,\ n=0,1,2,\cdots,N \tag{17}$$

由Taylor展开可知，当$h,\tau\to 0$时，

$$|r_j^n|=O(\tau^2+h^4) \tag{18}$$

引理3.1[20]　对任意$U\in Z_h^0$，恒有

$$\|U_{\hat{x}}\|\leqslant\|U_x\|.$$

引理3.2[16]　设$u_0\in H^2$，则初边值问题(2)～(4)的解满足：

$$\|u\|_{L_2}\leqslant C,\quad \|u_x\|_{L_2}\leqslant C,\quad \|u_{xx}\|_{L_2}\leqslant C,$$
$$\|u\|_{L_\infty}\leqslant C,\quad \|u_x\|_{L_\infty}\leqslant C.$$

定理3.3　设$u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 则差分格式(6)～(9)的解满足

$$\|U^n\|\leqslant C,\ \|U_x^n\|\leqslant C,\ \|U^n\|_\infty\leqslant C(n=1,2,\cdots,N).$$

证明　将(6)式与$2\bar{U}^n$(即$U^{n+1}+U^{n-1}$)作内积，由边界条件(9)和分部求和公式[19]得

$$\|U^n\|_{\hat{t}}^2+\frac{4}{3}\|U_x^n\|_{\hat{t}}^2-\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^n\|_{\hat{t}}^2+$$
$$2\langle\psi(U^n,\bar{U}^n),\bar{U}^n\rangle-2\langle\xi(U^n,\bar{U}^n),\bar{U}^n\rangle+$$
$$\frac{8}{3}\|\bar{U}_x^n\|^2-\frac{2}{3}\|\bar{U}_{\hat{x}}^n\|^2=0 \tag{19}$$

$$\langle\psi(U^n,\bar{U}^n),\bar{U}^n\rangle=\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n\bar{U}_j^n(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}+$$
$$\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^n\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}\bar{U}_j^n=$$
$$\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n\bar{U}_j^n(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}-$$
$$\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n\bar{U}_j^n(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}=0 \tag{20}$$

$$\langle\xi(U^n,\bar{U}^n),\bar{U}^n\rangle=\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n\bar{U}_j^n(\bar{U}_j^n)_{\ddot{x}}+$$
$$\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^n\bar{U}_j^n)_{\ddot{x}}\bar{U}_j^n=$$
$$\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n\bar{U}_j^n(\bar{U}_j^n)_{\ddot{x}}-$$
$$\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n\bar{U}_j^n(\bar{U}_j^n)_{\ddot{x}}=0 \tag{21}$$

令

$$E^n=\frac{1}{2}\Big(\|U^{n+1}\|^2+\frac{4}{3}\|U_x^{n+1}\|^2-$$
$$\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^{n+1}\|^2+\|U^n\|^2+$$
$$\frac{4}{3}\|U_x^n\|^2-\frac{1}{3}\|U_{\hat{x}}^n\|^2\Big).$$

结合(19)～(21)式，由引理3.1有

$$E^n-E^{n-1}\leqslant -2\tau\|\bar{U}_x^n\|^2<0 \tag{22}$$

对n递推可得

$$E^n<E^{n-1}<\cdots<E^0<C \tag{23}$$

再由(23)式及引理3.1有

$$\frac{1}{2}\left(\|U^{n+1}\|^2+\|U_x^{n+1}\|^2+\|U^n\|^2+\|U_x^n\|^2\right)<E^n<C$$

即$\|U^n\|\leqslant C$，$\|U_x^n\|\leqslant C$. 再由离散Sobolev不等式[19]得$\|U^n\|_\infty\leqslant C$.

定理3.4　设$u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 则差分格式(6)～(9)的解U^n以$\|\cdot\|_\infty$收敛到初边值问题(2)～(4)的解，且收敛阶为$O(\tau^2+h^4)$.

证明　记$e_j^n=u_j^n-U_j^n$. 由(14)～(17)式减去(6)～(9)式得

$$r_j^n=(e_j^n)_{\hat{t}}-\frac{4}{3}(e_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}}+\frac{1}{3}(e_j^n)_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}}+\frac{4}{3}(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}}-$$
$$\frac{1}{3}(\bar{e}_j^n)_{\ddot{x}}+\psi(u_j^n,\bar{u}_j^n)-\psi(U_j^n,\bar{U}_j^n)-$$
$$\xi(u_j^n,\bar{u}_j^n)+\xi(U_j^n,\bar{U}_j^n)-\frac{4}{3}(\bar{e}_j^n)_{x\bar{x}}+$$
$$\frac{1}{3}(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}\hat{x}}j=1,2,\cdots,J-1,n=1,$$
$$2,\cdots,N-1 \tag{24}$$

$$e_j^0=0,\ j=0,1,2,\cdots,J \tag{25}$$

$$e_j^1-\frac{4}{3}(e_j^1)_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(e_j^1)_{\hat{x}\hat{x}}=r_j^0,j=1,$$
$$2,\cdots,J-1 \tag{26}$$

$$e^n\in Z_h^0,\ n=0,1,2,\cdots,N \tag{27}$$

将(26)式两端与e^1作内积，由边界条件(27)式得

$$\|e^1\|^2+\frac{4}{3}\|e_x^1\|^2-$$
$$\frac{1}{3}\|e_{\hat{x}}^1\|^2=\langle r^0,e^1\rangle \tag{28}$$

由(18)式和Cauchy-Schwarz不等式以及引理3.1，从(28)式得

$$\|e^1\|^2+\|e_x^1\|^2\leqslant O(\tau^2+h^4)^2 \tag{29}$$

再将(24)式两端与$2\bar{e}^n$作内积，由边界条件(27)和分部求和公式[19]得

$$\langle r^n, 2\bar{e}^n\rangle = \|e^n\|_{\hat{t}}^2 + \frac{4}{3}\|e_x^n\|_{\hat{t}}^2 - \frac{1}{3}\|e_{\hat{x}}^n\|_{\hat{t}}^2 + 2\langle\psi(u^n,\bar{u}^n) - \psi(U^n,\bar{U}^n), \bar{e}^n\rangle - 2\langle\xi(u^n,\bar{u}^n) - \xi(U^n,\bar{U}^n), \bar{e}^n\rangle + \frac{8}{3}\|\bar{e}_x^n\|^2 - \frac{2}{3}\|\bar{e}_{\hat{x}}^n\|^2 \tag{30}$$

由引理 3.2,Cauchy-Schwarz 不等式,引理 3.1 有

$$\begin{aligned}&\langle\psi(u^n,\bar{u}^n) - \psi(U^n,\bar{U}^n), \bar{e}^n\rangle \\ &= \frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}[e_j^n(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}} + U_j^n(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}}]\bar{e}_j^n - \\ &\frac{4}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(e_j^n\bar{u}_j^n + U_j^n\bar{e}_j^n)(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}} \leqslant \\ &C(\|e^n\|^2 + \|\bar{e}^n\|^2 + \|\bar{e}_{\hat{x}}^n\|^2) \leqslant \\ &C(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 + \\ &\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n-1}\|^2)\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\langle\xi(u^n,\bar{u}^n) - \xi(U^n,\bar{U}^n), \bar{e}^n\rangle \\ &= \frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}[e_j^n(\bar{u}_j^n)_{\ddot{x}} + U_j^n(\bar{e}_j^n)_{\ddot{x}}]\bar{e}_j^n - \\ &\frac{1}{9}h\sum_{j=1}^{J-1}(e_j^n\bar{u}_j^n + U_j^n\bar{e}_j^n)(\bar{e}_j^n)_{\ddot{x}} \leqslant \\ &C(\|e^n\|^2 + \|\bar{e}^n\|^2 + \|\bar{e}_{\ddot{x}}^n\|^2) \leqslant \\ &C(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 + \\ &\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n-1}\|^2)\end{aligned} \tag{32}$$

$$\langle r^n, 2\bar{e}^n\rangle = \langle r^n, e^{n+1} + e^{n-1}\rangle \leqslant \|r^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 \tag{33}$$

将(31)`(33)式代入(30)式,整理有

$$\|e^n\|_{\hat{t}}^2 + \frac{4}{3}\|e_x^n\|_{\hat{t}}^2 - \frac{1}{3}\|e_{\hat{x}}^n\|_{\hat{t}}^2 \leqslant \|r^n\|^2 + C(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n-1}\|^2) \tag{34}$$

令

$$B^n = \|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \frac{4}{3}\|e_x^{n+1}\|^2 - \frac{1}{3}\|e_{\hat{x}}^{n+1}\|^2 + \frac{4}{3}\|e_x^n\|^2 - \frac{1}{3}\|e_{\hat{x}}^n\|^2.$$

将(34)式两边同时乘以 2τ,然后从 1 到 n 递推得

$$B^n \leqslant B^0 + 2\tau\sum_{l=1}^{n}\|r^l\|^2 + C\tau\sum_{l=0}^{n+1}(\|e^l\|^2 + \|e_x^l\|^2) \tag{35}$$

由(18)式有

$$\tau\sum_{l=1}^{n}\|r^l\|^2 \leqslant n\tau\max_{1\leqslant l\leqslant n}\|r^l\|^2 \leqslant T\cdot O(\tau^2+h^4)^2.$$

再由(26)式和(29)式有 $B^0 = O(\tau^2+h^4)^2$. 于是(35)式即为

$$B^n \leqslant O(\tau^2+h^4)^2 + C\tau\sum_{l=0}^{n+1}(\|e^l\|^2 + \|e_x^l\|^2).$$

由引理 3.1 和离散 Gronwall 不等式[19]有

$$\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2 \leqslant B^n \leqslant O(\tau^2+h^4)^2.$$

即

$$\|e^n\| \leqslant O(\tau^2+h^4),\ \|e_x^n\| \leqslant O(\tau^2+h^4).$$

最后由离散 Sobolev 不等式[19]有

$$\|e^n\|_\infty \leqslant O(\tau^2+h^4).$$

与定理 3.2 类似,可以证明:

定理 3.5 在定理 3.2 的条件下,差分格式(6)-(9)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 关于初值无条件稳定.

4 数值实验

当 $t=0$ 时,由于耗散还没有产生,所以在数值实验中把问题(2)~(4)中的初值函数取为 RLW 方程的初值函数[20]($t=0$ 时)

$$u(x,0) = \mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{4}x\right).$$

由于不知道方程(2)的精确解,用类似文献[8-9]中的处理方法,将细网格$\left(\tau=h=\frac{1}{160}\right)$上的数值解作为精确解来估计误差. 固定 $x_L=-20$, $x_R=40$, $T=10$. 就 τ 和 h 的不同取值格式(6)~(9)在几个不同时刻的误差及其对理论精度的检验见表 1、2;对守恒量(5)的数值模拟见表 3.

表 1 格式在几个不同时刻的误差

Tab. 1 Error of the scheme at various time

	$\tau=0.4, h=0.2$		$\tau=0.1, h=0.1$		$\tau=0.025, h=0.05$	
	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$
$t=2$	1.36668e-2	7.06732e-3	9.99347e-4	5.18351e-4	5.88772e-5	3.05534e-5
$t=4$	2.04689e-2	1.00167e-2	1.28119e-3	6.25496e-4	7.54112e-5	3.68316e-5
$t=6$	2.04060e-2	9.46881e-3	1.32395e-3	6.11243e-4	7.78689e-5	3.59576e-5
$t=8$	2.07654e-2	9.19781e-3	1.28433e-3	5.66099e-4	7.54914e-5	3.32782e-5
$t=10$	1.91500e-2	8.12996e-3	1.21736e-3	5.16243e-4	7.15166e-5	3.03313e-5

表 2　对格式的理论精度 $O(\tau^2+h^4)$ 的数值检验

Tab. 2　Numerical example of the scheme on theoretical precision $O(\tau^2+h^4)$

	$\Vert e^n(h,\tau)\Vert / \Vert e^{4n}\left(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4}\right)\Vert$			$\Vert e^n(h,\tau)\Vert_\infty / \Vert e^{4n}\left(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4}\right)\Vert_\infty$		
	$\tau=0.4$ $h=0.2$	$\tau=0.1$ $h=0.1$	$\tau=0.025$ $h=0.05$	$\tau=0.4$ $h=0.2$	$\tau=0.1$ $h=0.1$	$\tau=0.025$ $h=0.05$
$t=2$	—	13.6758	16.9734	—	13.6342	16.9654
$t=4$	—	15.9764	16.9895	—	16.0140	16.9826
$t=6$	—	15.4129	17.0024	—	15.4911	16.9990
$t=8$	—	16.1682	17.0130	—	16.2477	17.0111
$t=10$	—	15.7308	17.0221	—	15.7483	17.0202

表 3　格式对守恒量(5)的数值模拟

Tab. 3　Numerial simulation on the conservation invariant (5) of the scheme

	$\tau=0.4, h=0.2$	$\tau=0.1, h=0.1$	$\tau=0.025, h=0.05$
$t=0$	8.00844503772	8.00013190465	7.99957916966
$t=2$	8.00837681156	8.00003906737	7.99948143273
$t=4$	8.00837511661	8.00003789431	7.99948031574
$t=6$	8.00836230778	8.00002925586	7.99947212668
$t=8$	8.00828593500	7.99997577486	7.99942123312
$t=10$	8.00803465165	7.99972273173	7.99916013355

从数值算例可以看出，本文对初边值问题(2)～(4)提出的差分格式(6)～(9)是有效的.

参考文献：

[1]　Benjamin T B, Bona J L, Mahony J J. Model equations for long waves nonlinear dispersive system [J]. Phil Trans R Soc London, 1972, A272: 47.

[2]　Mei M. Large-time behavior of solution for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation [J]. Nonlinear Anal-Real, 1998, 4: 699.

[3]　Mei M. Decay rates of solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation [J]. Diff Equat+, 1999, 158: 314.

[4]　Zhao H J, Xuan B J. Existence and convergence of solutions for generalized BBM-Burgers equation with dissipative terms [J]. Nonlinear Anal-Real, 1997, 28: 1835.

[5]　Wang B X. Attractors and approximate inertial manifolds for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation [J]. Math Method Appl Sci, 1997, 20: 189.

[6]　李玉. 几类非线性发展方程不变解和守恒律的研究[D]. 聊城：聊城大学，2017.

[7]　胡劲松，王玉兰. Benjamin-Bona-Mahony 方程的拟紧致差分算法[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35：64.

[8]　胡劲松. 求解 Benjamin-Bona-Mahony 方程的拟紧致差分格式[J]. 云南大学学报：自然科学版，2010，32：1.

[9]　Che H T, Pan X T, Zhang L M, *et al*. Numerical analysis of a linear-Implicit average scheme for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation [J]. J Appl Math Vol, 2012, 2012: 308410.

[10]　张岩，胡劲松，胡兵，等. Benjamin-Bona-Mahony 方程的平均隐式差分格式[J]. 四川大学学报：自然科学版，2012，49：955.

[11]　覃燕梅，孔花，罗丹，等. BBM 方程的全离散混合有限元方法[J]. 应用数学学报，2015，38：597.

[12]　闫静叶，孙建强，赵鑫. BBM 方程的多辛整体保能量方法[J]. 湖北大学学报：自然科学版，2016，38：310.

[13]　杨怀君. 非线性 BBM 方程的有限元分析[D]. 郑州：郑州大学，2015.

[14]　Lyu P, Vong S. A linearized second-order finite difference scheme for time fractional generalized BBM equation [J]. Appl Math Lett, 2018, 78: 16.

[15]　Can L. Linearized difference schemes for a BBM equation with a fractional nonlocal viscous term [J]. Appl Math Comput, 2017, 311: 240.

[16]　黄妗彤，李佳佳，张虹. 求解 BBM 方程的一个高精度非线性 C-N 差分格式[J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：387.

[17]　王婷婷，卓茹，黄妗彤. 广义 Rosenau-RLW 方程的一个守恒差分逼近[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：268.

[18] 卓茹，李佳佳，黄妗彤. 求解广义 Rosenau-KdV-RLW 方程的守恒差分格式[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：703.
[19] Zhou Y L. Application of discrete functional analysis to the finite difference methods [M]. Beijing: International Academic Publishers，1990.
[20] Zheng K L，Hu J S. High-order conservative Crank-Nicolson scheme for regularized long wave equation [J]. Adv Differ Equ-NY，2013，2013：287.

引用本文格式：
中　文：张虹，王希，胡劲松. Benjamin-Bona-Mahony 方程的一个高精度线性差分格式[J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：813.
英　文：Zhang H，Wang X，Hu J S. High precise linearized difference scheme for Benjamin-Bona-Mahony equation [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2019，56：813.