doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.05.001

一类含参数的多时滞微分方程的正周期解

张　璐，杨　和
（西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070）

摘　要：本文运用锥上的 Krasnoselskii 不动点定理研究了一类含参数的多时滞微分方程正 ω-周期解的存在性，并证明了其正 ω-周期解的多重性定理以及不存在性定理.

关键词：多时滞微分方程；正周期解；存在性；多重性；不动点定理
中图分类号：O177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)05-0785-07

Positive periodic solutions for a class of differential equations involving parameter and multiple delays

ZHANG Lu，*YANG He*
(College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China)

Abstract：In this paper，we use Krasnoselskii's fixed point theorem on cones to study existence of positive ω-periodic solutions for a class of differential equations involving parameter and multiple delays. We prove some theorems about the multiplicity and the theorem on nonexistence of positive ω-periodic solutions.

Keywords：Delayed differential equation；Positive periodic solution；Existence；Multiplicity；Fixed point theorem
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

在物理、化学和生物学等应用学科领域中周期现象是普遍存在的. 这些周期现象的数学模型常常用微分方程的周期性来描述，例如方程

$$x'(t)=-a(t)x(t)+b(t)\frac{1}{1+x(t-\tau_t)^n},n>0$$

可以用来描述血细胞的生成、呼吸及心率失常模型和果蝇模型等，其周期解就可以刻画这些过程的周期现象，参见文献[1-6].

许多数学工具都可以用来证明微分方程周期解的存在性，例如 Krasnoselskii 不动点理论[7-8]，锥上的不动点理论[9]，Leray-Schauder 不动点定理和叠合度理论[10-11]等. 但在实际应用中正周期解具有更加重要的意义.

在文献[12]中，王应用锥上不动点理论及锥上不动点指数的性质研究了含参数的泛函微分方程

$$x'(t)=a(t)g(x(t))x(t)-\lambda b(t)f(x(t-\tau(t)))$$

正 ω-周期解的存在性、多重性和不存在性，其中 $a(t)$，$b(t)$ 是以 ω 为周期的正值连续函数，$\tau(t)$ 是以 ω 为周期的连续函数，$\lambda>0$ 为参数，g，f 是满足一定条件的函数. 随后，武[13]将文献[12]的结论推广到了更一般的方程

$$x'(t)=-a(t)g(x(t))x(t)+\lambda f(t,x(t-\tau(t)))$$

收稿日期：2018-10-24
基金项目：国家自然科学基金青年基金(11701457)；甘肃省科技计划(17JR5RA071)
作者简介：张璐(1993－)，女，硕士生，主要研究方向为非线性泛函分析. E-mail：zhlu223@163.com
通讯作者：杨和. E-mail：yanghe256@163.com

上，并证明了该方程正 ω-周期解的存在性，多重性以及不存在性. 本文将用更加精细的锥上的不动点理论研究一类含参数的多时滞微分方程

$$x'(t)=-a(t)g(x(t))x(t)+\lambda b(t)f(t,x(t-\tau_0(t)),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t))) \quad (1)$$

正 ω-周期解的存在性、多重性以及不存在性，其中 $a,b\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 是以 ω 为周期的函数，$\tau_i\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$i=0,1,\cdots,n$ 是 ω-周期函数，$\lambda>0$ 是参数，$g\in C([0,\infty),[0,\infty))$，$f\in C(\mathbf{R}\times[0,\infty)^{n+1},[0,\infty))$ 是关于 t 以 ω-为周期的函数. 为此本文首先将文献[10]中的方程扩展到含 $n+1$ 个时滞的情形，重新计算其 *Green* 函数. 其次，通过锥拉伸与锥压缩不动点定理得到锥 $K\cap\partial\Omega_r$ 上的不动点，即方程(1)的正 ω-周期解. 再次，对商 $\dfrac{f(t,x_0,x_1,\cdots,x_n)}{|x|}$ 作更加精细地划分，得到 $\bar{f}_0$，$\underline{f}_0$，$\bar{f}_\infty$，$\underline{f}_\infty$，从而通过商在零点附近和无穷远处的渐近性质确定解的个数. 最后，本文还证明了方程(1)正 ω-周期解的不存在性.

为了证明本文的主要结论，我们首先引入如下假设条件：

(H1) $a,b\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 是 ω-周期函数，$\int_0^\omega a(t)\mathrm{d}t>0$，$\int_0^\omega b(t)\mathrm{d}t>0$；

(H2) $f\in C(\mathbf{R}\times[0,\infty)^{n+1},[0,\infty))$ 是关于 t 以 ω 为周期的函数，$f(t,x_0,x_1,\cdots,x_n)>0$，其中 $x_i\geqslant 0$ 且 $x_i\neq 0$，$i=0,1,\cdots,n$；

(H3) $g\in C([0,\infty),[0,\infty))$，满足 $0<L_1\leqslant g(x)\leqslant L_2<\infty$，其中 $x\geqslant 0$，L_1,L_2 是常数.

2　预备知识

设 $X=\{x:x\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),x(t+\omega)=x(t)\}$. 定义 X 上的范数为 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,\omega]}|x(t)|$，$\forall x\in X$. 则 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间. 定义 X 上的锥 K 如下：

$$K=\{x\in X:x(t)\geqslant\alpha\|x\|,t\in[0,\omega]\},$$

其中 $\alpha=\dfrac{\sigma^{2L_2}(1-\sigma^{L_1})}{(1-\sigma^{L_2})\sigma^{L_1}}$，$\sigma=\mathrm{e}^{-\int_0^\omega a(t)\mathrm{d}t}$. 易见 $0<\sigma<1$.

引理 2.1　若 $x\in X$ 是方程(1)的 ω-周期解，则 x 可表示为

$$x(t)=\lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)b(s)F(x)(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}-1},$$

$$F(x)(t)=f(t,x(t-\tau_0(t)),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t))),$$

并且 $G(t,s)$ 满足

$$0<\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}<G(t,s)<\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}},t<s\leqslant t+\omega \quad (2)$$

证明　因为方程(1)等价于方程

$$(\mathrm{e}^{\int_0^t a(s)g(x(s))\mathrm{d}s}x(t))'=\mathrm{e}^{\int_0^t a(s)g(x(s))\mathrm{d}s}\lambda b(t)F(x)(t) \quad (3)$$

所以将(3)式两端从 t 到 $t+\omega$ 积分可得

$$(\mathrm{e}^{\int_0^{t+\omega}a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}-\mathrm{e}^{\int_0^t a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}s})x(t)=\int_t^{t+\omega}\mathrm{e}^{\int_0^s a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}\lambda b(s)F(x)(s)\mathrm{d}s \quad (4)$$

因为

$$(\mathrm{e}^{\int_0^{t+\omega}a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}-\mathrm{e}^{\int_0^t a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}s})x(t)=(\mathrm{e}^{\int_0^t a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta+\int_t^{t+\omega}a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}-\mathrm{e}^{\int_0^t a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}s})x(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}(\mathrm{e}^{\int_t^{t+\omega}a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}-1)x(t),$$

所以(4)式可以改写为

$$\mathrm{e}^{\int_0^t a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}(\mathrm{e}^{\int_t^{t+\omega}a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}-1)x(t)=\int_t^{t+\omega}\mathrm{e}^{\int_0^s a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}\lambda b(s)F(x)(s)\mathrm{d}s.$$

因此我们有

$$x(t)=\lambda\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_0^s a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{e}^{\int_0^t a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}(\mathrm{e}^{\int_t^{t+\omega}a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}-1)}b(s)F(x)(s)\mathrm{d}s=$$
$$\lambda\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_0^s a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}\mathrm{e}^{\int_t^0 a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{e}^{\int_t^{t+\omega}a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}-1}b(s)F(x)(s)\mathrm{d}s=\lambda\int_t^{t+\omega}\frac{\mathrm{e}^{\int_t^s a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{e}^{\int_0^\omega a(\theta)g(x(\theta))\mathrm{d}\theta}-1}b(s)F(x)(s)\mathrm{d}s.$$

因为 $\sigma^{-L_2} = e^{-\int_0^\omega a(t)dt\cdot(-L_2)} > 1$，所以 $\sigma^{-L_2}-1>0$，故 $\frac{1}{\sigma^{-L_2}-1}>0$. 同理可得 $\frac{1}{\sigma^{-L_1}-1}>0$. 又因为

$$1 \leqslant e^{\int_t^s a(\theta)g(x(\theta))d\theta} \leqslant \sigma^{-L_2},$$

$$\sigma^{-L_1} \leqslant e^{\int_0^\omega a(\theta)g(x(\theta))d\theta} \leqslant \sigma^{-L_2},$$

所以

$$0<\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}},t<s\leqslant t+\omega.$$

引理得证.

定义算子 $T_\lambda:X\to X$ 如下：

$$T_\lambda x(t) = \lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)b(s)F(x)(s)ds \tag{5}$$

引理 2.2　设条件(H1)～(H3)成立. 则方程(1)的正 ω-周期解等价于算子 T_λ 在锥 K 中的不动点.

证明　如果 $x\in K$ 满足 $T_\lambda(x)=x$，则

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(\lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)b(s)F(x)(s)ds) =$$
$$\lambda G(t,t+\omega)b(t+\omega)F(x)(t+\omega)-\lambda G(t,t)b(t)F(x)(t)-\lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(t)g(x(t))b(s)F(x)(s)ds =$$
$$\lambda b(t)F(x)(t)[G(t,t+\omega)-G(t,t)]-a(t)g(x(t))T_\lambda x(t) = \lambda b(t)F(x)(t)-a(t)g(x(t))x(t).$$

所以 x 是方程(1)的正 ω-周期解.

反过来，如果 x 是方程(1)的正 ω-周期解，即 x 满足方程

$$\lambda b(t)F(x)(t)=x'(t)+a(t)g(x(t))x(t),$$

则由引理 1 可得

$$T_\lambda x(t) = \lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)b(s)F(x)(s)ds = \int_t^{t+\omega}(x'(s)+a(s)g(x(s))x(s))G(t,s)ds =$$
$$x(t)G(t,s)\Big|_t^{t+\omega}-\int_t^{t+\omega}a(s)g(x(s))x(s)G(t,s)ds+\int_t^{t+\omega}a(s)g(x(s))x(s)G(t,s)ds =$$
$$x(t)[G(t,t+\omega)-G(t,t)] = x(t).$$

结论得证.

引理 2.3　设条件(H1)～(H3)成立. 则 $T_\lambda(K)\subset K$ 且 $T_\lambda:K\to K$ 是全连续算子.

证明　$\forall x\in K$，由锥 K 的定义可知

$$T_\lambda x(t+\omega) =$$
$$\lambda\int_{t+\omega}^{t+2\omega}G(t+\omega,s)b(s)F(x)(s)ds =$$
$$\lambda\int_t^{t+\omega}G(t+\omega,\theta+\omega)b(\theta+\omega)F(x)(\theta+\omega)d\theta =$$
$$\lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)b(s)F(x)(s)ds =$$
$$T_\lambda x(t).$$

又因为 $b(t)F(x)(t)$ 是周期函数，所以由(2)式可得

$$T_\lambda x(t) = \lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)b(s)F(x)(s)ds \geqslant$$
$$\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda\int_t^{t+\omega}b(s)F(x)(s)ds =$$
$$\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda\int_0^{\omega}b(s)F(x)(s)ds.$$

且

$$T_\lambda x(t) = \lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)b(s)F(x)(s)ds \leqslant$$
$$\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\lambda\int_t^{t+\omega}b(s)F(x)(s)ds =$$
$$\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\lambda\int_0^{\omega}b(s)F(x)(s)ds.$$

对上式两边取范数可得

$$\|T_\lambda x\| = \sup_{t\in[0,\omega]}|(T_\lambda x)(t)|\leqslant$$
$$\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\lambda\int_0^{\omega}b(s)F(x)(s)ds.$$

因而

$$(T_\lambda x)(t)\geqslant\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\frac{1-\sigma^{L_1}}{\sigma^{L_1-L_2}}\|T_\lambda x\| =$$
$$\frac{\sigma^{2L_2}(1-\sigma^{L_1})}{(1-\sigma^{L_2})\sigma^{L_1}}\|T_\lambda x\| =\alpha\|T_\lambda x\|,$$

其中 $\alpha=\frac{\sigma^{2L_2}(1-\sigma^{L_1})}{(1-\sigma^{L_2})\sigma^{L_1}}$. 因此 $T_\lambda(K)\subset K$. 由 Arzela-Ascolis 定理可知 $T_\lambda:K\to K$ 是全连续算子. 由此，引理得证.

引理 2.4　设条件(H1)～(H3)成立. 则有如下结论：

(i) $\forall \eta_i>0$, $i=0,1,2,\cdots,n$,如果
$$f(t,x(t-\tau_0(t)),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t)))\geqslant\sum_{i=0}^{n}\eta_i x(t-\tau_i(t))\qquad(6)$$
其中 $x\in K,t\in\mathbf{R}$, $i=0,1,2.\cdots,n$, 则
$$\|T_\lambda x\|\geqslant\frac{\lambda\alpha\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\sum_{i=0}^{n}\eta_i\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s\,\|x\|;$$
(ii) $\forall\varepsilon_i>0$, $i=0,1,2,\cdots,n$, 如果
$$f(t,x(t-\tau_0(t)),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t)))\leqslant\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i x(t-\tau_i(t)),$$
其中 $x\in K,t\in\mathbf{R}$, $i=0,1,2.\cdots,n$, 则
$$\|T_\lambda x\|\leqslant\frac{\lambda\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i\int_0^\omega b(s)ds\,\|x\|.$$

证明 (i) 因为 $x\in K$, 由(5)式和(6)式可得
$$(T_\lambda x)\geqslant\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda\int_t^{t+\omega}b(s)F(x)(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda\int_t^{t+\omega}b(s)\sum_{i=0}^{n}\eta_i x(s-\tau_i(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda\sum_{i=0}^{n}\eta_i\int_t^{t+\omega}b(s)\mathrm{d}s\alpha\|x\|=\frac{\lambda\alpha\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\sum_{i=0}^{n}\eta_i\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s\,\|x\|.$$
因此,
$$\|T_\lambda x\|\geqslant\frac{\lambda\alpha\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\sum_{i=0}^{n}\eta_i\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s\,\|x\|.$$
(ii) 此证明与(1)的证明类似,故不再赘述.引理得证.

$\forall r>0$, 令
$$m(r)=\min\{F(x)(t),0\leqslant t\leqslant\omega,\ \alpha r\leqslant x(t-\tau_i(t))\leqslant r,i=0,1,2,\cdots,n\},$$
$$M(r)=\max\{F(x)(t),0\leqslant t\leqslant\omega,\ 0\leqslant x(t-\tau_i(t))\leqslant r,i=0,1,2,\cdots,n\}.$$
由(2)式和(5)式可得如下引理.

引理 2.5 设条件(H1)~(H3)成立.若 $x\in K\cap\partial\Omega_r:=\{x\in K:\|x\|=r,r>0\}$,则
$$\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda m(r)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s\leqslant\|T_\lambda x\|\leqslant\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\lambda M(r)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s.$$

证明 $\forall x\in K\cap\partial\Omega_r$, 因为 $\alpha r=\alpha\|x\|\leqslant x(t-\tau_i(t))\leqslant\|x\|=r$, $i=0,1,2,\cdots,n$, 所以由(2)式和(5)式可得
$$\|T_\lambda x\|\geqslant\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda\int_t^{t+\omega}b(s)F(x)(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda m(r)\int_t^{t+\omega}b(s)\mathrm{d}s=\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda m(r)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s.$$
因此
$$\|T_\lambda x\|=\sup_{t\in[0,\omega]}|(T_\lambda x)(t)|\geqslant\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda m(r)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s.$$
同理可得
$$\|T_\lambda x\|\leqslant\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\lambda M(r)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s.$$
引理得证.

引理 2.6[14,15] 设 X 是 Banach 空间,K 是 X 上的闭凸锥,Ω_1,Ω_2 是 X 中的有界开集,$\theta\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $T:K\cap(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)\to K$ 是一个全连续算子.假设 T 满足下列条件之一:

(i) $\|Tu\|\geqslant\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_1$, $\|Tu\|\leqslant\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_2$;

(ii) $\|Tu\|\leqslant\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_1$, $\|Tu\|\geqslant\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_2$,

则 T 在 $K\cap(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)$中至少有一个不动点.

3 主要结果

$\forall r>0$, 记 $\Omega_r=\{x\in K:\|x\|<r\}$, $\partial\Omega_r=\{x\in K:\|x\|=r\}$. $\forall x\in K$, 令
$$\Phi(t)=(x(t-\tau_0(t)),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_n(t))).$$
定义
$$|\Phi(t)|=\max\{x(t-\tau_i(t)),i=0,1,\cdots,n\}.$$
为了叙述方便,我们引入如下记号:
$$\bar{f}_0=\limsup_{|\Phi(t)|\to0^+}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,\Phi(t))}{|\Phi(t)|},$$
$$\underline{f}_0=\liminf_{|\Phi(t)|\to0^+}\min_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,\Phi(t))}{|\Phi(t)|},$$
$$\bar{f}_\infty=\limsup_{|\Phi(t)|\to+\infty}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,\Phi(t))}{|\Phi(t)|},$$
$$\underline{f}_\infty=\liminf_{|\Phi(t)|\to+\infty}\min_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,\Phi(t))}{|\Phi(t)|}.$$
i_0 =集合$\{\bar{f}_0,\bar{f}_\infty\}$中的元素为零的个数,

i_∞ =集合$\{\bar{f}_0,\bar{f}_\infty\}$中的元素为无穷的个数,

j_0 =集合$\{\underline{f}_0,\underline{f}_\infty\}$中的元素为零的个数,

j_∞ =集合$\{\underline{f}_0,\underline{f}_\infty\}$中的元素为无穷的个数.

定理 3.1 设条件(H1)~(H3)成立.则

(i) 如果 $i_0=1$ 或 2, 则当 $\lambda>$

$\dfrac{1-\sigma^{L_2}}{m(1)\sigma^{L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}>0$ 时，方程(1)至少有 i_0 个正 ω-周期解；

(ii) 如果 $j_\infty=1$ 或 2，则当 $0<\lambda<\dfrac{\sigma^{-L_1}-1}{\sigma^{-L_2}M(1)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}$ 时，方程(1)至少有 j_∞ 个正 ω-周期解；

(iii) 如果 $i_\infty=0$ 或 $j_0=0$，则当 $\lambda>0$ 足够大或足够小时，方程(1)没有正 ω-周期解.

证明　(i) 取 $r_1=1$，由引理 2.5 可得，存在参数 $\lambda_0=\dfrac{1-\sigma^{L_2}}{m(1)\sigma^{L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}>0$，当 $\lambda>\lambda_0$ 时，对 $x\in K\cap\partial\Omega_{r_1}$，有

$$\|T_\lambda x\|\geqslant\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda m(1)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s>\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\lambda_0 m(1)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s=1=\|x\|.$$

如果 $\bar f_0=0$，则由 $\bar f_0$ 的定义，$\forall\varepsilon_i>0$，$i=0,1,\cdots,n$，满足

$$\lambda\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s\sum_{i=0}^n\varepsilon_i<1\tag{7}$$

存在 $r_2\in(0,r_1)$，使得当 $0<|\Phi(t)|<r_2$ 时，有 $f(t,\Phi(t))\leqslant\sum_{i=0}^n\varepsilon_i|\Phi(t)|$. 因此，$\forall x\in K\cap\partial\Omega_{r_2}$ 且 $0<\alpha r_2=\alpha\|x\|\leqslant|\Phi(t)|\leqslant\|x\|=r_2$，有

$$f(t,\Phi(t))\leqslant\sum_{i=0}^n\varepsilon_i|\Phi(t)|.$$

由引理 2.4 之(ii)可得 $\|T_\lambda x\|<\|x\|$. 再由引理 2.6 之(ii)可得 T_λ 在 $K\cap(\Omega_{r_1}\setminus\bar\Omega_{r_2})$ 中至少有一个不动点，即得到方程(1)的一个正 ω-周期解.

如果 $\bar f_\infty=0$，由 $\bar f_\infty$ 的定义，$\forall\varepsilon_i>0$，$i=0,1,\cdots,n$，满足(7)式，存在 $P_1>0$. 取 $r_3=\max\{2r_1,\dfrac{P_1}{\alpha}\}$. 当 $|\Phi(t)|\geqslant P_1$ 时，有 $f(t,\Phi(t))\leqslant\sum_{i=0}^n\varepsilon_i|\Phi(t)|$. 因此，$\forall x\in K\cap\partial\Omega_{r_3}$ 且 $|\Phi(t)|\geqslant\alpha\|x\|=\alpha r_3\geqslant P_1$，有 $f(t,\Phi(t))\leqslant\sum_{i=0}^n\varepsilon_i|\Phi(t)|$. 由引理 2.4 之(ii)得 $\|T_\lambda x\|<\|x\|$. 再由引理 2.6 之(ii)，又得到 T_λ 在 $K\cap(\Omega_{r_3}\setminus\bar\Omega_{r_1})$ 中至少有一个不动点，即得到方程(1)的一个正 ω-周期解.

所以，当 $\bar f_0=0$ 和 $\bar f_\infty=0$ 时，T_λ 在 $K\cap(\Omega_{r_1}\setminus\bar\Omega_{r_2})$ 中至少有一个不动点 x_1，在 $K\cap(\Omega_{r_3}\setminus\bar\Omega_{r_1})$ 中又至少有一个不动点 x_2，且 $x_1\neq x_2$，即当 $\lambda>\lambda_0$ 时方程(1)至少有两个正 ω-周期解.

(ii) 取 $r_1=1$. 由引理 2.5 可得，存在参数 $\lambda_1=\dfrac{1-\sigma^{L_1}}{M(1)\sigma^{L_1-L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}>0$，当 $0<\lambda<\lambda_1$ 时，对 $x\in K\cap\partial\Omega_{r_1}$，有

$$\|T_\lambda x\|\leqslant\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\lambda M(1)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s<\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\lambda_1 M(1)\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s=1=\|x\|.$$

如果 $\underline{f}_0=\infty$，由 $\underline{f}_0$ 的定义，$\forall\eta_i>0,i=0,1,\cdots,n$，满足

$$\lambda\alpha\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s\sum_{i=0}^n\eta_i>1\tag{8}$$

存在 $r_4\in(0,r_1)$，当 $0<|\Phi(t)|\leqslant r_4$ 时有 $f(t,\Phi(t))\geqslant\sum_{i=0}^n\eta_i|\Phi(t)|$. 因此，$\forall x\in K\cap\partial\Omega_{r_4}$ 且 $0<\alpha r_4=\alpha\|x\|\leqslant|\Phi(t)|\leqslant\|x\|=r_4$，有 $f(t,\Phi(t))\geqslant\sum_{i=0}^n\eta_i|\Phi(t)|$. 由引理 2.4 之(i) 可得

$\|T_\lambda x\|>\|x\|$. 再由引理 2.6 之(i) 可得，T_λ 在 $K\cap(\Omega_{r_1}\setminus\bar\Omega_{r_4})$ 中至少有一个不动点，即得到方程(1) 的一个正 ω- 周期解.

如果 $\underline{f}_\infty=\infty$，由 $\underline{f}_\infty$ 的定义，$\forall\eta_i>0$，$i=0,1,\cdots,n$，满足(8)式，存在 $P_2>0$，取 $r_5=\max\{2r_1,\dfrac{P_2}{\alpha}\}$，当 $|\Phi(t)|\geqslant P_2$，有 $f(t,\Phi(t))\geqslant\sum_{i=0}^n\eta_i|\Phi(t)|$. 因此，$\forall x\in K\cap\partial\Omega_{r_5}$ 且 $|\Phi(t)|\geqslant\alpha\|x\|=\alpha r_5\geqslant P_2$，有 $f(t,\Phi(t))\geqslant\sum_{i=0}^n\eta_i|\Phi(t)|$. 由引理 2.4 之(i) 得 $\|T_\lambda x\|>\|x\|$. 再由引理 2.6 之(i) 又可以得到 T_λ 在 $K\cap(\Omega_{r_5}\setminus\bar\Omega_{r_1})$ 中至少有一个不动点，即得到方程(1) 的一个正 ω- 周期解.

所以，当 $\underline{f}_0=\infty$ 和 $\underline{f}_\infty=\infty$ 时，T_λ 在 $K\cap(\Omega_{r_1}\setminus\bar\Omega_{r_4})$ 中至少有一个不动点 x_3，在 $K\cap(\Omega_{r_5}\setminus\bar\Omega_{r_1})$ 中又至少一个不动点 x_4，且 $x_3\neq x_4$，即当 $0<\lambda<\lambda_1$ 时方程(1) 至少有两个正 ω- 周期解.

(iii) 如果 $j_0=0$，则 $\underline{f}_0>0$ 且 $\underline{f}_\infty>0$. 取 $r_6<r_7$. $\forall\eta_{1,i},\eta_{2,i}>0$，有

$$f(t,\Phi(t))\geqslant\sum_{i=0}^n\eta_{1,i}|\Phi(t)|,\quad |\Phi(t)|\in[0,r_6],$$

$$f(t,\Phi(t))\geqslant\sum_{i=0}^n\eta_{2,i}|\Phi(t)|,\quad |\Phi(t)|\in[r_7,+\infty).$$

取 $c_1 = \min\{\sum_{i=0}^{n}\eta_{1,i}, \sum_{i=0}^{n}\eta_{2,i}, \min\{\frac{f(t,\Phi(t))}{|\Phi(t)|}: 0 < t \leqslant \omega, r_6 \leqslant |\Phi(t)| \leqslant r_7\}\}$，则 $c_1>0$. 且有

$$f(t,\Phi(t))\geqslant c_1|\Phi(t)|, \Phi(t)\in[0,+\infty]^{n+1}, t\in[0,\omega] \tag{9}$$

反证法. 假设 $v(t)$ 是方程(1)的正 ω-周期解，则 $T_\lambda v(t)=v(t)$，$t\in[0,\omega]$. 当

$$\lambda > \frac{1-\sigma^{L_1}}{c_1\sigma^{L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}$$

时，可得

$$\|v\| = \|T_\lambda v\| \geqslant \lambda\alpha c_1\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s \|v\| > \|v\|.$$

矛盾！故假设不成立.

如果 $i_\infty=0$，则 $\overline{f}_0<\infty$且 $\overline{f}_\infty<\infty$. 取 $r_8<r_9$，$\forall \varepsilon_{1,i},\varepsilon_{2,i}>0$，有

$$f(t,\Phi(t)) \leqslant \sum_{i=0}^{n}\varepsilon_{1,i}|\Phi(t)|, |\Phi(t)|\in[0,r_8],$$

$$f(t,\Phi(t)) \leqslant \sum_{i=0}^{n}\varepsilon_{2,i}|\Phi(t)|, |\Phi(t)|\in[r_9,+\infty).$$

取 $c_2 = \max\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_{1,i}, \sum_{i=0}^{n}\varepsilon_{2,i}, \max\{\frac{f(t,\Phi(t))}{|\Phi(t)|}: 0 < t \leqslant \omega, r_8 \leqslant |\Phi(t)| \leqslant r_9\}\}$，则 $c_2>0$. 且有

$$f(t,\Phi(t))\leqslant c_2|\Phi(t)|, \Phi(t)\in[0,+\infty]^{n+1}, t\in[0,\omega] \tag{10}$$

反证法. 假设 $v(t)$ 是方程(1)的正 ω-周期解，则 $T_\lambda v(t)=v(t)$，$t\in[0,\omega]$. 当

$$0<\lambda<\frac{1-\sigma^{L_1}}{c_2\sigma^{L_1-L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}$$

时，可得

$$\|v\| = \|T_\lambda v\| \leqslant \lambda c_2\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s\|v\| < \|v\|.$$

矛盾！故假设不成立. 定理得证.

定理 3.2 设条件(H1)～(H3)成立，并且 $i_0=i_\infty=j_0=j_\infty=0$.

(i) 如果 $\overline{f}_0<\underline{f}_\infty$，则当

$$\frac{\sigma^{-L_2}-1}{\alpha\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\underline{f}_\infty} < \frac{\sigma^{-L_1}-1}{\sigma^{-L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\overline{f}_0}$$

时，方程(1)至少有一个正 ω-周期解；

(ii) 如果 $\underline{f}_0>\overline{f}_\infty$，则当

$$\frac{\sigma^{-L_2}-1}{\alpha\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\underline{f}_0} < \frac{\sigma^{-L_1}-1}{\sigma^{-L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\cdot\frac{1}{\overline{f}_\infty}$$

时，方程(1)至少有一个正 ω-周期解.

证明 (i). 假设 $\overline{f}_0<\underline{f}_\infty$. 当

$$\frac{\sigma^{-L_2}-1}{\alpha\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\underline{f}_\infty} < \lambda < \frac{\sigma^{-L_1}-1}{\sigma^{-L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\overline{f}_0}$$

时，存在 $0<\varepsilon<\underline{f}_\infty$，使得

$$\frac{\sigma^{-L_2}-1}{\alpha\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\underline{f}_\infty-\varepsilon} < \lambda < \frac{\sigma^{-L_1}-1}{\sigma^{-L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\overline{f}_0+\varepsilon} \tag{11}$$

由 $\overline{f}_0$ 的定义，取 $r_{10}>0$，当 $0<|\Phi(t)|\leqslant r_{10}$，$0\leqslant t\leqslant\omega$ 时，有 $f(t,\Phi(t))\leqslant(\overline{f}_0+\varepsilon)|\Phi(t)|$. 因此，$\forall x\in K\cap\partial\Omega_{r_{10}}$，$t\in[0,\infty]$，因为 $0<|\Phi(t)|\leqslant r_{10}$，所以

$$f(t,\Phi(t))\leqslant(\overline{f}_0+\varepsilon)|\Phi(t)| \tag{12}$$

由(2)，(11)及(12)式可得

$$\|T_\lambda x\| \leqslant \lambda\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s(\overline{f}_0+\varepsilon)\|x\| < \|x\|.$$

另一方面，由 $\underline{f}_\infty$ 的定义，存在 $P_3>0$，使得当 $|\Phi(t)|\geqslant P_3$，$t\in[0,\omega]$时，有 $f(t,\Phi(t))\geqslant(\underline{f}_\infty-\varepsilon)|\Phi(t)|$. 取 $r_{11}=\max\{2r_{10},\frac{P_3}{\alpha}\}$. $\forall x\in K\cap\partial\Omega_{r_{11}}$，因为 $|\Phi(t)|>\alpha r_{11}\geqslant P_3$，所以

$$f(t,\Phi(t))\geqslant(\underline{f}_\infty-\varepsilon)|\Phi(t)| \tag{13}$$

由(2)，(11)及(13)式可得

$$\|T_\lambda x\| \geqslant \alpha\lambda\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s(\underline{f}_\infty-\varepsilon)\|x\| > \|x\|.$$

显然，$\Omega_{r_{10}}\subset\Omega_{r_{11}}$. 由引理 2.6 之(ii)可知，算子 T_λ 在 $K\cap(\Omega_{r_{11}}\setminus\overline{\Omega}_{r_{10}})$ 中至少有一个不动点，即方程(1)至少有一个正 ω-周期解.

(ii). 假设 $\underline{f}_0>\overline{f}_\infty$. 当

$$\frac{\sigma^{-L_2}-1}{\alpha\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\underline{f}_0} < \lambda < \frac{\sigma^{-L_1}-1}{\sigma^{-L_2}\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\overline{f}_\infty}$$

时，存在 $0<\varepsilon<\underline{f}_0$，使得

$$\frac{\sigma^{-L_2}-1}{\alpha\int_0^\omega b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\underline{f}_0-\varepsilon} < \lambda <$$

$$\frac{\sigma^{-L_1}-1}{\sigma^{-L_2}\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\bar{f}_{\infty}+\varepsilon} \tag{14}$$

由$\underline{f}_0$的定义，取 $r_{12}>0$，当 $0<|\Phi(t)|\leqslant r_{12}$，$0\leqslant t\leqslant\omega$时，有 $f(t,\Phi(t))\geqslant(\underline{f}_0-\varepsilon)|\Phi(t)|$. 因此，$\forall x\in K\cap\partial\Omega_{r_{12}}$，因为 $0<|\Phi(t)|\leqslant r_{12}$，所以有

$$f(t,\Phi(t))\geqslant(\underline{f}_0-\varepsilon)|\Phi(t)| \tag{15}$$

由(2),(14)及(15)式有

$$\|T_{\lambda}x\|\geqslant\alpha\lambda\frac{\sigma^{L_2}}{1-\sigma^{L_2}}\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s(\underline{f}_0-\varepsilon)\|x\|>\|x\|.$$

另一方面，由$\bar{f}_{\infty}$的定义，存在 $P_4>0$，当 $|\Phi(t)|\geqslant P_4$，$t\in[0,\omega]$时，有 $f(t,\Phi(t))\leqslant(\bar{f}_{\infty}+\varepsilon)|\Phi(t)|$. 取 $r_{13}=\max\{2r_{12},\frac{P_4}{\alpha}\}$. $\forall x\in K\cap\partial\Omega_{r_{13}}$，因为$|\Phi(t)|>\alpha r_{13}\geqslant P_4$，所以

$$f(t,\Phi(t))\leqslant(\bar{f}_{\infty}+\varepsilon)|\Phi(t)| \tag{16}$$

由(2),(14)及(16)式有

$$\|T_{\lambda}x\|\leqslant\lambda\frac{\sigma^{L_1-L_2}}{1-\sigma^{L_1}}\int_0^{\omega}b(s)\mathrm{d}s(\bar{f}_{\infty}+\varepsilon)\|x\|<\|x\|.$$

显然，$\Omega_{r_{12}}\subset\Omega_{r_{13}}$. 由引理 2.6 之(i)可知，算子 T_{λ} 在 $K\cap(\Omega_{r_{13}}\backslash\overline{\Omega}_{r_{12}})$中至少有一个不动点，即方程(1)至少有一个正 ω-周期解. 定理得证.

参考文献：

[1] Gopalsamy K, Weng P. Global attractivity and level crossing in model of haematopoiesis [J]. Bull Inst Math Acad Sin, 1994, 22: 341.

[2] Joseph W, So H, Yu J. Global attractivity and uniform persistence in Nicholson's blowflies [J]. Diff Equat Dyn Sys, 1994, 2: 11.

[3] Weng P. Existence and global attractivity of periodic solution of integro-differential equation in population dynamics [J]. Acta Appl Math, 1996, 12: 427.

[4] Mackey M C, Glass L. Oscillations and chaos in physiological control systems [J]. Sciences, 1997, 197: 287.

[5] Luo J, Yu J. Global asymptotic stability of non-autonomous mathematical ecological equations with distributed deviating arguments [J]. Acta Math Sin, 1998, 41: 1273.

[6] Wan A, Jiang D. Existence of positive periodic solutions for functional differential equations [J]. Kyushu J Math, 2002, 56: 193.

[7] Lan K, Webb J R L. Positive solutions of semilinear differential equations with singularities [J]. Diff Equat, 1998, 148: 407.

[8] Jiang D, Wei J. Existence of positive periodic solutions for Volterra integro-differential equations [J]. Acta Math Sci, 2001, 21B: 553.

[9] Li Y. Positive periodic solutions of first and second order ordinary differential equations [J]. Chinese Ann Math, 2001, 25B: 413.

[10] 陈文斌，高芳，鲁世平. 一类时滞微分方程周期解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2014，51：455.

[11] 郑淑媛，孔凡超，鲁世平. 一类具有奇性的时滞平均曲率方程周期解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：490.

[12] Wang H. Positive periodic solutions of functional differential equations [J]. Diff Equat, 2004, 202: 354.

[13] Wu Y. Existence of positive periodic solutions for a functional differential equation with a parameter [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 68: 1954.

[14] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

[15] Guo D, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones [M]. New York: Academic Press, 1988.

引用本文格式：

中　文：张璐，杨和. 一类含参数的多时滞微分方程的正周期解 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：785.

英　文：Zhang L, Yang H. Positive periodic solutions for a class of differential equations involving parameter and multiple delays [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 785.