doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.05.007

带 Φ-Laplacian 算子的差分方程周期边值问题正解集的全局结构

龙 严
(青海师范大学数学与统计学院，西宁 810000)

摘 要：本文运用区间分歧理论研究一类带 Φ-Laplacian 算子的差分方程周期边值问题

$$\begin{cases} -\nabla[\phi(\Delta u_t)]+q_t u_t=\lambda f(t,u_t),\ t\in\boldsymbol{T}, \\ u_0=u_T,\ u_1=u_{T+1} \end{cases}$$

正解集的全局结构，其中 $\boldsymbol{T}=\{1,2,\cdots,T\}$，$\hat{\boldsymbol{T}}=\{0,1,\cdots,T+1\}$，$T\in\mathbf{N}$ 且 $T>1$，$\Delta u_t=u_{t+1}-u_t$，$\nabla u_t=u_t-u_{t-1}$，$\lambda\in[0,\infty)$ 为一个参数，$q_t\in C(\hat{\boldsymbol{T}},(0,\infty))$ 且对于任意的 $t_0\in\hat{\boldsymbol{T}}$，$q(t_0)>0$，$f\in C(\hat{\boldsymbol{T}}\times[0,\infty),[0,\infty))$，$f(t,0)=0$，对于任意的 $s>0$ 有 $f(t,s)>0$ 且 $f(t,s)$ 在 $s=0$ 处不能线性化，$\phi:(-1,1)\to\mathbf{R}$，$\phi(y)=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 为一个递增的同胚映射，且 $\phi(0)=0$. 本文的主要结果推广和改进了 Bereanu 和 Mawhin 的工作.

关键词：差分方程；周期边值问题；拓扑度理论；分歧理论
中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2019)05-0827-06

Global structure of positive solutions of periodic boundary value problem of difference equation involving Φ -Laplacian operator

LONG Yan
(College of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining 810000, China)

Abstract: In this paper, we study the global structure of the set of positive solutions of periodic boundary value problem of a class of difference equations involving Φ-Laplacian operator

$$\begin{cases} -\nabla[\phi(\Delta u_t)]+q_t u_t=\lambda f(t,u_t),\ t\in\boldsymbol{T}, \\ u_0=u_T,\ u_1=u_{T+1} \end{cases}$$

by using the method of bifurcation from an interval, where $\boldsymbol{T}=\{1,2,\cdots,T\}$, $\hat{\boldsymbol{T}}=\{0,1,\cdots,T+1\}$, $T\in\mathbf{N}$ and $T>1$, $\Delta u_t=u_{t+1}-u_t$, $\nabla u_t=u_t-u_{t-1}$, $\lambda\in[0,\infty)$ is a parameter; $q_t\in C(\hat{\boldsymbol{T}},(0,\infty))$ $q(t_0)>0$ for $t_0\in\hat{\boldsymbol{T}}$, $f\in C(\hat{\boldsymbol{T}}\times[0,\infty),[0,\infty))$,where $f\in C(\hat{\boldsymbol{T}}\times[0,\infty),[0,\infty))$, $f(t,0)=0$, $f(t,s)>0$ for $s>0$, and $f(t,s)$ are not necessarily linearizable near 0 $\phi:(-1,1)\to\mathbf{R}$, $\phi(y)=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ is an increasing homeomorphism, $\phi(0)=0$. The main results extend and improve the corresponding ones of Bereanu and Mawhin.

Keywords: Difference equation; Periodic boundary value problem; Topological degree theory; Bifurcation theory
(2010 MSC 26A33)

收稿日期：2018-10-23
基金项目：青海省自然科学基金(2018-ZJ-901)；青海师范大学青年科学基金(2019zr004)
作者简介：龙严(1992-)，女，河南新乡人，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：m18298408928@163.com

1 引 言

Φ-Laplacian 方程在力学、天体物理及非线性分析中有着广泛的应用,其解的存在性和多解性是许多学者关注的问题之一[1-3]. 此外,由于地球上普遍存在着周期现象,一直以来对于周期边值问题的研究从未停止过. 微分方程周期边值问题,已有学者运用锥上的不动点理论、上下解方法、分歧理论以及临界点理论等方法进行过研究,参见 Rabinowitz、Ambrosetti、Constantin、Coelho 等的工作[4-9].

2010 年,Xu 和 Ma[10] 首次运用拓扑度理论与区间分歧理论考虑了类似的二阶微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} u''(t)-q(t)u(t)+\lambda f(t,u(t))=0,\ t\in(0,2\pi), \\ u(0)=u(2\pi),\ u'(0)=u'(2\pi) \end{cases}$$

正解集的全局结构,其中 $\lambda\in[0,+\infty)$ 是一个参数,$q\in C([0,2\pi],(0,+\infty))$, $f\in C^1([0,2\pi]\times(0,+\infty))$,但对于差分方程周期边值问题的研究还相对较少. 特别地,2008 年 Bereanu 和 Mawhin[1] 中运用 Brouwer 度理论与上下解方法研究了带 Φ-Laplacian 算子的差分方程周期边值问题

$$\begin{cases} \nabla[\phi(\Delta u_t)]+f_t(u_t,\Delta u_t)=0,\ t\in\boldsymbol{T}, \\ u_0=u_T,\ u_1=u_{T+1} \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性,其中 $\phi:(-a,a)\to\mathbf{R}$, $\phi(y)=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 为一个增同胚映射,且 $\phi(0)=0$, $0<a<\infty$, $f=(f_1,\cdots,f_{T-1})$ 是从 $\mathbf{R}^2$ 照到 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的连续函数,并得到如下结果:

定理 1.1 若问题(1)有一个下解 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和一个上解 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,则问题(1)有至少一个解.

值得注意的是,以往的工作只局限于运用上下解方法、不动点理论等研究差分方程周期边值问题解的存在性. 一个自然的问题是:拟线性的情况下是否可以运用区间分歧理论得到相应周期边值问题解集的全局结构? 一般运用分歧理论得到解集的全局结构时都要求非线性项在平凡解或无穷远处可以线性展开,但当非线性项在平凡解或无穷远处不可以线性化时,这类问题解集的全局结构的研究还很少. 受文献[10]的启发,本文将研究带 Φ-Laplacian 算子的差分方程周期边值问题

$$\begin{cases} -\nabla[\phi(\Delta u_t)]+q_t u_t=\lambda f(t,u_t),\ t\in\boldsymbol{T}, \\ u_0=u_T,\ u_1=u_{T+1} \end{cases} \tag{2}$$

正解集的全局结构,其中 $\boldsymbol{T}=\{1,2,\cdots,T\}$, $\hat{\boldsymbol{T}}=\{0,1,\cdots,T+1\}$, $T\in\mathbf{N}$ 且 $T>1$, $\Delta u_t=u_{t+1}-u_t$, $\nabla u_t=u_t-u_{t-1}$, $\lambda\in[0,\infty)$ 为一个参数,$\phi:(-1,1)\to\mathbf{R}$, $\phi(y)=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 为一个递增的同胚映射,且 $\phi(0)=0$. 本文用到的工具为

定理 1.2(Rabinowitz) 设 V 是一个实的自反 Banach 空间. 令 $F:\mathbf{R}\times V\to V$ 是全连续的,使得 $F(\lambda,0)=0$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$. 设 $a,b\in\mathbf{R}(a<b)$ 使得对于 $\lambda=a$ 和 $\lambda=b$, $u=0$ 是方程

$$u-F(\lambda,u)=0,u\in V \tag{3}$$

的孤立解,其中 $(a,0)$, $(b,0)$ 不是方程(3)的分歧点. 进一步地,假设

$$\deg(I-F(a,\cdot),B_r(0),0)\neq \deg(I-F(b,\cdot),B_r(0),0),$$

其中 $B_r(0)$ 是非平凡解的孤立邻域. 设

$$\vartheta=\overline{\{(\lambda,u):(\lambda,u)\text{是方程(3)的解并且 }u\neq0\}}\cup([a,b]\times\{0\}).$$

则在 $\mathbf{R}\times V$ 中存在从 $[a,b]\times\{0\}$ 分歧出的连通分支 $C\subset\vartheta$,且以下两者之一成立:

(i) C 在 $\mathbf{R}\times V$ 中无界;

(ii) $C\cap[\mathbf{R}\backslash[a,b]\times\{0\}]\neq\varnothing$.

本文总假定:

(G1) $q_t\in C(\hat{\boldsymbol{T}},(0,\infty))$ 且对于任意的 $t_0\in\hat{\boldsymbol{T}}$, $q(t_0)>0$;

(G2) $f\in C(\hat{\boldsymbol{T}}\times[0,\infty),[0,\infty))$, $f(t,0)=0$,且 $f(t,s)>0$, $\forall s>0$;

(G3) 存在函数 $a_0(\cdot)$, $a^0(\cdot)\in C(\hat{\boldsymbol{T}},[0,\infty))$ 以及 $\xi_1,\xi_2\in C(\hat{\boldsymbol{T}}\times[0,\infty),[0,\infty))$ 使得当 $s\to0$ 时,$a_0(t)s+\xi_1(t,s)\leqslant f(t,s)\leqslant a^0(t)s+\xi_2(t,s)$, $\forall t\in\hat{\boldsymbol{T}}$,其中 $\lim\limits_{s\to0}\frac{\xi_i(t,s)}{s}=0(i=1,2)$, $\forall t\in\hat{\boldsymbol{T}}$.

本文的主要结果为

定理 1.3 如果条件(G1)~(G3)成立,那么存在从 $\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right]\times\{0\}$ 处分歧出的问题(2)的一条无界连通分支 $C\subset(0,\infty)\times V^{T-1}$,使得

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{R}}C\supseteq(\frac{\lambda_1}{a_0},\infty),$$

其中

$$V^{T-1}=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{T+1}\mid u_0=u_T,u_1=u_{T+1}\}.$$

进一步地,记 $\lambda_1>0$ 为线性特征值问题

$$\begin{cases}-\nabla(\Delta u_t)+q_t u_t=\lambda\omega_t u_t,\ t\in\boldsymbol{T},\\ u_0=u_T,\ u_1=u_{T+1}\end{cases}$$

的主特征值,其中 q_n,ω_n 是实数,且 $\omega_n>0,n\in\boldsymbol{T}$. 如果 $\lambda>\dfrac{\lambda_1}{a_0}$,那么问题(2)至少存在一个正解.

2　预备知识

V^{T-1}按范数 $\|\boldsymbol{u}\|_\infty=\max\limits_{t\in\hat{\boldsymbol{T}}}|u_t|$ 构成 Banach 空间,其中 $\boldsymbol{u}=(u_0,u_1,\cdots,u_T)$. 记$\sum\subseteq\mathbf{R}\times V^{T-1}$为问题(2)正解集的闭包. 将 f 延拓为定义在 $\hat{\boldsymbol{T}}\times\boldsymbol{R}$ 上的连续函数 $\bar{f}$,

$$\bar{f}(t,s)=\begin{cases}f(t,s),(t,s)\in\hat{T}\times[0,\infty),\\ f(t,0),(t,s)\in\hat{T}\times(-\infty,0).\end{cases}$$

显然在 $\hat{\boldsymbol{T}}\times\mathbf{R}$ 上 $\bar{f}(t,s)\geqslant 0$.

引理 2.1

$$\nabla[\phi(\Delta u_t)]=\nabla(\Delta u_t)\left[\frac{\sqrt{1-|\Delta u_{t-1}|^2}\sqrt{1-|\Delta u_t|^2}+1+\Delta u_{t-1}\Delta u_t}{\sqrt{1-|\Delta u_t|^2}\sqrt{1-|\Delta u_{t-1}|^2}\left[\sqrt{1-|\Delta u_t|^2}+\sqrt{1-|\Delta u_{t-1}|^2}\right]}\right].$$

引理 2.2　若

$$h(y,z)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-|y|^2}\sqrt{1-|z|^2}\left(\sqrt{1-|y|^2}+\sqrt{1-|z|^2}\right)}{\sqrt{1-|z|^2}\sqrt{1-|y|^2}+1+yz},\text{若}|y|<1\text{ 且}|z|<1,\\ 0,\qquad\text{若}|y|\geqslant 1\text{ 或}|z|\geqslant 1,\end{cases}$$

则 $h(y,z)<2$ 且 $\lim\limits_{(y,z)\to(0,0)}\dfrac{h(y,z)-1}{\max\{|y|,|z|\}}=0$.

证明　一方面,如果$|y|<1$ 且$|z|<1$,那么

$$\frac{\sqrt{1-|y|^2}\sqrt{1-|z|^2}\left(\sqrt{1-|y|^2}+\sqrt{1-|z|^2}\right)}{\sqrt{1-|z|^2}\sqrt{1-|y|^2}+1+yz}\leqslant$$
$$\frac{\sqrt{1-|y|^2}\sqrt{1-|z|^2}\left(\sqrt{1-|y|^2}+\sqrt{1-|z|^2}\right)}{\sqrt{1-|z|^2}\sqrt{1-|y|^2}}=$$
$$\sqrt{1-|y|^2}+\sqrt{1-|z|^2}<2.$$

另一方面,如果当 $y\to 0$ 时

$$\sqrt{1-|y|^2}=1-y^2+o(y^2),$$

且当 $z\to 0$ 时

$$\sqrt{1-|z|^2}=1-z^2+o(z^2),$$

那么

$$\begin{aligned}h(y,z)-1=&\frac{(1-y^2+o(y^2))(1-z^2+o(z^2))[(1-y^2+o(y^2))+(1-z^2+o(z^2))]}{(1-z^2+o(z^2))(1-y^2+o(y^2))+1+yz}-1=\\&\frac{(1-y^2+o(y^2))(1-z^2+o(z^2))[(1-y^2+o(y^2))+(1-z^2+o(z^2))]}{2-z^2-y^2+yz+o(y^2)+o(z^2)}-1=\\&\frac{2-3y^2-3z^2+o(y^2)+o(z^2)}{2-z^2-y^2+yz+o(y^2)+o(z^2)}-1=\\&\frac{2-3y^2-3z^2-[2-y^2-z^2+yz]+o(y^2)+o(z^2)}{2-z^2-y^2+yz+o(y^2)+o(z^2)}=\\&\frac{-2y^2-2z^2-yz+o(y^2)+o(z^2)}{2-z^2-y^2+yz+o(y^2)+o(z^2)}.\end{aligned}$$

因此,$\lim\limits_{(y,z)\to(0,0)}\dfrac{h(y,z)-1}{\max\{|y|,|z|\}}=0$. 问题(2)等价于常差分方程边值问题

$$\begin{cases}-\nabla(\Delta u_t)+q_t u_t h(\Delta u_t,\Delta u_{t-1})=\lambda f(t,u_t)h(\Delta u_t,\Delta u_{t-1}),t\in\boldsymbol{T},\\ u_0=u_T,u_1=u_{T+1}.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-\nabla(\Delta u_t)+q_t u_t=\lambda f(t,u_t)h(\Delta u_t,\Delta u_{t-1})-q_t u_t(h(\Delta u_t,\Delta u_{t-1})-1),t\in\boldsymbol{T},\\ u_0=u_T,u_1=u_{T+1}.\end{cases}$$

由文献 [12]可知,问题(2)等价于算子方程

$$u_t=Au_t,$$

其中

$$Au_t:=\lambda\sum_{s=1}^{T}G(t,s)\bar{f}(s,u_s)h(\Delta u_s,\Delta u_{s-1})-\sum_{s=1}^{T}q_su_sG(t,s)(h(\Delta u_s,\Delta u_{s-1})-1),t\in\boldsymbol{T}\tag{4}$$

且 $G(t,s)>0,t,s\in\boldsymbol{T}$.

定义映射 $\Phi_\lambda:V^{T-1}\to V^{T-1}$ 为

$$\Phi_\lambda=\boldsymbol{u}-A\boldsymbol{u},$$

接下来我们将用 Brouwer 度理论计算其拓扑度. 记 $\deg(\Phi_\lambda,B_R,0)$ 为 Φ_λ 在 B_R 上关于 0 的拓扑度,其中 $B_R=\{\boldsymbol{u}\in V^{T-1}\mid\|\boldsymbol{u}\|_\infty<R\},\forall R>0$.

3 主要结果的证明

引理 3.1 如果 $\Lambda\subset[0,\infty)$ 是一个紧区间,且 $\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right]\cap\Lambda=\varnothing$,那么存在 $\varepsilon_1>0$,使得对于任意 $\lambda\in\Lambda$,有 $\Phi_\lambda(\boldsymbol{u})\neq0,\forall\boldsymbol{u}\in V^{T-1}:0<\|\boldsymbol{u}\|_\infty\leqslant\varepsilon_1$.

证明 反设存在 Λ 中的序列 $\{\sigma_j\}$ 与 V^{T-1} 中的序列 $\{\boldsymbol{u}^j\}$,满足 $\sigma_j\to\sigma_0\in\Lambda,\boldsymbol{u}^j\to0$,且使得

$$\Phi_{\sigma_j}(\boldsymbol{u}^j)=0,\forall j\in\mathbf{N}.$$

根据 $\bar{f},h$ 与 G 的非负性可得 $\boldsymbol{u}^j\geqslant0$.

令 $\boldsymbol{v}^j:=\boldsymbol{u}^j\|\boldsymbol{u}^j\|_\infty^{-1}$. 则

$$v_t^j=\sigma_j\sum_{s=1}^{T}G(t,s)m_s\frac{\bar{f}(t,u_s^j)h(\Delta u_s^j,\Delta u_{s-1}^j)}{u_s^j}v_s^j-\sum_{s=1}^{T}q_s^jv_s^jG(t,s)(h(\Delta u_s^j,\Delta u_{s-1}^j)-1).$$

根据条件(G3)可得

$$a_0(t)+\frac{\xi_1(t,u_t^j)}{u_t^j}\leqslant\frac{f(t,u_t^j)}{u_t^j}\leqslant a^0(t)+\frac{\xi_2(t,u_t^j)}{u_t^j}\tag{5}$$

因为 $j\to+\infty$ 时 $\boldsymbol{u}^j\to0$,所以由引理 2.2 可得

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{h(\Delta u_s^j,\Delta u_{s-1}^j)-1}{\max\{|\Delta u_s^j|,|\Delta u_{s-1}^j|\}}=0,$$

即

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{\sum_{s=1}^{T}q_s^jv_s^jG(t,s)(h(\Delta u_s^j,\Delta u_{s-1}^j)-1)}{\max\{|\Delta u_s^j|,|\Delta u_{s-1}^j|\}}=0.$$

再根据引理 2.2 可得 $\frac{\bar{f}(t,\boldsymbol{u}^j)h(\Delta\boldsymbol{u}^j,\Delta\boldsymbol{u}^j)}{\boldsymbol{u}^j}$ 为 V^{T-1} 中的有界集,即 $\boldsymbol{v}^j$ 为 V^{T-1} 中的相对紧集. 故存在 $\{\boldsymbol{v}^j\}$ 的子列(仍记为 $\{\boldsymbol{v}^j\}$)使得 $\boldsymbol{v}^j\to\bar{\boldsymbol{v}},j\to+\infty$,且 $\bar{\boldsymbol{v}}\geqslant0,\|\bar{\boldsymbol{v}}\|_\infty=1$.

令 $l(y,z)=h(y,z)-1$. 由引理 2.2 结合(5)式可得

$$a_0(t)+\frac{\xi_1(t,u_t^j)}{u_t^j}+(a_0(t)+\frac{\xi_1(t,u_t^j)}{u_t^j})l(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)\leqslant\frac{f(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}\leqslant a^0(t)+\frac{\xi_2(t,u_t^j)}{u_t^j}+\left(a^0(t)+\frac{\xi_2(t,u_t^j)}{u_t^j}\right)l((\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)).$$

记 ϕ^1 为 λ_1 所对应的特征函数. 则有

$$\begin{cases}-\nabla(\Delta\phi_t^1)+q_t\phi_t^1-\lambda_1\phi_t^1=0,t\in\boldsymbol{T},\\ \phi_0^1=\phi_T^1,\phi_1^1=\phi_{T+1}^1\end{cases}\tag{6}$$

又因为 v^j 满足

$$\begin{cases}-\nabla(\Delta v_t^j)+q_tv_th(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)-\mu_j\frac{\bar{f}(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}v_t^j=0,t\in\boldsymbol{T},\\ v_0^j=v_T^j,v_1^j=v_{T+1}^j\end{cases}\tag{7}$$

一方面,结合(6)与(7)式可得

$$\sum_{t=1}^{T}\left(-\nabla(\Delta v_t^j)+q_tv_th(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)-\mu_j\frac{\bar{f}(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}v_t^j\right)\phi_t^1-\sum_{t=1}^{T}(-\nabla(\Delta\phi_t^1)+q_t\phi_t^1-\lambda_1\phi_t^1)v_t^j=0\tag{8}$$

因为

$$\sum_{t=1}^{T}\nabla(\Delta v_t^j)\phi_t^1=\sum_{t=1}^{T}\nabla(\Delta\phi_t^1)v_t^j,$$

所以由(8)式可得

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\mu_j\frac{\bar{f}(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}-\lambda_1\right)\phi_t^1v_t^j+\sum_{t=1}^{T}q_tv_t\phi_t^1(h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)-1)=0\tag{9}$$

另一方面,因为$\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right]\cap\Lambda=\varnothing$,$\sigma_0\in\Lambda$,所以当 $\sigma_j>\frac{\lambda_1}{a_0}$时有

$$\lim_{j\to\infty}\left[\sum_{t=1}^{T}\left(\sigma_j\frac{\bar f(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}-\lambda_1\right)\phi_t^1 v_t^j+\sum_{t=1}^{T}q_t v_t\phi_t^1(h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)-1)\right]=$$

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{T}\left(\sigma_j\frac{\bar f(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}-\lambda_1\right)\phi_t^1 v_t^j\geqslant\sum_{t=1}^{T}(\sigma_0 a_0-\lambda_1)\phi_t^1\bar v_t>0.$$

这与(9)式矛盾！同理可证,当 $\sigma_j<\frac{\lambda_1}{a_0}$时也产生矛盾.假设错误.结论得证.

推论 3.2　对于任意的 $\lambda\in(0,\frac{\lambda_1}{a^0})$与 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$,有 $\deg(\Phi_\lambda,B_\varepsilon,0)=1$.

证明　由引理 3.1,若 $\Lambda=(0,\frac{\lambda_1}{a^0})$,则存在 $\varepsilon_1>0$,使得对于任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$,$\lambda\in\Lambda$,$\eta\in[0,1]$,$\boldsymbol{u}\in V^{T-1}$且 $0<\|\boldsymbol{u}\|_\infty\leqslant\varepsilon$,有 $\boldsymbol{u}-\eta A\boldsymbol{u}\neq0$.从而对于任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$有

$$\deg(\Phi_\lambda,B_\varepsilon,0)=\deg(I,B_\varepsilon,0)=1.$$

引理 3.3　如果 $\lambda>\frac{\lambda_1}{a_0}$,那么存在 $\varepsilon_2>0$,$\eta\geqslant0$,使得对于任意的 $\boldsymbol{u}\in V^{T-1}$且 $0<\|\boldsymbol{u}\|_\infty\leqslant\varepsilon_2$,有

$$\Phi_\lambda(\boldsymbol{u})\neq\eta\phi^1.$$

证明　反设存在 $\sigma_0\in(\frac{\lambda_1}{a_0},\infty)$,$\eta_0$,$\eta_j\in[0,1]$,$u^j\in V^T$ 满足 $\eta_j\to\eta_0$,$\|u^j\|_\infty\to0$,使得当 $j\to\infty$时

$$\Phi_{\sigma_0}(\boldsymbol{u}^j)=\eta_j\phi^1.$$

则

$$u_t^j=\sigma_0\sum_{s=1}^{T}G(t,s)\bar f(s,u_s^j)h(\Delta u_s^j,\Delta u_{s-1}^j)-\sum_{s=1}^{T}q_s^j u_s^j G(t,s)(h(\Delta u_s^j,\Delta u_{s-1}^j)-1)+\eta_j\phi^1.$$

由引理 3.1 的证明可得

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{\sum\limits_{s=1}^{T}q_s^j v_s^j G(h(\Delta u_s^j,\Delta u_{s-1}^j)-1)}{\max\{|\Delta u_s^j|,|\Delta u_{s-1}^j|\}}=0.$$

再根据引理 2.2 可得$\frac{\bar f(t,u^j)h(\Delta u^j,\Delta u^j)}{u^j}$为 V^T 中的有界集,即 $\boldsymbol{v}^j$ 为 V^T 中的相对紧集.故存在$\{\boldsymbol{v}^j\}$的子列(仍记为$\{\boldsymbol{v}^j\}$)使得 $\boldsymbol{v}^j\to\bar{\boldsymbol{v}}$,$j\to+\infty$且$\bar{\boldsymbol{v}}\geqslant0$,$\|\bar{\boldsymbol{v}}\|_\infty=1$,并满足

$$\begin{cases}-\nabla(\Delta v_t^j)+q_t\boldsymbol{v}_t h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)-\sigma_j\dfrac{\bar f(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}v_t^j+\eta_j\lambda_1\dfrac{\phi_t^1}{\|\boldsymbol{u}^t\|_\infty}=0,t\in\boldsymbol{T},\\ v_0^j=v_T^j,v_1^j=v_{T+1}^j\end{cases}\tag{10}$$

一方面,结合(6)与(10)式可得

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\sigma_j\frac{\bar f(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}-\lambda_1\right)\phi_t^1 v_t^j+\sum_{t=1}^{T}q_t v_t\phi_t^1(h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)-1)+\eta_j\lambda_1\frac{\phi_t^1}{\|\boldsymbol{u}^j\|_\infty}=0.$$

另一方面,因为 $\sigma_0\in(\frac{\lambda_1}{a_0},\infty)$,所以

$$\lim_{j\to\infty}\left[\sum_{t=1}^{T}\left(\sigma_j\frac{\bar f(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}-\lambda_1\right)\phi_t^1 v_t^j+\sum_{t=1}^{T}q_t v_t\phi_t^1(h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)-1)+\eta_j\lambda_1\frac{\phi_t^1}{\|\boldsymbol{u}^j\|_\infty}\right]=$$

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{T}\left(\sigma_j\frac{\bar f(t,u_t^j)h(\Delta u_t^j,\Delta u_{t-1}^j)}{u_t^j}-\lambda_1\right)\phi_t^1 v_t^j+\eta_j\lambda_1\sum_{t=1}^{T}(\phi_t^1)^2\geqslant\sum_{t=1}^{T}(\sigma_0 a_0-\lambda_1)\phi_t^1 u_t^*>0.$$

显然矛盾！假设错误.结论得证.

推论 3.4　对于任意的 $\lambda>\frac{\lambda_1}{a_0}$与 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$有,$\deg(\Phi_\lambda,B_\varepsilon,0)=0$.

证明　令 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$.由于 Φ_λ 在 B_ε 上是有界的,则存在 $c>0$ 使得 $\Phi_\lambda(\boldsymbol{u})\neq c\phi^1$,$\forall\boldsymbol{u}\in B_\varepsilon$.再根据引理 3.3 可得,$\forall\eta\in[0,1]$,有 $\Phi_\lambda(\boldsymbol{u})\neq\eta c\phi^1$,所以

$$\deg(\Phi_\lambda,B_\varepsilon,0)=\deg(\Phi_\lambda-c\phi^1,B_\varepsilon,0)=0.$$

定理 1.3 的证明　问题(4)在平凡解线上存在唯一的正解的分歧区间$\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right]$,且存在一条问题

(2)正解的无界连通分支 C 从区间 $\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right]\times\{0\}$ 分歧出,并满足

$$C\cap\left[\left(\mathbf{R}\backslash\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right]\right)\times\{0\}\right]=\varnothing$$

事实上,根据引理 3.1 与引理 3.3,对于任意给定的 $n\in\mathbf{N}$,满足 $\frac{\lambda_1}{a^0}-\frac{1}{n}>0$,且当 n 充分大时存在 $R_n>0$ 使得对于任意给定的 $r\leqslant R_n$,定理 1.2 的条件都满足. 从而存在问题(4)正解的连通分支 C_n 使得以下情形之一成立:

(c_1) C_n 在 λ 轴方向上是无界的;

(c_2)存在区间 (c,d) 满足 $\left(\frac{\lambda_1}{a^0}-\frac{1}{n},\frac{\lambda_1}{a_0}+\frac{1}{n}\right)\cap(c,d)=\phi$,且使得 C_n 连接 $[c,d]\times\{\infty\}$.

若 $\boldsymbol{u}$ 是问题(2)的解,则根据 $\max_{t\in\hat{\mathrm{T}}}|\Delta u_t|<1$ 可得 $\|\boldsymbol{u}\|_\infty<\frac{T}{2}$. 这就说明上述情形($c_2$)不会发生. 因此 C_n 是从 $\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right]\times\{0\}$ 处分歧出的在 λ 轴方向上无界的连通分支.

容易验证,当 $\lambda\to\infty$ 时, $\|\boldsymbol{u}\|_\infty\to\frac{T}{2}$. 根据引理 3.1 可得,对于任意的闭子集

$$I\subset\left[\frac{\lambda_1}{a^0}-\frac{1}{n},\frac{\lambda_1}{a_0}+\frac{1}{n}\right]\backslash\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right],$$

有 $\{\boldsymbol{u}\in V^{T-1}\,|\,(\lambda,\boldsymbol{u})\in\sum,\lambda\in I\}$ 在 V^{T-1} 中有界,所以 C_n 是问题(2)从 $\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right]$ 处分歧出的且在 λ 轴方向上无界的正解集的连通分支. 因此,问题(2)存在一条从 $\left[\frac{\lambda_1}{a^0},\frac{\lambda_1}{a_0}\right]\times\{0\}$ 分歧出的且在 λ 轴方向上无界的正解集的连通分支 $C\subset(0,\infty)\times V^{T-1}$. 又因为当 $\lambda=0$ 时问题(2)只有平凡解,所以

$$Proj_{\mathbf{R}}C\supseteq\left(\frac{\lambda_1}{a_0},\infty\right) \tag{11}$$

注 1 如果 $a_0=a^0$,那么从 $\left(\frac{\lambda_1}{a_0},0\right)$ 处分歧出的问题(2)正解集的无界连通分支 C 在 λ 轴方向上无界并且满足(11)式.

参考文献:

[1] Bereanu C, Mawhin J. Boundary value problems for second order nonlinear difference equations with discrete Φ-Laplacian and singular Φ [J]. J Diff Equ Appl, 2008, 14: 1099.

[2] Ma R, Lu Y. Existence and multiplicity of solutions of second-order discrete Neumann problem with singular Φ-Laplacian operator [J]. Adv Diff Equ, 2014, 2014: 1.

[3] Bereanu C, Mawhin J. Nonhomogeneous boundary value problems for some nonlinear equations with singular Φ-Laplacian [J]. J Math Anal Appl, 2009, 352: 218.

[4] Rabinowitz P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems [J]. J Funct Anal, 1971, 7: 487.

[5] Ambrosetti A, Hess P. Positive solutions of asymptotically linear elliptic eigenvalue problems [J]. J Math Anal Appl, 1980, 73: 411.

[6] Constantin A. A general-weighted Sturm-Liouville problem [J]. Ann Sc Norm Super Pisa, 1997, 24: 767.

[7] Coelho I, Corsato C, Obersnel F. Positive solutions of the Dirichlet problem for the one-dimensional Minkowski-curvature equation [J]. Adv Nonlinear Stud, 2012, 12: 621.

[8] 马满堂. 一类非线性二阶常微分方程周期问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 693.

[9] 叶芙梅. 线性二阶周期边值问题正解的全局结构[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 452.

[10] Xu J, Ma R Y, Bifurcation from interval and positive solutions for second order periodic boundary value problems [J]. Appl Math Comput, 2010, 216: 2463.

[11] Rabinowitz P H. Some aspects of nonlinear eigenvalue problems [J]. Rocky Mountain J Math, 1973, 3: 161.

[12] Kelley W G, Peterson A C. Difference equations: an introduction with applications [M]. New York: Academic Press, 1991.

引用本文格式:

中 文: 龙严. 带 Φ-Laplacian 算子的差分方程周期边值问题正解集的全局结构[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 827.

英 文: Long Y. Global structure of positive solutions of periodic boundary value problem of difference equation involving Φ -Laplacian operator [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 827.