doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.06.005

一类非线性二阶边值问题正解的存在性与多解性

马满堂，贾凯军
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文考虑非线性二阶边值问题

$$\begin{cases} q(t)u'(t))' + f(u'(t)) = 0, t \in (0,1), \\ q(0)u'(0) = 0, cu(1) + dq(1)u'(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性及多解性，其中 $f:(-\infty,0] \to [0,\infty)$，$q:[0,1] \to (0,\infty)$ 为连续函数，$c>0$，$d \geqslant 0$ 为常数. 当非线性项 f 满足超线性增长或次线性增长的条件时，本文证明该问题至少存在一个正解. 当非线性项 f 满足 $f_0 := \lim\limits_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s} = f_\infty := \lim\limits_{s\to -\infty}\frac{f(s)}{s} = 0$ 或 $f_0 := \lim\limits_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s} = f_\infty := \lim\limits_{s\to -\infty}\frac{f(s)}{s} = \infty$ 的条件时，本文证明该问题至少存在两个正解. 主要结果的证明基于锥上的不动点定理.

关键词：正解；存在性；多解性；锥；不动点指数
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-675(2019)06-1014-05

Existence and multiplicity of positive solutions for a class of second-order boundary value problems

MA Man-Tang, *JIA Kai-Jun*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, existence and multiplicity of positive solutions of the nonlinear second-order boundary value problems

$$\begin{cases} (q(t)u'(t))' + f(u'(t)) = 0, t \in (0,1), \\ q(0)u'(0) = 0, cu(1) + dq(1)u'(1) = 0 \end{cases}$$

are considered, where $f:(-\infty,0] \to [0,\infty)$, $q:[0,1] \to (0,\infty)$ are continuous functions, $c>0$, $d \geqslant 0$ are constants. When the nonlinear term f satisfies superlinear growth condition or sublinear growth condition, we show that there exists at least one positive solution to the problem. When the nonlinear term f satisfies $f_0 := \lim\limits_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s} = f_\infty := \lim\limits_{s\to -\infty}\frac{f(s)}{s} = 0$ or $f_0 := \lim\limits_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s} = f_\infty := \lim\limits_{s\to -\infty}\frac{f(s)}{s} = \infty$, we show that there are at least two positive solutions to the problem. The proof is based on the fixed point theorem on cones.

Keywords: Positive solution; Existence; Multiplicity; Cone; Fixed point index
(2010 MSC 26A33)

收稿日期：2018-10-24
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：马满堂(1995－)，男，甘肃张家川人，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：mantangma@163.com
通讯作者：贾凯军. E-mail：jiakaijun_nwnu@163.com

1　引　言

近年来，对二阶常微分方程边值问题的研究十分活跃，其正解的存在性引起了许多学者的关注，并已取得了一些深刻的结果[1-9]．例如，1994 年，Erbe 等[1]研究了非线性二阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \gamma u(1)+\delta u'(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$，$a\in C([0,1],[0,\infty))$ 且在 $(0,1)$ 的任一子区间内不恒为零，$\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$ 为常数且 $\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta>0$．通过构造锥

$$K_1=\{u\in C[0,1]: u(t)\geqslant 0, \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} u(t)\geqslant M_1\ \|u\|_1\},$$

其中

$$\|u\|_1=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|,$$

$$M_1=\min\left\{\frac{\gamma+4\delta}{4(\gamma+\delta)},\frac{\alpha+4\beta}{4(\alpha+\beta)}\right\},$$

并运用 Green 函数的性质及锥拉伸与压缩不动点定理，文献[1]建立了如下结果．

定理 A　若 f 满足下列条件之一：

(i) $f^0=0$ 且 $f^\infty=\infty$；

(ii) $f^0=\infty$ 且 $f^\infty=0$，

则问题 (1) 至少存在一个正解，这里 $f^0=\lim\limits_{s\to 0}\frac{f(s)}{s}$，$f^\infty=\lim\limits_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}$．

2009 年，Zou 等[2]研究了非线性二阶 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} u''+f(t,u,u')=0, t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性，其中 $f\in C([0,1]\times[0,\infty)\times\mathbf{R},[0,\infty))$．该文首先构造了锥

$$K_2=\{u\in C[0,1]: u(t)\geqslant 0, u\text{ 在}[0,1]\text{上是凸的}, u(0)=u(1)=0\},$$

然后运用锥上的不动点理论获得了问题(2)正解的存在性结论．

2016 年，Sreedhar 等[3] 研究了非线性二阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} -u''+k^2u=f(t,u), t\in(0,1), \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \gamma u(1)+\delta u'(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

正解的存在性，其中 k,β,δ 是正常数，α,γ 是非负常数，$f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$．他们通过构造锥

$$K_3=\{u\in C[0,1]: u(t)\geqslant 0, \min_{0\leqslant t\leqslant 1}u(t)\geqslant M_2\ \|u\|_2, t\in[0,1]\},$$

其中 $\|u\|_2=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$，

$$M_2=\min\left\{\frac{\beta k}{\alpha\sinh k+\beta k\cosh k},\frac{\delta k}{\gamma\sinh k+\delta k\cosh k}\right\},$$

然后运用 Avery-Henderson 不动点理论获得了问题(3)多个正解的存在性结论．

值得注意的是，文献[1-3]都是通过在 Banach 空间 $C[0,1]$ 中构造合适的锥，运用锥上的不动点定理获得相应问题正解的存在性或多解性结论．一个有趣的问题是：当非线性项 f 含有一阶导数项时，能否在空间 $C^1[0,1]$ 中构造一个恰当的锥，进而运用锥上的不动点理论获得相应问题正解的存在性结论呢？基于以上工作，本文将考察非线性二阶边值问题

$$\begin{cases} (q(t)u'(t))'+f(u'(t))=0, t\in(0,1), \\ q(0)u'(0)=0, cu(1)+dq(1)u'(1)=0 \end{cases} \tag{4}$$

正解的存在性及多解性，其中 $f:(-\infty,0]\to[0,\infty)$，$q:[0,1]\to(0,\infty)$ 均为连续函数，$c>0, d\geqslant 0$ 均为常数．为了方便，记

$$f_0:=\lim_{s\to 0^-}\frac{f(s)}{s},\quad f_\infty:=\lim_{s\to-\infty}\frac{f(s)}{s}.$$

设 $X=C^1[0,1]$，按范数 $\|u\|_\infty=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u'(t)|$ 构成 Banach 空间．定义锥

$$K=\{u\in C^1[0,1]: u'\leqslant 0, u\text{ 在}[0,1]\text{上凸}, q(0)u'(0)=0, cu(1)+dq(1)u'(1)=0\}.$$

容易验证锥 K 中的元素 u 满足

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}}|u'(t)|\geqslant\sigma\|u\|_\infty \tag{5}$$

其中 $\sigma=\frac{u'(1/4)}{u'(1)}$．本文假定：

(H1) $f:(-\infty,0]\to[0,\infty)$，$q:[0,1]\to(0,\infty)$ 均为连续函数，$c>0, d\geqslant 0$ 均为常数；

(H2) 存在 $m<0$，使得当 $m\leqslant s\leqslant 0$ 时，$f(s)\leqslant\eta m$，其中 $\eta=-\frac{1}{\|1/q\|_\infty t}$，$0\leqslant t\leqslant 1$；

(H3) 存在 $m<0$，使得 $f(s)\geqslant -2m\ \|q\|_\infty$．

本文的主要结果如下．

定理 1.1　假设(H1)成立．若 f 满足下列条件之一：

(i) $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$(超线性)；

(ii) $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=0$(次线性)，

则问题(4)至少存在一个正解．

定理 1.2　假定(H1)，(H2)成立，且 $f_0=f_\infty=$

∞. 则问题(4)至少存在两个正解 u_1, u_2,且满足 $0 < |u_1| < -m < |u_2|$.

定理 1.3 假定(H1),(H3)成立,且 $f_0 = f_\infty = 0$. 则问题(4)至少存在两个正解 u_1, u_2,且满足 $0 < |u_1| < -m < |u_2|$.

注 1 若问题(4)结合 Sturm-Liouville 或 Dirichlet 边界条件,那么 u' 既有正又有负,则所得问题对应的等价积分算子不具有保锥性,因而不能用锥上的不动点理论来研究该问题正解的存在性及多解性. 但是,若结合 Robin 边界条件则不会出现这种问题. 因此本文所考虑的问题是对文献[1-3]的一个重要补充.

2 预备知识

引理 2.1 u 是问题(4)的解当且仅当 u 是算子方程

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(u'(s))\mathrm{d}s := Au(t), \quad t \in [0,1] \tag{6}$$

的解,其中 $G(t,s)$ 为线性边值问题

$$\begin{cases} (q(t)u'(t))' = 0, t \in (0,1), \\ q(0)u'(0) = 0, cu(1) + dq(1)u'(1) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数,

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{d}{c} + \displaystyle\int_t^1 \frac{1}{q(\tau)}\mathrm{d}\tau, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \dfrac{d}{c} + \displaystyle\int_s^1 \frac{1}{q(\tau)}\mathrm{d}\tau, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

引理 2.2 $A(K) \subset K$,且 A 是全连续算子.

证明 对任意的 $u \in K$,易见

$$(Au)'(t) = -\int_0^t \frac{1}{q(t)} f(u'(s))\mathrm{d}s \leqslant 0, \quad t \in [0,1],$$

且

$$(Au)''(t) = -\left(\int_0^t \frac{1}{q'(t)} f(u'(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{q(t)} f(u'(t))\right) \leqslant 0, \ t \in [0,1].$$

由 $(Au)'' \leqslant 0$ 可知 Au 在 $[0,1]$ 上是上凸的. 简单计算容易验证 $q(0)Au'(0) = 0$, $cAu(1) + dq(1)Au'(1) = 0$. 故 $A(K) \subset K$. 由 f 的连续性及 Arzela-Ascoli 定理可知 $A: K \to K$ 是全连续算子.

引理 2.3[10] 设 X 是 Banach 空间, $K \subset X$ 是 X 中的一个锥, Ω_1, Ω_2 是 X 的开子集, $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. 若全连续算子 $A: K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to K$ 满足

(i) $\|Au\| \leqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_1$ 且 $\|Au\| \geqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$,

或

(ii) $\|Au\| \geqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_1$ 且 $\|Au\| \leqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$,

则 A 在 $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 上有一个不动点.

引理 2.4[11] 设 X 为 Banach 空间, $K \subset X$ 是 X 中的一个锥. 定义 $K_P = \{x \in K: \|x\| \leqslant p\}$, $p > 0$. 假设 $A: K_p \to K$ 是紧映射,且使得 $Ax \neq x, x \in \partial K_p = \{x \in K: \|x\| = p\}$. 则

(i) 若 $\|x\| \leqslant \|Ax\|, x \in \partial K_p$,则 $i(A, K_p, K) = 0$;

(ii) 若 $\|x\| \geqslant \|Ax\|, x \in \partial K_p$,则 $i(A, K_p, K) = 1$.

3 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 (i) 超线性情形. 此时 $f_0 = 0$ 且 $f_\infty = \infty$. 因为 $f_0 = 0$,故取 $H_1 < 0$,使得对任意的 $H_1 \leqslant u' \leqslant 0$ 有 $f(u') \leqslant \eta u'$,其中 $\eta < 0$ 满足

$$-\eta \|1/q\|_\infty t \leqslant 1, \ t \in [0,1].$$

若 $u \in K$, $\|u'\|_\infty = -H_1$,则

$$|u'(t)| = \left|\frac{1}{-q(t)} \int_0^t f(u'(s))\mathrm{d}s\right| \leqslant \|1/q\|_\infty |\eta| \int_0^t |u'(s)|\mathrm{d}s \leqslant \|1/q\|_\infty \|u\|_\infty |\eta| t \leqslant \|u\|_\infty.$$

记

$$\Omega_1 := \{u \in X: \|u\|_\infty \leqslant -H_1\}.$$

则 $\|Au\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty, u \in K \cap \partial\Omega_1$. 又因为 $f_\infty = \infty$,故存在 $\hat{H}_2 < 0$,使得对任意的 $u' \leqslant \hat{H}_2$ 有

$$f(u') \geqslant -\frac{4\|q\|_\infty}{\sigma} u'.$$

记

$$H_2 := \min\{2H_1, 2\hat{H}_2\},$$
$$\Omega_2 := \{u \in X: \|u\|_\infty < -H_2\}.$$

则

$$|u'(1/2)| = \left|\frac{1}{-q(1/2)} \int_0^{1/2} f(u'(s))\mathrm{d}s\right| \geqslant \left|\frac{1}{\|q\|_\infty} \int_0^{1/2} f(u'(s))\mathrm{d}s\right| \geqslant \frac{4}{\|q\|_\infty}\left|-\frac{1}{\sigma}\int_{1/4}^{1/2} u'(s)\mathrm{d}s\right| \geqslant \|u\|_\infty.$$

故 $\|Au\|_\infty \geqslant \|u\|_\infty, u \in K \cap \partial\Omega_2$. 由引理 2.3 可得算子 A 在 $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ 上有一个不动点,并有 $-H_1 \leqslant \|u\|_\infty \leqslant -H_2$. 进而由 $G(t,s) > 0$ 得 $u(t) > 0, t \in$

$(0,1)$. 即问题(4)存在一个正解.

(ii) 次线性情形. 此时 $f_0=\infty$且 $f_\infty=0$. 因为 $f_0=\infty$,故取 $H_1<0$,使得对任意 $H_1\leqslant u'\leqslant 0$,有 $f(u')\geqslant \hat{\eta}u'$,其中 $\hat{\eta}\leqslant -\frac{4\ \|q\|_\infty}{\sigma}$. 则对任意 $u\in K$, $\|u\|_\infty=-H_1$ 有

$$|u'(1/2)|=\left|\frac{1}{-q(1/2)}\int_0^{1/2}f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{1}{4}\left|\hat{\eta}\frac{1}{\|q\|_\infty}u'\right|\geqslant \|u\|_\infty.$$

记 $\Omega_1:=\{u\in X:\|u\|_\infty<-H_1\}$. 则 $\|Au\|_\infty\geqslant \|u\|_\infty, u\in K\cap\partial\Omega_1$. 又因为 $f_\infty=0$,故存在 $\hat{H}_2<0$,使得对任意的 $u'<\hat{H}_2$ 有 $f(u')\leqslant \lambda u'$,其中 $\lambda<0$ 满足 $-t\lambda\|1/q\|_\infty\leqslant 1$. 考虑以下两种情形:

(i) f 有界. 存在 M,对任意的 $u'\in(-\infty,0)$ 有 $f(u')\leqslant M$. 取

$$H_2=\min\left\{2H_1,-tM\left\|\frac{1}{q}\right\|_\infty\right\},$$

使得对 $u\in K$, $\|u\|_\infty=-H_2$ 有

$$|u'(t)|\leqslant\|1/q\|_\infty\left|\int_0^t f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\|1/q\|_\infty|Mt|=\|u\|_\infty.$$

所以 $\|Au\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty$.

(ii) f 无界. 取

$$H_2<\min\{2H_1,\hat{H}_2\},$$

使得 $f(u')\leqslant\|q\|_\infty f(H_2)$, $H_2\leqslant u'<0$. 则对 $u\in K$, $\|u\|_\infty=-H_2$ 有

$$|u'(t)|=\left|\frac{1}{-q(t)}\int_0^t f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\|1/q\|_\infty\left|\int_0^t f(H_2)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\|1/q\|_\infty\left|-\lambda H_2\int_0^t\mathrm{d}s\right|\leqslant|H_2|=\|u\|_\infty.$$

无论何种情况,只要令 $\Omega_2=\{u\in K:\|u\|_\infty<-H_2\}$ 就有 $\|Au\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty, u\in K\cap\partial\Omega_2$. 则由引理 2.3 可得算子 A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$上有一个不动点,并有 $-H_1\leqslant\|u\|_\infty\leqslant -H_2$. 进而由 $G(t,s)>0$ 得 $u(t)>0, t\in(0,1)$. 即问题(4)存在一个正解. 证毕.

定理 1.2 的证明　令

$$M<-\frac{4\ \|q\|_\infty}{\sigma} \tag{7}$$

由 $f_0=f_\infty=\infty$与(5)式,存在 $r<0, r>m$ 且 $r\leqslant u'\leqslant 0$ 满足 $f(u')\geqslant Mu'$. 事实上,我们有

$$\|Au\|_\infty\geqslant|u'(1/2)|=$$
$$\left|\frac{1}{-q(1/2)}\int_0^{1/2}f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{1}{\|q\|_\infty}M\left|\int_{1/4}^{3/4}u'(s)\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{\sigma}{4\ \|q\|_\infty}\|u\|_\infty|M|\geqslant\|u\|_\infty.$$

因此,由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|r|},K)=0 \tag{8}$$

对同样满足(7)式的 M,由 $f_0=f_\infty=\infty$知存在 $R_1<0$,使得 $f(u')\geqslant Mu, u'\leqslant R_1$. 令 $R<\min\{m,2R_1\}$. 对 $u'\in\partial K_R$,有

$$\|Au\|_\infty\geqslant|u'(1/2)|=$$
$$\left|\frac{1}{-q(1/2)}\int_0^{1/2}f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{1}{\|q\|_\infty}M\left|\int_{1/4}^{3/4}u'(s)\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\frac{\sigma}{4\ \|q\|_\infty}\|u\|_\infty|M|\geqslant\|u\|_\infty.$$

因而由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|R|},K)=0 \tag{9}$$

另一方面,由(H2)可得,对 $u'\in\partial K_m$,有

$$\|Au\|_\infty=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\frac{1}{-q(t)}\int_0^t f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$|\eta|\,\|1/q\|_\infty\int_0^t\|u\|_\infty ds=\|u\|_\infty.$$

因而由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|m|},K)=1 \tag{10}$$

由式(8)～(10)得 $i(A,K_{|R|}\backslash K_{|m|},K)=1$, $i(A,K_{|m|}\backslash K_{|r|},K)=-1$. 因此,$A$ 在 $K_{|R|}\backslash K_{|m|}$上有一个不动点 u_1,在 $K_{|m|}\backslash K_{|r|}$上有一个不动点 u_2,这都是边值问题(4)的解,且 $u_1(t)>0, u_2(t)>0, 0<|u_1|<-m<|u_2|, t\in(0,1)$. 证毕.

定理 1.3 的证明　由于 $f_0=f_\infty=0$,可令 $\varepsilon<0$ 使得 $f(u')\leqslant M+\varepsilon u', u'\leqslant 0, t\in[0,1]$. 那么

$$(Au)'(t)\leqslant\|1/q\|_\infty\int_0^t(M+\varepsilon u')\mathrm{d}s.$$

令 ε 足够大,$R<m$ 足够小,则有 $\|Au\|_\infty<\|u\|_\infty$, $u\in\partial K_{|R|}$. 故由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|R|},K)=1 \tag{11}$$

同样,对 $m<r<0$,有

$$i(A,K_{|r|},K)=1 \tag{12}$$

另一方面,由(H3)可得,对 $u'\in\partial K_m$,有

$$\|Au\|_\infty\geqslant|u'(1/2)|=$$
$$\left|\frac{1}{-q(1/2)}\int_0^{1/2}f(u'(s))\mathrm{d}s\right|\geqslant$$
$$\left|\frac{1}{\|q\|_\infty}\int_0^{1/2}2m\ \|q\|_\infty\mathrm{d}s\right|=|m|=\|u\|_\infty.$$

因而,由引理 2.4 可得

$$i(A,K_{|m|},K)=0 \tag{13}$$

由式(11)～(13)得 $i(A,K_{|R|}\backslash K_{|m|},K)=-1$. $i(A,K_{|m|}\backslash K_{|r|},K)=1$. 因此,$A$ 在 $K_{|R|}\backslash K_{|m|}$ 上有一个不动点 u_1,在 $K_{|m|}\backslash K_{|r|}$ 上有一个不动点 u_2,这都是边值问题(4)的解,且 $u_1(t)>0$,$u_2(t)>0$,$0<|u_1|<-m<|u_2|$,$t\in(0,1)$. 证毕.

4 应 用

考虑非线性二阶边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+f(u'(t))=0, t\in(0,1), \\ u'(0)=0, u(1)+u'(1)=0 \end{cases} \tag{14}$$

正解的存在性,其中 $q(t)\equiv 0$,$c=d=1$,$f(u')=(u')^2(2+\sin u')$. 易见条件(H1)满足,且简单计算可得

$$f_0:=\lim_{u'\to 0^-}\frac{(u')^2(2+\sin u')}{u'}=0,$$

$$f_\infty:=\lim_{u'\to -\infty}\frac{(u')^2(2+\sin u')}{u'}=\infty.$$

故由定理 1.1 可知问题(14)至少存在一个正解.

参考文献:

[1] Erbe L H, Wang H Y. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations [J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120: 743.

[2] Zou Y M, Cui Y J. Positive solutions of second-order boundary value problems with dependence on the first order derivative [J]. Acta Math Appl Sin, 2009, 32: 106.

[3] Prasad K R, Wesen L T, Sreedhar N. Existence of positive solutions for second order undamped Sturm-Liouville boundary value problems [J]. Asian-Eur J Math, 2016, 9: 1650089.

[4] Li Y X. On the existence and nonexistence of positive solutions for nonlinear Sturm-Liouville boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 2005, 304: 74.

[5] Ma R Y. Multiplicity of positive solutions for second-order three-point boundary value problems [J]. Comput Math Appl-Theor, 2000, 40: 193.

[6] Dunninger D R, Wang H Y. Multiplicity of positive radial solutions for an elliptic system on an annulus [J]. Nonlinear Anal, 2000, 42: 803.

[7] Ma R Y, Chen R P. Existence of one-signed solutions of nonlinear four-point boundary value problems [J]. Czechoslovak Math J, 2012, 62: 593.

[8] Liu J, Feng H Y, Feng X F. Multiplicity of positive solutions for a singular second-order three-point boundary value problem with a parameter [J]. J App Math, 2014, 8: 10.

[9] Wang F, Zhang F, Wang F L. The existence and multiplicity of positive solutions for second-order periodic boundary value problems [J]. J Funct Spaces Appl, 2012, 6: 1115.

[10] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社, 1985.

[11] Guo D J, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones [M]. New York: Academic Press, 1988.

引用本文格式:

中 文:马满堂, 贾凯军. 一类非线性二阶边值问题正解的存在性与多解性[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2019, 56: 1014.

英 文:Ma M T, Jia K J. Existence and multiplicity of positive solutions for a class of second-order boundary value problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 1014.