doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.06.007

一类单参数二阶周期边值问题正解的存在性

李朝倩
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了非线性二阶常微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} u''+a(t,u)u=\lambda g(t)f(u), t\in[0,T], \\ u(0)=u(T), u'(0)=u'(T) \end{cases}$$

正解的存在性，其中 λ 是一个正参数，$a:[0,T]\times[0,\infty)\to\mathbf{R}^+$ 为 L^p-Carathéodory 函数，$g:[0,T]\to[0,\infty)$，$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为连续函数. 主要结果的证明基于锥上的不动点指数理论.

关键词：周期边值问题；锥；正解；存在性
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)06-1026-07

Existence of positive solutions for a class of second order periodic boundary value problems with one parameter

LI Zhao-Qian
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we consider the existence of positive solutions for the following nonlinear second-order ordinary differential equation with periodic boundary values:

$$\begin{cases} u''+a(t,u)u=\lambda g(t)f(u), t\in[0,T], \\ u(0)=u(T), u'(0)=u'(T), \end{cases}$$

where λ is an positive parameter, $a:[0,T]\times[0,\infty)\to\mathbf{R}^+$ is a L^p-Carathéodory function, $g:[0,T]\to[0,\infty)$, $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ are continuous functions. The proof of the main results is based on the fixed point index theory on cones.

Keywords: Periodic boundary problem; Cone; Positive solution; Existence
(2010 MSC 26A33)

1　引　言

近年来，许多学者研究了非线性二阶常微分方程周期边值问题的可解性[1-10]. 特别地，Jiang 等[1]利用锥拉伸与压缩不动点定理获得了二阶常微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} u''+\rho^2 u=f(t,u), t\in[0,2\pi], \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $0<\rho<\frac{1}{2}$ 为常数，$f\in C([0,2\pi]\times[0,\infty),[0,\infty))$ 且满足超线性或次线性条件. Graef[2]研究了二阶常微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)u=g(t)f(u), t\in[0,2\pi], \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $a(t)>0$，并基于锥拉伸与压缩不动点定理得到如下结果：

定理 A　设 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$，$g\in C([0,$

收稿日期：2018-12-27
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：李朝倩(1995－)，女，陕西咸阳人，硕士生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：2386616217@qq.com

$2\pi],[0,\infty))$且 $\eta=\min\limits_{t\in[0,2\pi]}g(t)>0$. 若 f 满足

(i) $f_0=\infty,\ f_\infty=0$,

或

(ii) $f_0=0,\ f_\infty=\infty$,

则问题(2)至少存在一个正解，其中

$$f_0=\lim_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u}\ ,f_\infty=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}.$$

文献[1]研究了势函数等于一个常数时问题(1)正解的存在性，文献[2]则研究了势函数等于 $a(t)$ 时问题(2)正解的存在性. 一个自然的问题是：当问题(2)中的函数 a 受 u 的影响时，二阶周期边值问题正解的存在性如何？当 a 的变化与 u 相关时，需要考虑新的约束条件来限制 a. 本文运用不动点指数理论考察二阶周期边值问题

$$\begin{cases}u''+a(t,u)u=\lambda g(t)f(u),t\in[0,T],\\ u(0)=u(T),u'(0)=u'(T)\end{cases}\tag{3}$$

正解的存在性. 问题(3)可以等价地表示为

$$\begin{cases}u''+\tilde{a}(t)u=\lambda g(t)f(u)-a(t,u)u+\tilde{a}(t)u,t\in[0,T],\\ u(0)=u(T),u'(0)=u'(T)\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\tilde{a}(t)>0,\tilde{a}\in L^p(0,T),1\leqslant p\leqslant\infty,\|\tilde{a}\|_p\leqslant K(2p^*)$. 本文总假定：

(H1) $a:[0,T]\times[0,\infty)\to\mathbf{R}^+$ 为 L^p-Carathéodory 函数，且存在函数 $\tilde{a}(t)>0,\tilde{a}\in L^p(0,T),1\leqslant p\leqslant\infty$, $\|\tilde{a}\|_p\leqslant K(2p^*)$，使得

$a(t,u)\leqslant\tilde{a}(t),u\in[0,\infty),a.e.\ t\in[0,T]$;

(H2) $g:[0,T]\to[0,\infty)$连续，且 $\int_0^T g(t)\mathrm{d}t>0$;

(H3) $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，且当 $u>0$ 时 $f(u)>0$.

记

$f^*(r)=\max\limits_{u\in[\sigma r,r]}\{f(u)\},f_*(r)=\min\limits_{u\in[\sigma r,r]}\{f(u)\}$, $\tilde{a}(t)>0$ 表示 $\tilde{a}(t)\geqslant0$, a.e. $t\in[0,T]$, M,m 分别表示问题(4)对应的齐次问题的 Green 函数的最大值与最小值，$\sigma=\dfrac{m}{M}$, i_0 表示集合 $\{f_0,f_\infty\}$ 中值为 0 的元素的个数，i_∞ 表示集合 $\{f_0,f_\infty\}$ 中值为 ∞ 的元素个数.

本文的主要结果是：

定理 1.1　假设(H1)～(H3)成立，且

$$M\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s<1.$$

则

(a) 若 $i_0=1$ 或 2，则存在 $\lambda_0>0$，使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时 问题(3)至少存在 i_0 个正解；

(b) 若 $i_\infty=1$ 或 2，则存在 $\lambda_0>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时，问题(3)至少存在 i_∞ 个正解；

(c) 若 $i_0=0$，则存在 $\lambda_0>0$，使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时 问题(3)不存在正解；

(d) 若 $i_\infty=0$，则存在 $\lambda_0>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时，问题(3)不存在正解.

定理 1.2　假设(H1)～(H3)成立，且

$$M\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s<1.$$

则当 $i_0=i_\infty=0$ 时，若

$$\frac{1-m\sigma\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s}{m\sigma\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\max\{f_0,f_\infty\}}<$$

$$\lambda<\frac{1-M\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s}{M\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}\frac{1}{\min\{f_0,f_\infty\}},$$

则问题(3)至少存在一个正解.

注 1　在问题(3)中，当 $a(t,u)=\rho^2$ 时，定理 1.1 退化为文献[1]中研究的问题. 当 $a(t,u)=a(t)$ 时，定理 1.1 退化为定理 A，因而定理 1.1 是文献[2]中定理 A 的直接推广.

2　预备知识

引理 2.1[3]　假设 $\tilde{a}(t)>0,\tilde{a}\in L^p(0,T),1\leqslant p\leqslant\infty$. 若

$$\|\tilde{a}\|_p\leqslant K(2p^*)\tag{5}$$

则对于所有 $(t,s)\in[0,T]\times[0,T],G(t,s)>0$，其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^*}=1$，最佳 Sobolev 常数为

$$K(q)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{qT^{1+2/q}}\left(\dfrac{2}{2+q}\right)^{1-2/q}\left(\dfrac{\Gamma(\frac{1}{q})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{q})}\right)^2,0\leqslant q<\infty,\\ \dfrac{4}{T},\ q=\infty,\end{cases}$$

这里 Γ 为 Gamma 函数.

注 2　特别地，当 $p=+\infty$ 时，(5)式可以表示为 $\|\tilde{a}\|_\infty<(\frac{\pi}{T})^2$.

引理 2.2[4-5]　设 E 是 Banach 空间，$K\subset E$ 是一个锥. 对 $r>0$，定义 $K_r=\{u\in K:\|u\|<r\}$. 设 $A:\bar{K}_r\to K$ 是一个全连续算子，对任意的 $u\in\partial K_r=\{u\in K:\|u\|=r\}$ 有 $Ax\neq x$. 则

(i)若 $\|Au\|\geqslant\|u\|,u\in\partial K_r$，则 $i(A,K_r,K)=0$;

(ii)若 $\|Au\|\leqslant\|u\|,u\in\partial K_r$，则 $i(A,K_r,K)=1$.

设 $E=C[0,T]$ 在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,T]}|u(t)|$ 下构

成 Banach 空间,

$$K=\{u\in E: u(t)\geqslant 0,\ \min_{t\in[0,T]} u(t)\geqslant \sigma\|u\|\}$$

是 E 中的锥,其中 $\sigma=\dfrac{m}{M}$. 当 $r>0$ 时,令

$$\Omega_r=\{u\in K: \|u\|<r\},$$
$$\partial\Omega_r=\{u\in K: \|u\|=r\}.$$

定义算子 $A_\lambda: K\to E$ 为

$$A_\lambda u(t)=\int_0^T G(t,s)[\lambda g(s)f(u(s))-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

其中 $G(t,s)$ 表示边值问题

$$\begin{cases} u''+\tilde{a}(t)u=0, t\in[0,T], \\ u(0)=u(T), u'(0)=u'(T) \end{cases}$$

的 Green 函数. 记

$$M:=\max_{0\leqslant t,s\leqslant T} G(t,s),\ m:=\min_{0\leqslant t,s\leqslant T} G(t,s),$$

且 $M>m>0$.

注 3 特别地,当 $\tilde{a}(t)\equiv m^2$, $m\in(0,\dfrac{\pi}{T})$ 时, Green 函数退化为

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{\sin m(t-s)+\sin m(T-t+s)}{2m(1-\cos mT)}, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, \\ \dfrac{\sin m(s-t)+\sin m(T-s+t)}{2m(1-\cos mT)}, 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T, \end{cases}$$

恰为文献[6]中显式给出的 Green 函数.

引理 2.3 假设(H1)~(H3)成立,则 $A_\lambda K\subset K$ 且 $A_\lambda: K\to K$ 是一个全连续算子.

证明 若 $u\in K$,则 $A_\lambda u(t)\geqslant 0, t\in[0,T]$,且

$$\min_{t\in[0,T]} A_\lambda u(t) = \min_{t\in[0,T]}\int_0^T G(t,s)[\lambda g(s)f(u(s))-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s\geqslant$$
$$m\int_0^T[\lambda g(s)f(u(s))-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s=$$
$$\sigma M\int_0^T[\lambda g(s)f(u(s))-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s\geqslant\sigma\|A_\lambda u\|.$$

因而 $A_\lambda K\subset K$. 显然 $A_\lambda: K\to K$ 是全连续算子. 问题(4)有解等价于算子方程 $A_\lambda u=u$ 有不动点. 证毕.

引理 2.4 设(H1)~(H3)成立. 若 $u\in K$,对任意的 $t\in[0,T]$,都有 $f(u(t))\geqslant\eta u(t)$ 成立,其中 $\eta>0$,则

$$\|A_\lambda u\|\geqslant m\sigma\|u\|\int_0^T[\lambda\eta g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s.$$

证明 由 $u\in K$,对任意 $t\in[0,T]$ 我们都有 $f(u(t))\geqslant\eta u(t)$ 成立,所以

$$\|A_\lambda u\|\geqslant m\int_0^T[\lambda g(s)f(u(s))-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s\geqslant$$
$$m\int_0^T[\lambda g(s)u(s)\eta-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s\geqslant m\sigma\|u\|\int_0^T[\lambda\eta g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s=$$
$$m\sigma\int_0^T[\lambda\eta g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s\|u\|.$$

证毕.

引理 2.5 假设(H1)~(H3)成立. 若 $u\in\partial\Omega_r, r>0$,且存在 $\varepsilon>0$,对任意的 $t\in[0,T]$,都有 $f(u(t))\leqslant\varepsilon u(t)$,则

$$\|A_\lambda u\|\leqslant M\|u\|\int_0^T[\lambda\varepsilon g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s.$$

证明 因为 $u\in\partial\Omega_r, r>0$,且对任意的 $t\in[0,T]$ 都有 $f(u(t))\leqslant\varepsilon u(t)$ 所以

$$\|A_\lambda u\| \leqslant M\int_0^T[\lambda g(s)f(u(s))-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$M\int_0^T[\lambda g(s)\varepsilon u(s)-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s \leqslant M\|u\|\int_0^T[\lambda\varepsilon g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s.$$

证毕.

引理 2.6　假设(H1)~(H3)成立. 若 $u\in\partial\Omega_r, r>0$，则

$$\|A_\lambda u\| \geqslant m\int_0^T(\lambda g(s)\,f_*(r)+[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\sigma\|u\|)\mathrm{d}s,$$

其中 $f_*(r)=\min\limits_{u\in[\sigma r,r]}\{f(u)\}>0$.

证明　由 $u\in\partial\Omega_r, r>0$ 知 $u\in K$. 所以 $\sigma\|u\|\leqslant u\leqslant\|u\|$，即 $\sigma r\leqslant u\leqslant r$. 因此，$f(u(t))\geqslant f_*(r), t\in[0,T]$. 所以

$$\|A_\lambda u\| \geqslant m\int_0^T[\lambda g(s)f(u(s))-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s \geqslant$$

$$m\int_0^T(\lambda g(s)\,f_*(r)+[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\sigma\|u\|)\mathrm{d}s.$$

证毕.

引理 2.7　假设(H1)~(H3)成立. 若 $u\in\partial\Omega_r, r>0$，则

$$\|A_\lambda u\| \leqslant M\int_0^T(\lambda g(s)\,f^*(r)+[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\|u\|)\mathrm{d}s.$$

其中 $f^*(r)=\max\limits_{u\in[\sigma r,r]}\{f(u)\}>0$.

证明　由 $u\in\partial\Omega_r, r>0$ 知 $u\in K$. 所以 $\sigma\|u\|\leqslant u\leqslant\|u\|$，即 $\sigma r\leqslant u\leqslant r$. 因此 $f(u(t))\leqslant f^*(r), t\in[0,T]$. 所以

$$\|A_\lambda u\| \leqslant M\int_0^T[\lambda g(s)f(u(s))-a(s,u(s))u(s)+\tilde{a}(s)u(s)]\mathrm{d}s \leqslant M\int_0^T(\lambda g(s)\,f^*(r)+[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\|u\|)\mathrm{d}s.$$

证毕.

3　主要结果的证明

定理 1.1 的证明　(a) 取 $r_1>0$. 若 $u\in\partial\Omega_{r_1}$，根据引理 2.6 得

$$\|A_\lambda u\| \geqslant m\int_0^T(\lambda g(s)\,f_*(r)+[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\sigma\|u\|)\mathrm{d}s > m\int_0^T(\lambda_0 g(s)\,f_*(r)+[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\sigma\|u\|)\mathrm{d}s \geqslant \|u\|, \lambda>\lambda_0,$$

其中

$$\lambda_0 \geqslant \frac{r_1\left(1-m\sigma\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s\right)}{m\,f_*(r_1)\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}>0.$$

若 $f_0=0$，则存在 $r_2\in(0,r_1)$ 使得对 $0\leqslant u\leqslant r_2$ 有 $f(u)\leqslant\varepsilon u$，其中 $\varepsilon>0$，满足

$$M\int_0^T[\lambda\varepsilon g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s<1 \tag{6}$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_2}$，则 $f(u(t))\leqslant\varepsilon u(t)$，$t\in[0,T]$. 根据引理 2.5，有

$$\|A_\lambda u\| \leqslant M\|u\|\int_0^T[\lambda\varepsilon g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s<\|u\|, u\in\partial\Omega_{r_2}.$$

根据引理 2.2 得

$$i(A_\lambda,\Omega_{r_1},K)=0, i(A_\lambda,\Omega_{r_2},K)=1.$$

则 $i(A_\lambda,\Omega_{r_1}\setminus\bar{\Omega}_{r_2},K)=-1$. 因此 A_λ 有一个不动点 $u_1\in(\Omega_{r_1}\setminus\bar{\Omega}_{r_2})$，即当 $\lambda>\lambda_0$ 时，问题(3)存在一个正解.

若 $f_\infty=0$，则存在 $\hat{H}>0$，使得当 $u\geqslant\hat{H}$ 时 $f(u)\leqslant\varepsilon u$，其中 $\varepsilon>0$ 满足(6)式. 记

$$r_3:=\max\left\{2r_1,\frac{\hat{H}}{\sigma}\right\}.$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_3}$，则

$$\min_{t\in[0,T]}u(t)\geqslant\sigma\|u\|\geqslant\hat{H}, t\in[0,T].$$

因此，若 $u\in\partial\Omega_{r_3}$ 则 $f(u(t))\leqslant\varepsilon u(t), t\in[0,T]$. 根据引理 2.5 得

$$\|A_\lambda u\| \leqslant M\|u\|\int_0^T[\lambda\varepsilon g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s<\|u\|, u\in\partial\Omega_{r_3}.$$

根据引理 2.2 得

$$i(A_\lambda,\Omega_{r_1},K)=0, i(A_\lambda,\Omega_{r_3},K)=1.$$

则 $i(A_\lambda,\Omega_{r_3}\backslash\bar{\Omega}_{r_1},K)=1$. 因此,$A_\lambda$ 有一个不动点 $u_2\in(\Omega_{r_3}\backslash\bar{\Omega}_{r_1})$,即当 $\lambda>\lambda_0$ 时问题(3)存在一个正解.

若 $f_0=f_\infty=0$,容易看出 A_λ 有两个不动点 $u_1\in(\Omega_{r_1}\backslash\bar{\Omega}_{r_2})$ 和 $u_2\in(\Omega_{r_3}\backslash\bar{\Omega}_{r_1})$. 因此

$$r_2<\|u_1\|<r_1<\|u_2\|<r_3,$$

即当 $f_0=f_\infty=0$, $\lambda>\lambda_0$ 时问题(3)存在两个正解.

(b) 取 $r_1>0$. 若 $u\in\partial\Omega_{r_1}$,根据引理 2.7 得

$$\|A_\lambda u\|\leqslant M\int_0^T(\lambda g(s)f^*(r)+[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\|u\|)\mathrm{d}s<$$
$$M\int_0^T(\lambda_0 g(s)f^*(r)+[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\|u\|)\mathrm{d}s\leqslant\|u\|, 0<\lambda<\lambda_0,$$

其中

$$0<\lambda_0<\frac{r_1(1-M\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s)}{M\int_0^T g(s)\mathrm{d}s f^*(r_1)}.$$

若 $f_0=\infty$,则存在 $r_2\in(0,r_1)$,使得对 $0\leqslant u\leqslant r_2$ 有 $f(u)\geqslant\eta u$,其中 $\eta>0$ 满足

$$m\sigma\int_0^T[\lambda\eta g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s>1 \quad (7)$$

因此,若 $u\in\partial\Omega_{r_2}$,则 $f(u(t))\geqslant\eta u(t)$, $t\in[0,T]$. 根据引理 2.4 得

$$\|A_\lambda u\|\geqslant m\sigma\|u\|\int_0^T[\lambda\eta g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s>\|u\|, u\in\partial\Omega_{r_2}.$$

根据引理 2.2,有

$$i(A_\lambda,\Omega_{r_1},K)=1, i(A_\lambda,\Omega_{r_2},K)=0.$$

则 $i(A_\lambda,\Omega_{r_1}\backslash\bar{\Omega}_{r_2},K)=1$. 因此 A_λ 有一个不动点 $u_1\in(\Omega_{r_1}\backslash\bar{\Omega}_{r_2})$,即当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时问题(3)存在一个正解.

若 $f_\infty=\infty$,则存在 $\hat{H}>0$,使得对 $u\geqslant\hat{H}$ 有 $f(u)\geqslant\eta u$,其中 $\eta>0$ 满足(7)式. 记

$$r_3:=\max\left\{2r_1,\frac{\hat{H}}{\sigma}\right\}.$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_3}$,则

$$\min_{t\in[0,T]}u(t)\geqslant\sigma\|u\|\geqslant\hat{H}, t\in[0,T].$$

因此,若 $u\in\partial\Omega_{r_3}$,则

$$f(u(t))\geqslant\eta u(t), t\in[0,T].$$

由引理 2.4 得

$$\|A_\lambda u\|\geqslant m\sigma\|u\|\int_0^T[\lambda\eta g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s>\|u\|, u\in\partial\Omega_{r_3}.$$

再由引理 2.2 得

$$i(A_\lambda,\Omega_{r_1},K)=1, i(A_\lambda,\Omega_{r_3},K)=0.$$

则 $i(A_\lambda,\Omega_{r_3}\backslash\bar{\Omega}_{r_1},K)=-1$. 因此,$A_\lambda$ 有一个不动点 $u_2\in(\Omega_{r_3}\backslash\bar{\Omega}_{r_1})$. 即当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时问题(3)存在一个正解.

若 $f_0=f_\infty=\infty$,容易看出 A_λ 有两个不动点 $u_1\in(\Omega_{r_1}\backslash\bar{\Omega}_{r_2})$ 和 $u_2\in(\Omega_{r_3}\backslash\bar{\Omega}_{r_1})$. 因此

$$r_2<\|u_1\|<r_1<\|u_2\|<r_3,$$

即当 $f_0=f_\infty=\infty$, $0<\lambda<\lambda_0$ 时问题(3)存在两个正解.

(c) 若 $i_0=0$, $f_0>0$, $f_\infty>0$,则存在正的常数 η_1,η_2,r_1,r_2 使得 $r_1<r_2$,

$$\begin{cases}f(u)\geqslant\eta_1 u, u\in[0,r_1],\\ f(u)\geqslant\eta_2 u, u\in[r_2,\infty).\end{cases}$$

令

$$c_1=\min\left\{\eta_1,\eta_2,\min_{r_1\leqslant u\leqslant r_2}\left\{\frac{f(u)}{u}\right\}\right\}>0.$$

则 $f(u)\geqslant c_1 u$, $u\in[0,\infty)$. 反设问题(3)存在一个正解 $v(t)$,即

$$A_\lambda v(t)=v(t), t\in[0,T].$$

则当

$$\lambda>\lambda_0=\frac{1-m\sigma\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]ds}{m\sigma c_1\int_0^T g(s)ds}>0$$

时,由引理 2.4 得

$$\|v(t)\|=\|A_\lambda v\|\geqslant m\sigma\|v\|\int_0^T[\lambda c_1 g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s>\|v\|.$$

矛盾. 假设不成立. 所以问题(3)不存在正解.

(d) 若 $i_\infty=0$, $f_0<\infty$, $f_\infty<\infty$,则存在正的常数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,r_1,r_2$ 使得 $r_1<r_2$,且

$$\begin{cases}f(u)\leqslant\varepsilon_1 u, u\in[0,r_1],\\ f(u)\leqslant\varepsilon_2 u, u\in[r_2,\infty).\end{cases}$$

令

$$c_2=\max\left\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\min_{r_1\leqslant u\leqslant r_2}\left\{\frac{f(u)}{u}\right\}\right\}>0.$$

因此 $f(u)\leqslant c_2 u$ ，$u\in[0,\infty)$. 反设问题(3)存在一个正解 $v(t)$，即

$$A_\lambda v(t)=v(t),t\in[0,T].$$

则当

$$0<\lambda<\lambda_0=\frac{1-M\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s}{Mc_2\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}$$

时，由引理 2.5 可得

$$\|v(t)\|=\|A_\lambda v\|\leqslant M\|v\|\int_0^T[\lambda c_2 g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s<\|v\|.$$

矛盾. 假设不成立. 问题(3)不存在正解. 证毕.

定理 1.2 的证明　若 $f_\infty>f_0$ ，则

$$0<\frac{1-m\sigma\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s}{m\sigma f_\infty\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}<\lambda<\frac{1-M\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s}{Mf_0\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}.$$

易见，存在 $0<\varepsilon<f_\infty$ 使得

$$\frac{1-m\sigma\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s}{m\sigma(f_\infty-\varepsilon)\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}<\lambda<\frac{1-M\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s}{M(f_0+\varepsilon)\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}.$$

由 f_0 的定义知，存在 $r_1>0$ ，使得当 $0\leqslant u\leqslant r_1$ 时有 $f(u)\leqslant(f_0+\varepsilon)u$. 因此，若 $u\in\partial\Omega_{r_1}$ ，则有 $f(u(t))\leqslant(f_0+\varepsilon)u(t)$，$t\in[0,T]$. 由引理 2.5 得

$$\|A_\lambda u\|\leqslant M\|u\|\int_0^T[\lambda(f_0+\varepsilon)g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s<\|u\|,u\in\partial\Omega_{r_1}.$$

由 f_∞ 的定义知，存在 $\hat{H}>r_1$ ，使得当 $u\geqslant\hat{H}$ 时有 $f(u)\geqslant(f_\infty-\varepsilon)u$ 成立. 记

$$r_2:=\max\left\{2r_1,\frac{\hat{H}}{\sigma}\right\}.$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_2}$ ，则

$$\min_{t\in[0,T]}u(t)\geqslant\sigma\|u\|\geqslant\hat{H},t\in[0,T].$$

因此，若 $u\in\partial\Omega_{r_2}$ ，则

$$f(u(t))\geqslant(f_\infty-\varepsilon)u(t),t\in[0,T].$$

根据引理 2.4 得

$$\|A_\lambda u\|\geqslant m\sigma\|u\|\int_0^T[\lambda(f_\infty-\varepsilon)g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s>\|u\|,u\in\partial\Omega_{r_2}.$$

又根据引理 2.2 得

$$i(A_\lambda,\Omega_{r_1},K)=1,i(A_\lambda,\Omega_{r_3},K)=0.$$

则 $i(A_\lambda,\Omega_{r_2}\bar{\Omega}_{r_1},K)=-1$. 因此，$A_\lambda$ 在 $\Omega_{r_2}\backslash\bar{\Omega}_{r_1}$ 有一个不动点. 所以问题(3)存在一个正解.

若 $f_\infty<f_0$ ，则

$$0<\frac{1-m\sigma\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s}{m\sigma f_0\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}<\lambda<\frac{1-M\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]ds}{Mf_\infty\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}.$$

易见，存在 $0<\varepsilon<f_0$ ，使得

$$\frac{1-m\sigma\int_0^T[\tilde{a}(s)-a(s,u(s))]\mathrm{d}s}{m\sigma(f_0-\varepsilon)\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}<\lambda<\frac{1-M\int_0^T[\tilde{a}(s)-aa(s,u(s))]\mathrm{d}s}{M(f_\infty+\varepsilon)\int_0^T g(s)\mathrm{d}s}.$$

由 f_0 的定义知，存在 $r_1>0$，使得当 $0\leqslant u\leqslant r_1$ 时有 $f(u)\geqslant(f_0-\varepsilon)u$ 成立. 因此，若 $u\in\partial\Omega_{r_1}$，则 $f(u(t))\geqslant(f_0-\varepsilon)u(t)$，$t\in[0,T]$. 由引理 2.4 得

$$\|A_\lambda u\|\geqslant m\sigma\|u\|\int_0^T[\lambda(f_0-\varepsilon)g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s>\|u\|,u\in\partial\Omega_{r_1}.$$

由 f_∞ 的定义，存在 $\hat{H}>r_1$，使得对 $u\geqslant\hat{H}$ 时有 $f(u)\leqslant(f_\infty+\varepsilon)u$ 成立. 记

$$r_2:=\max\left\{2r_1,\frac{\hat{H}}{\sigma}\right\}.$$

若 $u\in\partial\Omega_{r_2}$，则

$$\min_{t\in[0,T]}u(t)\geqslant\sigma\|u\|\geqslant\hat{H},t\in[0,T].$$

因此，若 $u\in\partial\Omega_{r_2}$，则

$$f(u(t))\leqslant(f_\infty+\varepsilon)u(t),t\in[0,T].$$

由引理 2.5 得

$$\|A_\lambda u\|\leqslant M\|u\|\int_0^T[\lambda(f_\infty+\varepsilon)g(s)-a(s,u(s))+\tilde{a}(s)]\mathrm{d}s<\|u\|,u\in\partial\Omega_{r_2}.$$

再由引理 2.2 得

$$i(A_\lambda,\Omega_{r_1},K)=0,i(A_\lambda,\Omega_{r_3},K)=1.$$

则 $i(A_\lambda,\Omega_{r_2}\backslash\bar{\Omega}_{r_1},K)=1$. 因此 A_λ 在 $\Omega_{r_2}\backslash\bar{\Omega}_{r_1}$ 有一个不动点. 问题(3)存在一个正解. 证毕.

参考文献:

[1] Jiang D Q. On the existence of positive solutions to second order periodic BVPS [J]. Acta Math Sci, 1998, 18: 31.

[2] Graef J R, Kong L J, Wang H Y. A periodic boundary value problem with vanishing Green′s function [J]. Appl Math Lett, 2008, 21: 176.

[3] Torres P J. Existence of one signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed theorem[J]. J Differ Equat, 2003, 190: 643.

[4] Elias U. Eigenvalue problems for the equation $Ly + \lambda p(x)y = 0$ [J]. J Differ Equat, 1978, 1: 28.

[5] 邓宗琦. 常微分方程边值问题和 Sturm 比较理论引论[M]. 武汉:华中师范大学出版社, 1987.

[6] Jiang D, Chu J, Regan D, *et al*. Multiple positive solutions to superlinear periodic boundary value problems with repulsive singular forces [J]. J Math Anal Appl, 2003, 2: 563.

[7] Hai D D. Existence of positive solutions for periodic boundary value problem with sign-changing Green′s function [J]. Positivity, 2018, 4: 22.

[8] Ma R, Gao C, Chen R. Existence of positive solutions of nonlinear second-order periodic boundary value problems [J]. Bound Value Probl, 2010, 1: 1.

[9] Cabada A, Enguica R, Lopezsomoza L. Positive solutions for second-order boundary-value problems with sign changing Green′s functions [J]. Electron J Differ Equat, 2017, 245: 1.

[10] Torres P J, Zhang M. A monotone iterative scheme for a nonlinear second order equation based on a generalized anti-maximum principle [J]. Math Nachr, 2003, 251: 101.

引用本文格式:

中 文:李朝倩. 一类单参数二阶周期边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2019, 56: 1026.

英 文:Li Z Q. Existence of positive solutions for a class of second order periodic boundary value problems with one parameter [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 1026.