doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.06.006

一类带非线性边界条件的奇异二阶常微分方程正解的存在性

苏肖肖
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘 要：本文研究了一类带非线性边界条件的奇异二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} u'' + \rho^2 u = \lambda g(t) f(u), t \in [0, 2\pi], \\ u(0) = h(u(2\pi))u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $\rho \in (0, 1/4)$，$\lambda > 0$ 是一个参数，函数 $g: (0, 2\pi] \to (0, \infty)$ 连续，函数 $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$ 连续，$h: [0, \infty) \to [1, \infty)$ 连续，且允许 f 在零点处奇异、在无穷远处超线性增长. 主要结果的证明基于 Krasnoselskii 不动点定理.

关键词：非线性边界条件；奇异性；Green 函数；正解；半正问题
中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2019)06-1019-07

Existence of positive solutions for a class of singular second-order ordinary differential equations with nonlinear boundary condition

SU Xiao-Xiao
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of positive solutions of a class of singular second-order ordinary differential equations with nonlinear boundary condition

$$\begin{cases} u'' + \rho^2 u = \lambda g(t) f(u), t \in [0, 2\pi], \\ u(0) = h(u(2\pi))u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi), \end{cases}$$

where $\rho \in (0, 1/4)$, $\lambda > 0$ is a parameter, $g: (0, 2\pi] \to (0, \infty)$, *and* $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h: [0, \infty) \to [1, \infty)$ are continuous functions, f may be singular at 0 and superlinear at ∞. The proof of the main results is based on the Krasnoselskii's fixed point theorem.

Keywords: Nonlinear boundary condition; Singular; Green's function; Positive solution; Semipositive problem
(2010 MSC 26A33)

1 引 言

周期边值问题是常微分方程中的经典问题. 对二阶周期边值问题的研究，目前已有一些结果[1-11]，如 Zhang 等[8]运用锥拉伸与压缩不动点定理获得了二阶周期边值问题

$$\begin{cases} u'' + \rho^2 u = f(t, u), t \in [0, 2\pi], \\ u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $f: [0, 2\pi] \times [0, \infty) \to (0, \infty)$ 连续.

若 $f(t, 0) \geq 0$，则问题(1)为正问题[1-4]. 显然 Zhang 等[8]研究的是正问题. 若 $f(t, 0) < 0$，则问

收稿日期：2018-12-21
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：苏肖肖(1995－)，女，甘肃天水人，硕士生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：suxiaoxiao2856@163.com

题(1)为半正问题.当前对二阶周期半正问题的研究较少,如 Jiang 等[9]考虑了在 $f:[0,2\pi]\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 连续且满足 $f(t,u)+M>0,M>0$(即下方有界)时问题(1)正解的存在性.然而,据我们所知,对 $f(t,0)<0$ 且下方无界的情形少有研究.最近 Hai 和 Shivaji[10]获得了带非线性边界条件的二阶半正问题

$$\begin{cases}-u''=\lambda g(t)f(u),t\in(0,1),\\ u(0)=0,u'(1)+h(u(1))u(1)=0\end{cases}$$

正解的存在性,其中 $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 连续且在零点处奇异,即 $\lim\limits_{s\to0^+}f(s)=\infty$.值得注意的是,该问题研究 $f(0)<0$ 且下方无界的情形,并且当该问题的非线性边界条件中的 $h(s)\equiv0$ 时即可得到 Robin 边界条件 $u(0)=0,u'(1)=0$.

受以上文献启发,人们自然地要问:当 $f(0)<0$ 且下方无界时,二阶周期边值问题是否也可建立正解的存在性结果?本文考虑一类带非线性边界条件的奇异二阶常微分边值问题

$$\begin{cases}u''+\rho^2u=\lambda g(t)f(u),t\in[0,2\pi],\\ u(0)=h(u(2\pi))u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi)\end{cases}\tag{2}$$

正解的存在性,其中 $\rho\in(0,1/4)$,$\lambda>0$ 是一个参数.

本文总假定:

(H1) $g:(0,2\pi]\to(0,\infty)$ 连续;

(H2) $h:[0,\infty)\to[1,\infty)$ 连续;

(H3) $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 连续且 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t}=\infty$;

(H4) 存在常数 $\beta,\gamma>0$ 满足 $\beta+\gamma<1$ 使得 $\limsup\limits_{t\to0^+}t^\beta g(t)<\infty,\limsup\limits_{t\to0^+}t^\gamma|f(t)|<\infty$.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设(H1)~(H4)成立.则存在一个常数 $\lambda_0>0$,使得当 $\lambda<\lambda_0$ 时问题(2)有一个正解 u_λ.

注 1 当问题(2)中的 $h(s)\equiv1$ 时,该问题可退化为问题(1).故问题(2)是对问题(1)的推广.

2 预备知识

令 $X=C[0,2\pi]$ 是一个 Banach 空间,其范数 $\|u\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,2\pi]}|u(t)|$.我们用 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(0,2\pi)$ 中的范数.在这一部分总假设 $\rho\in(0,1/4)$.

设 $\phi_1(t),\phi_2(t)$ 分别是初值问题

$$\begin{cases}\phi_1''(t)+\rho^2\phi_1(t)=0,t\in[0,2\pi],\\ \phi_1(0)=0,\phi_1'(0)=1\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\phi_2''(t)+\rho^2\phi_2(t)=0,t\in[0,2\pi],\\ \phi_2(2\pi)=0,\phi_2'(2\pi)=-1\end{cases}$$

的唯一解.易得

$$\begin{cases}\phi_1(t)=\dfrac{1}{\rho}\sin\rho t,\\ \phi_2(t)=\dfrac{1}{\rho}\sin\rho(2\pi-t),t\in[0,2\pi]\end{cases}\tag{3}$$

引理 2.1 令 $\alpha\geqslant1$ 是一个常数,函数 $q:[0,2\pi]\to(0,\infty)$ 连续.则问题

$$\begin{cases}u''+\rho^2u=q(t),t\in[0,2\pi],\\ u(0)=\alpha u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi)\end{cases}\tag{4}$$

等价于积分方程

$$u(t)=\int_0^{2\pi}G(t,s)q(s)\mathrm{d}s,t\in[0,2\pi]\tag{5}$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\sin\rho(t-s)+\alpha\sin\rho(2\pi-t+s)+(1-\alpha)\sin\rho s\cos\rho(2\pi-t)}{(1+\alpha)\rho(1-\cos2\rho\pi)},0\leqslant s\leqslant t\leqslant2\pi,\\ \dfrac{\alpha\sin\rho(s-t)+\alpha\sin\rho(2\pi-s+t)+(1-\alpha)\sin\rho t\cos\rho(2\pi-s)}{(1+\alpha)\rho(1-\cos2\rho\pi)},0\leqslant t\leqslant s\leqslant2\pi\end{cases}\tag{6}$$

证明 首先证明问题(4)的唯一解可以由(5)式表示.事实上,由(3)式及

$$\begin{vmatrix}\phi_2(0)&\phi_1(0)\\ \phi_2'(0)&\phi_1'(0)\end{vmatrix}=\phi_2(0)\neq0$$

知,齐次方程 $u''(t)+\rho^2u(t)=0$ 有两个线性无关解 $\phi_1(t),\phi_2(t)$.由常数变易法,我们可以假设

$$u(t)=C_1(t)\phi_1(t)+C_2(t)\phi_2(t),\quad t\in[0,2\pi]\tag{7}$$

则

$$\begin{cases}C_1'(t)\phi_1(t)+C_2'(t)\phi_2(t)=0,\\ C_1'(t)\phi_1'(t)+C_2'(t)\phi_2'(t)=q(t)\end{cases}\tag{8}$$

由(8)式得

$$C_1'(t)=\frac{q(t)\phi_2(t)}{\phi_1'(t)\phi_2(t)-\phi_1(t)\phi_2'(t)},$$

$$C_2'(t)=\frac{-q(t)\phi_1(t)}{\phi_1'(t)\phi_2(t)-\phi_1(t)\phi_2'(t)}.$$

记 $\Delta = \phi_1'(t)\phi_2(t) - \phi_1(t)\phi_2'(t)$. 因此

$$\begin{cases} C_1(t) = C_1(2\pi) - \int_t^{2\pi} \frac{\phi_2(s)}{\Delta} q(s)\mathrm{d}s, \\ C_2(t) = C_2(0) - \int_0^t \frac{\phi_1(s)}{\Delta} q(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{9}$$

由(7)式和(9)式得

$$u(t) = C_1(2\pi)\phi_1(t) - \int_t^{2\pi} \frac{\phi_1(t)\phi_2(s)}{\Delta} q(s)\mathrm{d}s + C_2(0)\phi_2(t) - \int_0^t \frac{\phi_1(s)\phi_2(t)}{\Delta} q(s)\mathrm{d}s.$$

令 $A = C_1(2\pi), B = C_2(0)$. 则

$$u(t) = -\int_0^{2\pi} G_1(t,s)q(s)\mathrm{d}s + A\phi_1(t) + B\phi_2(t),$$

$$u'(t) = -\int_0^{2\pi} G_1'(t,s)q(s)\mathrm{d}s + A\phi_1'(t) + B\phi_2'(t),$$

其中

$$G_1(t,s) = \frac{1}{\Delta}\begin{cases} \phi_1(t)\phi_2(s), 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 2\pi, \\ \phi_1(s)\phi_2(t), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

易得

$$\begin{cases} u(0) = -\int_0^{2\pi} G_1(0,s)q(s)\mathrm{d}s + A\phi_1(0) + B\phi_2(0) = B\phi_2(0), \\ u(2\pi) = -\int_0^{2\pi} G_1(2\pi,s)q(s)\mathrm{d}s + A\phi_1(2\pi) + B\phi_2(2\pi) = A\phi_1(2\pi) \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} u'(0) = -\int_0^{2\pi} G_1'(0,s)q(s)\mathrm{d}s + A\phi_1'(0) + B\phi_2'(0), \\ u'(2\pi) = -\int_0^{2\pi} G_1'(2\pi,s)q(s)\mathrm{d}s + A\phi_1'(2\pi) + B\phi_2'(2\pi) \end{cases} \tag{11}$$

结合(10)式和(11)式及边界条件即有

$$A = \frac{\phi_2'(0)\int_0^{2\pi} \frac{\phi_1'(s) + \phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\phi_2(0)(1 - \phi_1'(2\pi)) + \alpha\phi_1(2\pi)(1 + \phi_2'(0))} \tag{12}$$

$$B = \frac{\alpha\phi_1'(2\pi)\int_0^{2\pi} \frac{\phi_1'(s) + \phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\phi_2(0)(1 - \phi_1'(2\pi)) + \alpha\phi_1(2\pi)(1 + \phi_2'(0))} \tag{13}$$

令 $\omega = \phi_2(0)(1 - \phi_1'(2\pi)) + \alpha\phi_1(2\pi)(1 + \phi_2'(0))$. 则有

$$u(t) = -\int_0^{2\pi} G_1(t,s)q(s)\mathrm{d}s + \frac{\phi_2'(0)\int_0^{2\pi} \frac{\phi_1'(s) + \phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_1(t) + \frac{\alpha\phi_1'(2\pi)\int_0^{2\pi} \frac{\phi_1'(s) + \phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_2(t) \tag{14}$$

进一步

$$u(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)q(s)\mathrm{d}s, t \in [0,2\pi],$$

其中

$$G(t,s) = \frac{\phi_1(s) + \phi_2(s)}{(1+\alpha)\phi_2(0)(1 - \phi_1'(2\pi))}[\phi_1(t) + \alpha\phi_2(t)] - \frac{1}{\Delta}\begin{cases} \phi_1(t)\phi_2(s), 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 2\pi, \\ \phi_1(s)\phi_2(t), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

结合(3)式,简单计算即得(6)式.

下证由(5)式定义的函数是问题(4)的一个解. 由(14)式得

$$u'(t) = -\frac{1}{\Delta}\phi_2'(t)\int_0^t \phi_1(s)q(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\Delta}\phi_1'(t)\int_t^{2\pi} \phi_2(s)q(s)\mathrm{d}s + \frac{\phi_2'(0)\int_0^{2\pi} \frac{\phi_1'(s) + \phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_1'(t) + \frac{\alpha\phi_1'(2\pi)\int_0^{2\pi} \frac{\phi_1'(s) + \phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_2'(t),$$

$$u''(t) = -\frac{1}{\Delta}\phi_2''(t)\int_0^t \phi_1(s)q(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\Delta}\phi_1''(t)\int_t^{2\pi} \phi_2(s)q(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\Delta}\phi_2'(t)\phi_1(t)q(t) + \frac{1}{\Delta}\phi_1'(t)\phi_2(t)q(t) + \frac{\phi_2'(0)\int_0^{2\pi} \frac{\phi_1'(s) + \phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_1''(t) + \frac{\alpha\phi_1'(2\pi)\int_0^{2\pi} \frac{\phi_1'(s) + \phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_2''(t) \tag{15}$$

结合(14)式和(15)式即得对 $t\in[0,2\pi]$,有

$$u''+\rho^2u=-\frac{1}{\Delta}\phi_2'(t)\phi_1(t)q(t)+\frac{1}{\Delta}\phi_1'(t)\phi_2(t)q(t)=\frac{1}{\Delta}\Delta q(t)=q(t).$$

又因为

$$u(0)=\frac{\alpha\phi_1'(2\pi)\int_0^{2\pi}\frac{\phi_1'(s)+\phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_2(0),$$

$$u(2\pi)=\frac{\phi_2'(0)\int_0^{2\pi}\frac{\phi_1'(s)+\phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_1(2\pi),$$

证毕.

$$u'(0)=\frac{1}{\Delta}\phi_1'(0)\int_0^{2\pi}\phi_2(s)q(s)\mathrm{d}s+\frac{\phi_2'(0)\int_0^{2\pi}\frac{\phi_1'(s)+\phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_1'(0)+\frac{\alpha\phi_1'(2\pi)\int_0^{2\pi}\frac{\phi_1'(s)+\phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_2'(0),$$

$$u'(2\pi)=\frac{1}{\Delta}\phi_2'(2\pi)\int_0^{2\pi}\phi_1(s)q(s)\mathrm{d}s+\frac{\phi_2'(0)\int_0^{2\pi}\frac{\phi_1'(s)+\phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_1'(2\pi)+\frac{\alpha\phi_1'(2\pi)\int_0^{2\pi}\frac{\phi_1'(s)+\phi_2'(s)}{\Delta}\mathrm{d}s}{\omega}\phi_2'(2\pi),$$

结合(3)式有 $u(0)=\alpha u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi)$. 证毕.

注2 $G(t,s)>0$ 且当 $\alpha=1$ 时可退化为问题(1)的 Green 函数. 记 $M=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}G(t,s)$, $m=\min\limits_{t\in[0,2\pi]}G(t,s)$. 则有 $m\leqslant G(t,s)\leqslant M$.

引理2.2 令 $k\in L^1(0,2\pi)$ 满足 $k\geqslant0$,且令 $u\in C^1[0,2\pi]\cap C^2[0,2\pi]$ 满足

$$\begin{cases}u''+\rho^2u\geqslant-k(t),t\in[0,2\pi],\\ u(0)\leqslant\alpha u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi),\end{cases}$$

其中 $\alpha\geqslant1$ 是一个常数. 假设 $\|u\|_\infty>\|k\|_1$. 则

$$u(t)\geqslant\frac{m}{M}\|u\|_\infty-M\|k\|_1.$$

证明 令 w_0 是问题

$$\begin{cases}w''+\rho^2w=-k(t),t\in[0,2\pi],\\ w(0)=\alpha w(2\pi),w'(0)=w'(2\pi)\end{cases}$$

的唯一解. 则

$$w_0=-\int_0^{2\pi}G(t,s)k(s)\mathrm{d}s,0\leqslant t\leqslant2\pi.$$

令 $y=u-w_0$. 则有

$$\begin{cases}y''+\rho^2y\geqslant0,t\in[0,2\pi],\\ y(0)\leqslant\alpha y(2\pi),y'(0)=y'(2\pi).\end{cases}$$

因为

$$y(t)\geqslant\frac{m}{M}\|y\|_\infty,t\in[0,2\pi],$$

$$w_0=-\int_0^{2\pi}G(t,s)k(s)ds\geqslant-\int_0^{2\pi}Mk(s)\mathrm{d}s\geqslant-M\|k\|_1,$$

所以

$$u(t)=y(t)+w_0(t)\geqslant\frac{m}{M}\|u\|_\infty-M\|k\|_1.$$

下面的 Krasnoselskii 不动点定理是本文的主要工具.

引理2.3[11] 假设 X 是一个 Banach 空间,$T:X\to X$ 是一个全连续算子. 若存在 $h\in X$, $h\neq0$ 和 $r,R>0$ 满足 $r\neq R$,使得

(a) 如果 $y\in X$ 满足 $y=\theta Ty,\theta\in[0,1]$,那么 $\|y\|\neq r$;

(b) 如果 $y\in X$ 满足 $y=Ty+\xi h,\xi\geqslant0$,那么 $\|y\|\neq R$,

则 T 有一个不动点 $y\in X$ 且 $\min\{r,R\}<\|y\|<\max\{r,R\}$.

3 主要结论的证明

定理1.1的证明 令 $\lambda>0$. 对任意的 $v\in X$,定义 $T_\lambda v=u$,其中 u 是问题

$$\begin{cases}u''+\rho^2u=\lambda g(t)f(\tilde{v}),t\in[0,2\pi],\\ u(0)=\alpha_v u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi)\end{cases}$$

的解,这里

$$\tilde{v}=\max\{v(t),1\},\alpha_v=h(|v(2\pi)|).$$

则

$$u(t)=\lambda\int_0^{2\pi}G_v(t,s)g(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s,$$

其中

$$G_v(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\sin\rho(t-s)+\alpha_v\sin\rho(2\pi-t+s)+(1-\alpha_v)\sin\rho s\cos\rho(2\pi-t)}{(1+\alpha_v)\rho(1-\cos 2\rho\pi)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2\pi,\\ \dfrac{\alpha_v\sin\rho(s-t)+\alpha_v\sin\rho(2\pi-s+t)+(1-\alpha_v)\sin\rho t\cos\rho(2\pi-s)}{(1+\alpha_v)\rho(1-\cos 2\rho\pi)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

对任意的 t,s，$G_v(t,s)\leqslant M_v$，其中 M_v 是 $G_v(t,s)$ 的最大值. 由(H4)，存在一个常数 $C>0$ 使得

$$|g(s)f(\tilde{v}(s))|\leqslant\frac{C}{s^{\beta}\tilde{v}^{\gamma}(s)}\leqslant\frac{C}{s^{\beta}}\in L^1(0,2\pi)\tag{16}$$

由勒贝格控制收敛定理，有 $u\in C[0,2\pi]$，即 T_λ：$X\to X$.

下证 T_λ 是一个全连续算子. 首先证明 T_λ 是连续的. 设 $v_n,v\in C[0,2\pi]$，$\|v_n-v\|_\infty\to 0\ (n\to\infty)$. 令 $u_n=T_\lambda v_n$，$u=T_\lambda v$. 固定 $t,s\in[0,2\pi]$. 对任意 $z\geqslant 0$，定义 $H(z)$ 如下

$$H(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin\rho(t-s)+z\sin\rho(2\pi-t+s)+(1-z)\sin\rho s\cos\rho(2\pi-t)}{(1+z)\rho(1-\cos 2\rho\pi)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2\pi,\\ \dfrac{z\sin\rho(s-t)+z\sin\rho(2\pi-s+t)+(1-z)\sin\rho t\cos\rho(2\pi-s)}{(1+z)\rho(1-\cos 2\rho\pi)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

则

$$H'(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin\rho(2\pi-t+s)-\sin\rho(t-s)-2\sin\rho s\cos\rho(2\pi-t)}{(1+z)^2\rho(1-\cos 2\rho\pi)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2\pi,\\ \dfrac{\sin\rho(2\pi-s+t)+\sin\rho(s-t)-2\sin\rho t\cos\rho(2\pi-s)}{(1+z)^2\rho(1-\cos 2\rho\pi)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

显然，$H'(z)$ 有界，即存在一个常数 b 使得 $|H'(z)|\leqslant b$. 由中值定理可得

$$|G_{v_n}(t,s)-G_v(t,s)|=|H'(z)[\alpha_{v_n}(t,s)-\alpha_v(t,s)]|\leqslant b|\alpha_{v_n}(t,s)-\alpha_v(t,s)|.$$

因此

$$\begin{aligned}|u_n(t)-u(t)|&=\left|\lambda\left(\int_0^{2\pi}G_{v_n}(t,s)g(s)f(\tilde{v}_n)\mathrm{d}s+\int_0^{2\pi}G_v(t,s)g(s)f(\tilde{v})\mathrm{d}s\right)\right|=\\ &\lambda\left(\int_0^{2\pi}|G_{v_n}(t,s)-G_v(t,s)|g(s)|f(\tilde{v}_n)|\mathrm{d}s+\int_0^{2\pi}G_v(t,s)g(s)|f(\tilde{v}_n)-f(\tilde{v})|\mathrm{d}s\right)\leqslant\\ &\lambda\left(b|\alpha_{v_n}(t,s)-\alpha_v(t,s)|\int_0^{2\pi}g(s)|f(\tilde{v}_n)|\mathrm{d}s+M_v\int_0^{2\pi}g(s)|f(\tilde{v}_n)-f(\tilde{v})|\mathrm{d}s\right)\end{aligned}\tag{17}$$

由 $\alpha_{v_n}\to\alpha_v$，(16)式及勒贝格控制收敛定理可知，当 $n\to 0$ 时(17)式不等号右边趋于 0. 因此在 X 中 $u_n\to u$，即 T_λ 连续. 又因为

$$\begin{aligned}(T_\lambda v)'(t)=D\Big(&\int_0^t[\cos\rho(t-s)-\alpha_v\cos\rho(2\pi-t+s)+(1-\alpha_v)\sin\rho s\sin\rho(2\pi-t)]\\ &g(s)f(\tilde{v}_n)\mathrm{d}s+\int_t^{2\pi}[-\alpha_v\cos\rho(s-t)-\\ &\alpha_v\cos\rho(2\pi-s+t)+(1-\alpha_v)\cos\rho t\cos\rho(2\pi-s)]g(s)f(\tilde{v}_n)\mathrm{d}s\Big),\end{aligned}$$

其中 $D=\dfrac{\lambda}{(1+\alpha_v)(1-\cos 2\rho\pi)}$，说明 T_λ 将 $C[0,2\pi]$ 中的有界集映到 $C^1[0,2\pi]$ 中的有界集. 因而 T_λ 是一个 Banach 空间 X 中的全连续算子.

令 $a>1$，使得当 $z>a$ 时 $f(z)>0$. 因为

$$\limsup_{t\to 0^+}t^{\gamma}|f(t)|<\infty,$$

所以存在一个常数 $d>0$，使得

$$|f(z)|\leqslant\frac{d}{z^{\gamma}},\ z\in(0,a).$$

因而对所有的 $z>0$，有

$$f(z)\geqslant-\frac{d}{z^{\gamma}}\tag{18}$$

及

$$|f(z)|\leqslant\frac{d}{z^{\gamma}}+\hat{f}(\max\{z,a\})\tag{19}$$

其中 $\hat{f}(t)=\sup\limits_{a\leqslant z\leqslant t} f(z), t\geqslant a$. 注意 $\hat{f}$ 是非减的.

假设 $\lambda<\dfrac{a}{2c_1(d+\hat{f}(a))}$,其中

$$c_1=\int_0^{2\pi} M_v g(s)\mathrm{d}s.$$

下面我们对 $T_\lambda\in X$ 验证引理 2.3 中的假设.

(a) 存在 $r_\lambda>0$, 使得当 $u\in X$ 满足 $u=\theta T_\lambda u, \theta\in[0,1]$ 时,则有 $\|u\|_\infty\neq r_\lambda$. 令 $u\in X$ 满足 $u=\theta T_\lambda u, \theta\in(0,1]$,则 $\dfrac{u}{\theta}=T_\lambda u$ 且

$$u(t)=\lambda\theta\int_0^{2\pi} G_u(t,s)g(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s, t\in[0,2\pi].$$

因为 $a>1$,由(19)式可得

$$|f(\tilde{u}(s))|\leqslant\frac{d}{\tilde{u}^\gamma(s)}+\hat{f}(\max\{\tilde{u}(s),a\})\leqslant d+\hat{f}(\max\{u(s),a\}).$$

因此

$$|u(t)|\leqslant\lambda(dM_v\int_0^{2\pi}g(s)\mathrm{d}s+M_v\hat{f}(\max\{\|u\|_\infty,a\})\int_0^{2\pi}g(s)\mathrm{d}s)=\lambda c_1(d+\hat{f}(\max\{\|u\|_\infty,a\})), t\in[0,2\pi].$$

从而

$$\frac{\|u\|_\infty}{c_1(d+\hat{f}(\max(\{\|u\|_\infty,a\})))}\leqslant\lambda \tag{20}$$

又由 $2\lambda<\dfrac{a}{c_1(d+\hat{f}(a))}$ 及(H3)得

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z}{c_1(d+\hat{f}(z))}=0,$$

则存在一个常数 $r_\lambda>a$,使得

$$2\lambda=\frac{r_\lambda}{c_1(d+\hat{f}(r_\lambda))} \tag{21}$$

结合(20)式和(21)式,有 $\|u\|_\infty\neq r_\lambda$. 注意 $\lambda\to 0$ 时 $r_\lambda\to\infty$.

(b) 存在 $R_\lambda>r_\lambda$, 使得如果 $u\in X$ 满足 $u=T_\lambda u+\xi, \xi\geqslant 0$,那么 $\|u\|_\infty\neq R_\lambda$. 令 $u\in X$ 满足 $u=T_\lambda u+\xi, \xi\geqslant 0$. 则 $u-\xi=T_\lambda u$. 因此

$$u(t)-\xi=\lambda\int_0^{2\pi}G_u(t,s)g(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s, \quad t\in[0,2\pi] \tag{22}$$

$$k(t)=dg(t), t\in(0,2\pi).$$

则 $k\in L^1(0,2\pi)$. 因此 u 满足

$$\begin{cases}u''+\rho^2u=\lambda g(t)f(\tilde{u}), t\in[0,2\pi],\\ u(0)\leqslant\alpha_u u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi).\end{cases}$$

由(18)式,有

$$g(t)f(\tilde{u}(t))\geqslant-\frac{dg(t)}{\tilde{u}^\gamma(t)}\geqslant-dg(t)=-k(t) \tag{23}$$

由引理 2.2 知,当 $\|u\|_\infty>\|k\|_1$ 时有

$$u(t)\geqslant\frac{m_u}{M_u}\|u\|_\infty-M_u\|k\|_1, t\in[0,2\pi] \tag{24}$$

其中$M_u=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}G_u(t,s), m_u=\min\limits_{t\in[0,2\pi]}G_u(t,s)$. 假设

$$\|u\|_\infty>\max\{2\|k\|_1, \frac{2M_u}{2m_u-M_u^2}\}.$$

则由(24)式得

$$u(s)\geqslant\frac{2m_u-M_u^2}{2M_u}\|u\|_\infty \tag{25}$$

由(18),(22),(23)和(25)式,对 $t\in[0,2\pi]$有

$$u(t)\geqslant\lambda\int_0^{2\pi}G_u(t,s)g(s)f(\tilde{u})\mathrm{d}s\geqslant\lambda m_u\check{f}(\frac{2m_u-M_u^2}{2M_u}\|u\|_\infty)\int_0^{2\pi}g(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\check{f}(t)=\inf\limits_{z\geqslant t}f(z)$. 进而可得

$$\frac{m_u\check{f}(\frac{2m_u-M_u^2}{2M_u}\|u\|_\infty)\int_0^{2\pi}g(s)\mathrm{d}s}{\|u\|_\infty}\leqslant\frac{1}{\lambda}.$$

当 $\|u\|_\infty\to\infty$时,上式左边趋于 ∞,从而可知存在 $R_\lambda\gg 1$ 使得 $\|u\|_\infty<R_\lambda$. 故引理 2.3 中的条件(b)得证.

根据引理 2.3, T_λ 存在一个不动点u_λ 满足 $\|u_\lambda\|_\infty>r_\lambda$. 又由(24)式及当$\lambda\to 0$ 时 $r_\lambda\to\infty$,当λ充分小时 u_λ 是问题(2)的一个正解,即存在一个常数 $\lambda_0>0$,使得当$\lambda<\lambda_0$ 时问题(2)有一个正解u_λ.

注 3 本文在第三部分证明了问题(2)正解的存在性,其中 $h:[0,\infty)\to[1,\infty)$ 连续. 值得注意的是,当 $h:[0,\infty)\to(0,1]$ 连续时由引理 2.2 我们有如下引理:

引理 3.1[*] 令 $k\in L^1(0,2\pi)$满足 $k\geqslant 0$,且令 $u\in C^1[0,2\pi]\cap C^2[0,2\pi]$满足

$$\begin{cases}u''+\rho^2u\geqslant-k(t), t\in[0,2\pi],\\ u(0)\geqslant\alpha u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi),\end{cases}$$

其中 $\alpha\leqslant 1$ 是一个常数. 假设 $\|u\|_\infty>\|k\|_1$. 则有

$$u(t)\geqslant\frac{m}{M}\|u\|_\infty-M\|k\|_1.$$

根据定理 1.1 同样的证明方法,我们可以得到问题(2)在 $h:[0,\infty)\to(0,1]$ 连续时正解的存在性.

参考文献：

[1] Jiang D Q. On the existence of positive solutions to second order periodic BVPs[J]. Acta Math Sci, 1998, 18: 31.

[2] Graef J R, Kong L, Wang H Y. A periodic boundary value problem with vanishing Green's functions [J]. Appl Math Lett, 2008, 245: 176.

[3] Ma R Y, Xu J, Han X L. Global structure of positive solutions for superlinear second-order periodic boundary value problems [J]. Appl Math Comput, 2012, 218: 5982.

[4] Hao X N, Liu L S, Wu Y H. Existence and multiplicity results for nonlinear periodic boundary value problems [J]. Nonlinear Anal: Theor, 2010, 72: 3635.

[5] Torres P J. Existence of one-signed periodic solutions of some second－order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem [J]. J Differ Equ, 2003, 190: 643.

[6] Yao Q L. Positive solutions of nonlinear second-order periodic boundary value problems [J]. Appl Math Lett, 2007, 20: 583.

[7] Ma R Y, Gao C H, Chen R P. Existence of positive solutions of nonlinear second-order periodic boundary value problems [J]. Bound Value Probl, 2010, 1: 1.

[8] Zhang Z X, Wang J X. On existence and multiplicity of positive solutions to periodic boundary value problems for singular nonlinear second order differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2003, 281: 99.

[9] Jiang D Q, Chu J F, O'Regan, *et al*. Multiple positive solutions to superlinear periodic boundary value problems with repulsive singular forces [J]. J Math Anal Appl, 2003, 286: 563.

[10] Hai D D, Shivaji R. Positive radial solutions for a class of singular superlinear problems on the exterior of a ball with nonlinear boundary conditions [J]. J Math Anal Appl, 2017, 456: 872.

[11] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京：科学出版社，2004.

引用本文格式：

中　文：苏肖肖. 一类带非线性边界条件的奇异二阶常微分方程正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：1019.

英　文：Su X X. Existence of positive solutions for a class of singular second-order ordinary differential equations with nonlinear boundary condition [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 1019.