doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.05.002

一类三阶非线性微分方程周期边值问题解的存在性

邓正平，李永祥
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文讨论如下一般三阶常微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} Lu(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)), t\in[0,\omega], \\ u^{(k)}(0)=u^{(k)}(\omega), k=0,1,2 \end{cases}$$

解的存在性，其中 $Lu(t)=u'''(t)+a_2u''(t)+a_1u'(t)+a_0u(t)$ 是三阶常微分算子，$f:[0,w]\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 连续．在非线性项 f 满足适当的增长条件下，本文应用 Fourier 分析法与 Leray-Schauder 不动点定理获得了该问题解的存在唯一性．

关键词：三阶周期边值问题；Fourier 级数；Leray-Schauder 不动点定理
中图分类号：O175.15　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)05-0792-05

Existence of solutions for a class of periodic bourdary value problem of third-order nonlinear ordinary differential equations

DENG Zheng-Ping, *LI Yong-Xiang*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, the existence of solutions for the following third-order ordinary differential equation periodic boundary value problem

$$\begin{cases} Lu(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)), t\in[0,\omega], \\ u^{(k)}(0)=u^{(k)}(\omega), k=0,1,2 \end{cases}$$

is considered, where $Lu(t)=u'''(t)+a_2u''(t)+a_1u'(t)+a_0u(t)$ is third-order ordinary differential operator, $f:[0,w]\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ is continuous. Applying the Fourier analysis method and Leray-Schauder fixed point theorem, we obtain the existence and uniqueness of the solutions of the equation when the nonlinear term f satisfies some proper growth conditions.

Keywords: Third-order periodic boundary value problem; Fourier series; Leray-Schauder fixed point theorem
(2010 MSC 26 A33)

1　引　言

本文讨论三阶常微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} Lu(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)), t\in[0,\omega], \\ u^{(k)}(0)=u^{(k)}(\omega), k=0,1,2 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在唯一性，其中 $Lu(t)=u'''(t)+a_2u''(t)+a_1u'(t)+a_0u(t)$是三阶常微分算子，$\omega>0$ 为常数，

收稿日期：2018-10-22
基金项目：国家自然科学基金(11261053；11661071)
作者简介：邓正平 (1992—)，男，甘肃天水人，硕士生，主要从事非线性泛函分析的研究．E-mail：zhengpingdeng@163.com
通讯作者：李永祥．E-mail：liyx@nwnu.edu.cn

$f:[0,w]\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 连续.

三阶常微分方程周期边值问题在力学、核物理学、边界层理论等实际问题中有着广泛应用，受到人们的重视与关注[1-12]. 例如，在文献[2]中，作者考虑了三阶周期边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)+\rho^3u(t)=f(t,u(t)),0\leqslant t\leqslant 2\pi,\\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi),i=0,1,2\end{cases}\quad(2)$$

其中 $\rho\in(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ 为常数，$f\in C([0,2\pi]\times(0,\infty))$，应用锥上的 Krasnoselskii 不动点定理获得了方程(2)正解的存在性结果. 该结论扩展了文献[1]应用 Schauder 不动点定理得出的相应结论. 文献[3]考虑了三阶变系数周期边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)+h(t)u(t)=f(t,u(t)),0\leqslant t\leqslant 2\pi,\\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi),i=0,1,2\end{cases}\quad(3)$$

其中 $h\in C[0,2\pi]$ 是非负函数，应用锥上的 Guo-Krasnoselskii 不动点定理获得了方程(3)正解的存在性结果. 文献[13]则考虑了高阶周期边值问题

$$\begin{cases}L_nu(t)=f(t,u(t)),t\in[0,2\pi],\\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi),i=0,1,\cdots,n-1\end{cases}\quad(4)$$

其中 $L_nu(t)=u^{(n)}(t)+\sum_{i=0}^{n-1}a_iu^{(i)}(t)$ 是 n 阶常微分算子. 在谱分离条件下，该文应用 Schauder 不动点定理获得了方程(4)解的存在唯一性结果. 在上述文献中，非线性项 f 均不含导数项.

受上述文献启发，本文研究更一般的三阶常微分方程周期边值问题(1)，非线性项 f 中含有 u'，u'' 导数项. 我们在非线性项 f 满足一定的增长条件下应用 Fourier 分析法和 Leray-Schauder 不动点定理获得了周期边值问题(1)解的存在唯一性.

2　预备知识

记 $I=[0,\omega]$，$L^2(I)$ 为 I 上的平方可积函数按内积 $(u,v)=\int_0^\omega u(t)v(t)\mathrm{d}t$ 构成的 Hilbert 空间，其内积范数为

$$\|u\|_2=\left(\int_0^\omega|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

$\forall n\in\mathbf{N}$，记 $H^n(I)$ 为 I 上具有 n 阶平方可积导数的函数 u 按范数

$$\|u\|_{n,2}=(\sum_{k=0}^{n}\|u^{(k)}\|_2^2)^{1/2}$$

构成的 Sobolev 空间. $u\in H^n(I)$ 意味着 u 在 I 上 $n-1$ 阶连续可微，$u^{(n-1)}(t)$ 在 I 上绝对连续，且 $u^{(n)}\in L^2(I)$.

设 $h\in L^2(I)$. 考虑线性三阶微分方程周期边值问题

$$\begin{cases}Lu(t)=h(t),t\in I,\\ u^{(k)}(0)=u^{(k)}(\omega),k=0,1,2\end{cases}\quad(5)$$

记 $P(\lambda)=\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$ 为微分算子 L 的特征多项式.

引理 2.1　$\forall h\in L^2(I)$，假设 $\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 不是 $P(\lambda)$ 的根，即 $P(\lambda)$ 满足条件

$$P(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})\neq0,k=\pm1,\pm2,\cdots\quad(6)$$

则对任意 $h\in L^2(I)$，线性周期边值问题(5)存在唯一解 $u=Sh\in H^3(I)$，且解算 $S:L^2(I)\to H^3(I)$ 为线性有界算子.

证明　$\{\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega}t}\mid k\in\mathbf{Z}\}$ 为 $L^2(I)$ 中的完备直交系. $\forall\in L^2(I)$，h 可展为 $L^2(I)$ 中的 Fourier 级数

$$h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega}t},t\in I\quad(7)$$

其中 $c_k=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega h(t)\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega}}\mathrm{d}t$. 由 Parseval 等式，有

$$\|h\|_2^2=\omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2.$$

假设 $u\in H^3(I)$ 为线性周期边值问题(5)的解. 则 $u,u',u'',u'''\in L^2(I)$ 可展为 $L^2(I)$ 中的 Fourier 级数. 设 u 的展式为

$$u(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega}t},t\in I.$$

则由 Fourier 系数的积分公式易见 $u^{(m)}(t)(1\leqslant m\leqslant3)$ 的 Fourier 展式为

$$u^{(m)}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})^m\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega}t},t\in I\quad(8)$$

从而

$$Lu(t)=h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_kP(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega}t}\quad(9)$$

由 Fourier 展式的唯一性及(6)式有

$$d_k=\frac{c_k}{P(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})}\quad(10)$$

因此 u 可表示为

$$u(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k}{P(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})}\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega}t},t\in I\quad(11)$$

反之，任意 $h\in L^2(I)$，易见由(11)式给出的 $u\in H^3(I)$ 为线性周期边值问题(5)的解. 因此，线性周期边值问题(5)有唯一解 $u=Sh$. 易见 $S:L^2(I)\to H^3(I)$ 为线性有界算子.

由嵌入 $H^3(I)\to H^2(I)$ 的紧性，线性周期边

值问题(5)的解算子 $S:L^2(I)\to H^2(I)$为线性全连续算子. 在 $H^2(I)$中取等价范数

$$\|u\|_X=\sqrt{\|u\|_2^2+\|u''\|_2^2}.$$

记 X 为 $H^2(I)$按范数 $\|\cdot\|_X$ 构成的 Banach 空间. 则 $S:L^2(I)\to X$ 为线性全连续算子. 假设(6)式成立. 记

$$M=\max_{k\in\mathbf{Z}}\left|\frac{1+(\frac{2k\pi}{\omega})^2}{P(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})}\right| \tag{12}$$

我们有

引理 2.2 假设条件(6)式成立. 则线性周期边值问题(5)的解算子 $S:L^2(I)\to X$ 的范数满足 $\|S\|_{B(L^2(I),X)}\leqslant M$, 且对任意 $h\in L^2(I)$, 线性周期边值问题(5)的解 $u=Sh$ 满足

$$\|u'\|_2\leqslant\frac{\omega}{2\pi}\|u''\|_2 \tag{13}$$

证明 由引理 2.1 的证明及 Parseval 等式有

$$\begin{aligned}\|Sh\|_X^2&=\|u\|_X^2=\|u\|_2^2+\|u''\|_2^2=\\ &\omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}|d_k|^2+\omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{2k\pi i}{\omega})^4|d_k|^2=\\ &\omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}|d_k|^2\left(1+(\frac{2k\pi i}{\omega})^4\right)=\\ &\omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2\frac{\left(1+(\frac{2k\pi}{\omega})^4\right)}{\left|P(\frac{2k\pi i}{\omega})\right|^2}\leqslant\\ &\omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2\left|\frac{1+(\frac{2k\pi}{\omega})^2}{P(\frac{2k\pi i}{\omega})}\right|^2\leqslant\\ &M^2\omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2=M^2\|h\|_2^2.\end{aligned}$$

从而 $\|Sh\|_X\leqslant M\|h\|_2$. 故 $\|S\|_{B(L^2(I),X)}\leqslant M$. 又因为

$$\begin{aligned}\|u''\|_2^2&=\omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})^2|d_k|^2=\\ &\omega\sum_{k\neq0}(\frac{2k\pi}{\omega})^4|d_k|^2(\frac{\omega}{2k\pi})^2\leqslant\\ &(\frac{\omega}{2\pi})^2\omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})^2d_k\right|^2=\\ &(\frac{\omega}{2\pi})^2\|u''\|_2^2,\end{aligned}$$

所以

$$\|u'\|_2\leqslant\frac{\omega}{2\pi}\|u''\|_2.$$

证毕.

3 主要结果

定理 3.1 假设(6)式成立, $f:I\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 连续且满足下列条件

(F1) 存在常数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\geqslant0$ 及 $C>0$, 满足 $M(\alpha_0+\frac{\omega}{2\pi}\alpha_1+\alpha_2)<1$, 使得

$$|f(t,x_0,x_1,x_2)|\leqslant\sum_{k=0}^{2}\alpha_k|x_k|+C,$$
$$(t,x_0,x_1,x_2)\in I\times\mathbf{R}^3,$$

则三阶周期边值问题(1) 至少存在一个解.

证明 设 X 为 $H^2(I)$ 按范数 $\|u\|_X=\sqrt{\|u\|_2^2+\|u''\|_2^2}$ 构成的 Banach 空间. $\forall u\in X$, 令

$$F(u)(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)) \tag{14}$$

则 $F:X\to L^2(I)$ 连续且把有界集映为有界集. 令 $A=S\circ F$. 则 $A:X\to X$ 为全连续映射. 按 S 的定义, 三阶周期边值问题(1) 的解等价于算子 A 的不动点. 为了对 A 应用 Leray-Schauder 不动点定理, 考查同伦簇方程

$$u=\lambda Au,0<\lambda<1 \tag{15}$$

设 $u\in X$ 为某个 $\lambda\in(0,1)$ 相应的方程(15) 的解. 因为 $u=\lambda Au=S(\lambda F(u))$, 故 $u\in H^3(I)$ 为 $h=\lambda F(u)$ 相应的线性周期边值问题(5) 的解. 由假设条件(F1) 及(14) 式有

$$\begin{aligned}|F(u)(t)|&=|f(t,u(t),u'(t),u''(t))|\leqslant\\ &\alpha_0|u(t)|+\alpha_1|u'(t)|+\alpha_2|u''(t)|+C,\\ &t\in I.\end{aligned}$$

式两边取 $\|\cdot\|_2$, 由引理 2.2 有

$$\begin{aligned}\|F(u)\|_2&\leqslant\\ &\alpha_0\|u\|_2+\alpha_1\|u'\|_2+\alpha_2\|u''\|_2+\sqrt{\omega}C\leqslant\\ &\alpha_0\|u\|_2+\alpha_1\frac{\omega}{2\pi}\|u''\|_2+\alpha_2\|u''\|_2+\\ &\sqrt{\omega}C\leqslant(\alpha_0+\frac{\omega}{2\pi}\alpha_1+\alpha_2)\|u\|_X+\sqrt{\omega}C.\end{aligned}$$

因为 $u=S(\lambda F(u))$, 所以由引理 2.2 及上式有

$$\begin{aligned}\|u\|_X&=\|S(\lambda F(u))\|_X\leqslant\\ &\|S\|_{B(L^2(I),X)}\|\lambda F(u)\|_2\leqslant M\lambda\|F(u)\|_2\leqslant\\ &M(\alpha_0+\frac{\omega}{2\pi}\alpha_1+\alpha_2)\|u\|_X+CM\sqrt{\omega}.\end{aligned}$$

从而有

$$\|u\|_X\leqslant\frac{CM\sqrt{\omega}}{1-M(\alpha_0+\frac{\omega}{2\pi}\alpha_1+\alpha_2)}.$$

因此, 方程簇(15) 的解集在 X 中有界. 由

Leray-Schauder 不动点定理知，A 在 X 中存在不动点 u_0，该不动点即为三阶周期边值问题(1) 的解.

定理 3.2　假设(6) 式成立，$f: I\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 连续且满足下列条件

(F2) $\forall(t,x_0,x_1,x_2)$，$(t,y_0,y_1,y_2)\in I\times\mathbf{R}^3$，非线性项 f 满足条件

$$|f(t,x_0,x_1,x_2)-f(t,y_0,y_1,y_2)|\leqslant \sum_{k=0}^{2}\alpha_k|x_k-y_k| \tag{16}$$

其中 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\geqslant 0$ 且满足 $M(\alpha_0+\frac{\omega}{2\pi}\alpha_1+\alpha_2)<1$，则三阶周期边值问题(1)有唯一解.

证明　取 $C=\max_{t\in[0,\omega]}|f(t,0,0,0)|+1$. 由(16)式有

$$|f(t,x_0,x_1,x_2)|\leqslant |f(t,x_0,x_1,x_2)-f(t,0,0,0)|+|f(t,0,0,0)|\leqslant \sum_{k=0}^{2}\alpha_k|x_k|+C.$$

即 f 满足条件(F1)，由定理 3.1 知，三阶周期边值问题(1)至少有一个解.

下证唯一性. 设 $u_1,u_2\in H^3(I)$ 为方程(1)的两个解. 令 $u=u_2-u_1$. 则 $u=S(\lambda F(u_2)-F(u_1))$ 为 $h=F(u_2)-F(u_1)$ 相应的线性周期边值问题(5)的解. 因此，由引理 2.2 及(16)式有

$$\|F(u_2)-F(u_1)\|_2\leqslant \sum_{k=0}^{2}\alpha_k\,|u_2^{(k)}-u_1^{(k)}|_2\leqslant (\alpha_0+\frac{\omega}{2\pi}\alpha_1+\alpha_2)\,\|u\|_X.$$

所以

$$\|u_2-u_1\|_X=\|S(F(u_2)-F(u_1))\|_X\leqslant \|S\|_{B(L^2(I),X)}\|F(u_2)-F(u_1)\|_2\leqslant M(\alpha_0+\frac{\omega}{2\pi}\alpha_1+\alpha_2)\|u_2-u_1\|_X.$$

因为 $M(\alpha_0+\frac{\omega}{2\pi}\alpha_1+\alpha_2)<1$，所以 $\|u_2-u_1\|_X=0$，即 $u_2=u_1$. 故三阶周期边值问题(1)有唯一解.

例 3.3　考虑如下三阶微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)-2u''(t)+u''(t)+u(t)=\sqrt{\frac{1}{9}u(t)^2+\frac{1}{9}u'(t)^2+\frac{1}{16}u''(t)^2}+\sin t, t\in[0,2\pi],\\ u^{(k)}(0)=u^{(k)}(2\pi), k=0,1,2. \end{cases}$$

相应于方程(1)，$\omega=2\pi$，对应的特征多项式为

$$P(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+1.$$

所以

$$P(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})=P(k\mathrm{i})=1+2k^2+(k-k^3)\mathrm{i}\neq 0,\quad k=\pm1,\pm2,\cdots,$$

即(6)式成立. 由(12)式，相应的常数 M 为

$$M=\max_{k\in\mathbf{Z}}\left|\frac{1+(\frac{2k\pi}{\omega})^2}{P(\frac{2k\pi\mathrm{i}}{\omega})}\right|=\max_{k\in\mathbf{Z}}\left|\frac{1+k^2}{1+2k^2+(k-k^3)\mathrm{i}}\right|=\max_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1+k^2}{\sqrt{(1+2k^2)^2+(k-k^3)^2}}=1.$$

方程相应于方程(1)的非线性项为

$$f(t,x,y,z)=\sqrt{\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{16}z^2}+\sin t.$$

取 $\alpha_0=\frac{1}{3},\alpha_1=\frac{1}{3},\alpha_2=\frac{1}{4}$. 则

$$M(\alpha_0+\frac{\omega}{2\pi}\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<1.$$

因而 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ 满足定理 3.1 的系数条件.

$\forall(t,x,y,z)\in[0,2\pi]\times\mathbf{R}^3$，我们有

$$|f(t,x,y,z)|\leqslant \sqrt{\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{16}z^2}+|\sin t|\leqslant \frac{1}{3}|x|+\frac{1}{3}|y|+\frac{1}{4}|z|+1.$$

因此 $f(t,x,y,z)$ 满足条件(F1). 由定理 3.1 知，方程(17)至少有一个解.

参考文献：

[1] Kong L, Wang S, Wang J. Positive solution of a singular nonlinear third-order periodic boundary value problem [J]. J Comput Appl Math, 2001, 132: 247.

[2] Chu J, Zhou C. Positive solutions for singular nonlinear third-order periodic boundary value problem [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2006, 64: 1528.

[3] Yao Q L. Positive solutions of third-order periodic

boundary value problem with variable coefficient [J]. J Jishou Univ: Nat Sci Ed, 2010, 31: 9.

[4] Cabada A. The method of lower and upper solutions for third-order periodic boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1995, 195: 568.

[5] Ren J L, Cheng Z B, Chen Y L. Existence results of periodic solutions for third-order nonlinear sigular differential equations [J]. Math Nach, 2013, 286: 1022.

[6] Sun J X, Liu Y S. Multiple positive solutions of singular third-order periodic boundary value problem [J]. Acta Math Sci, 2005, 25: 81.

[7] Chen Y L, Ren J L, Stefen S. Green's function for third-order differential equation [J]. Rocky Mountain J Math, 2011, 41: 1417.

[8] Li Y. Positive periodic solutions for fully third-order ordinary differential equations [J]. Comput Appl Math, 2010, 59: 3494.

[9] 白婧. 一类三阶非线性微分方程的奇周期解 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2015，52：1217.

[10] Cemil T, Sultan E. On the existence of periodic to certain nonlinear differential equations of third order [J]. Proc Pak Acad Sci A, 2017, 54: 207.

[11] 李波，刘文斌. 三阶非线性常微分方程周期边值问题解的存在性 [J]. 数学研究，2008，41：79.

[12] 李菊鹏，李永祥. 完全三阶边值问题解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：688.

[13] Li Y. Existence and uniqueness for higher-order periodic boundary value problems under spectral separation conditions [J]. J Math Anal Appl, 2006, 322: 530.

[14] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. New York: Spinger-Verlag, 1985.

引用本文格式：

中　文：邓正平，李永祥. 一类三阶非线性微分方程周期边值问题解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：792.

英　文：Deng Z P, Li Y X. Existerce of solutions for a class of periodic boundary value problem of third-order nonlinear ordinary differential equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 792.