doi：10.3969/j. issn. 0490-6756. 2020. 002

# 定向空间的下幂结构

谢晓林，寇 辉
(四川大学数学学院，成都，610064)

**摘 要**：定向空间范畴推广了 domain 理论. 该推广过程为函数式程序提供了非确定性指称语义的幂 domain 结构. 本文以自由代数的方式定义了定向空间的下幂空间，证明了每个定向空间的下幂空间存在并给出其具体构造. 一般情况下，定向空间的定向下幂空间既不同于赋予 Scott 拓扑的定向完备偏序集的下幂 domain，也不同于 Battenfeld 和 Schöder 定义的普通拓扑空间上观察诱导的下幂空间.

**关键词**：幂 domain；定向空间的下幂空间；观察诱导的下幂空间
**中图分类号**：O153.1 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2020)02-0211-07

## Lower power structures of directed spaces

*XIE Xiao-Lin*, *KOU Hui*
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract**: Powerdomains in domain theory play an important role in modeling the semantics of nondeterministic functional programming languages. In this paper, we extend the notion of powerdomain to the category of directed spaces and define the notion of lower powerspace of a directed space in the way of free algebras. Then we prove the existence of the lower powerspace over any directed space exists and give its concrete structure. Generally, the lower powerspace of a directed space is different from the lower powerdomain of a dcpo endowed with the Scott topology and the observationally-induced lower powerspace introduced by Battenfeld and Schöder in 2015.

**Keywords**: Powerdomain; Lower powerspace of directed spaces; Observationally-induced lower powerspace
(2010 MSC 54A05)

## 1 引 言

幂 domain 理论是 domain 理论的重要组成部分，其目的是为函数式程序语言的非确定性指称语义提供数学模型. domain 理论中有三种经典的幂结构，分别是下幂 domain (又称 Hoaer 幂 domain)、上幂 domain (又称 Smyth 幂 domain)和凸幂 domain (又称 Plotikin 幂 domain)[1-6]，且上述每种幂结构都有标准的拓扑表示.

近年来，文献[7-10]等对这些幂结构做了大量推广. 总的来说，这些幂结构都是 domain 关于某种二元运算生成的自由代数. 2015 年，Battenfeld 和 Schöder[11] 在一般的拓扑空间上引入幂空间结构，通过布尔代数 **2** 赋予 Sierpinski 拓扑作为可观察结构，定义了上幂空间和下幂空间结构，并称之为观察诱导的上(下) 幂空间 (observation-

**收稿日期**：2019-03-11
**基金项目**：国家自然科学基金(11871353)
**作者简介**：谢晓林(1992－)，男，安徽滁州人，硕士生，主要研究方向为 domian 理论. E-mail：xxldannyboy@163. com
**通讯作者**：寇辉. E-mail：kouhui@scu. edu. cn

ally-induced lower and upper powerspace). 该工作为普通拓扑空间范畴应用于表示函数式程序的非确定性指称语义提供了可能，但是通过布尔代数 **2** 诱导的幂结构方法复杂，不易理解.

本文考虑一类特殊的拓扑空间——定向空间(等价于文献[12]中的 monotone determined space). 文献[10]证明，定向空间包含 domain 理论的基本对象——所有赋予 Scott 拓扑的定向完备偏序集，且与连续函数一起构成 Cartesian 闭范畴，定向空间是 domain 理论的一个扩展模型. 本文则考虑在定向空间范畴推广幂 domain 结构，通过自由代数的方式定义了定向下幂空间的概念，证明每个定向空间的定向下幂空间存在并给出其具体构造. 一般情况下，定向空间的定向下幂空间既不同于赋予 Scott 拓扑的定向完备偏序集的下幂 domain，也不同于普通拓扑空间上观察诱导的下幂空间.

## 2 预备知识

下面我们介绍本文需要的概念. 某些关于 domain 理论、拓扑学及范畴论的基础知识请参见文献[1, 13-14].

设 $P$ 是一个非空集合. $P$ 上的一个关系$\leqslant$称为偏序，如果$\leqslant$满足反身性($x\leqslant x$)，传递性($x\leqslant y \,\&\, y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z$)和反对称性($x\leqslant y \,\&\, y\leqslant x\Rightarrow x=y$). 称 $P$ 是一个偏序集若，$P$ 被赋予某种偏序$\leqslant$. 给定子集 $A\subseteq P$，记 $\downarrow A=\{x\in P: \exists a\in A, x\leqslant a\}$，$\uparrow A=\{x\in P: \exists a\in P, a\leqslant x\}$. $A$ 称为下集(上集)如果 $A=\downarrow A$ ($A=\uparrow A$). 一个非空子集 $D\subseteq P$ 称为定向的如果$D$ 的非空有限子集在$D$ 中有上界. 特别地，每个定向子集都有上确界(记为 $\vee D$)的偏序集称为定向完备偏序集，简称 dcpo. 偏序集 $P$ 的子集$U$ 称为 Scott 开集如果它是上集且对任意定向集 $D\subseteq P$，若 $\vee D$ 存在且属于 $U$ 则 $U\cap D\neq\varnothing$成立. $P$ 的所有 Scott 开集形成一个拓扑，称为 Scott 拓扑并记为 $\sigma(P)$. 设 $P,E$ 是两个偏序集，函数 $f: P\to E$ 称为 Scott 连续如果它关于 Scott 拓扑 $\sigma(P)$ 和 $\sigma(E)$是连续的.

本文的所有拓扑空间都要求具有$T_0$分离性. 拓扑空间 $X$ 的一个网是一个映射$\xi: J\to X$，这里$J$ 是一个定向集. 因此，偏序集的每个定向子集都可看成一个网，其指标集就是它自己. 通常，我们把一个网表示为 $(x_j)_{j\in J}$或 $(x_j)$. 设 $x\in X$，称 $(x_j)$收敛到 $x$，记为 $(x_j)\to x$ 或 $x\equiv\lim x_j$，若 $(x_j)$ 终在 $x$ 的每个开邻域，即，任给 $x$ 的开邻域 $U$，存在$j_0\in J$ 使得对任意 $j\in J$，$j\geqslant j_0\Rightarrow x_j\in U$，特别地，$\{y\}$表示取值为常值 $y$ 的常值网.

设 $X$ 是一个$T_0$拓扑空间，其拓扑记为 $O(X)$，$X$ 上的特殊化序定义如下：

$$\forall x,y\in X, x\sqsubseteq y\Leftrightarrow x\in\overline{\{y\}},$$

这里$\overline{\{y\}}$表示$\{y\}$的闭包. 从现在开始，$T_0$空间上的序总是上述定义的特殊化序"$\sqsubseteq$". 下面是特殊化序的一些基本性质.

**命题 2.1**[1,13] 对于$T_0$空间 $X$，下列性质总成立：

(i) 对任意开集 $U\subseteq X, U=\uparrow U$；

(ii) 对任意闭集 $A\subseteq X, A=\downarrow A$；

(iii) 设 $Y$ 是另一个$T_0$空间，且 $f: X\to Y$ 是 $X$ 到 $Y$ 的连续映射. 则对任意 $x,y\in X$，$x\sqsubseteq y\Rightarrow f(x)\sqsubseteq f(y)$，即连续函数是单调的.

设 $X$ 是一个$T_0$空间，则每个定向子集 $D\subseteq X$ 可被看成 $X$ 的一个网，我们用 $D\to x$ 或者 $x\equiv\lim D$ 表示 $D$ 收敛到 $x$. 记 $D(X)=\{(D,x): x\in X, D$ 是 $X$ 的定向子集并且 $D\to x\}$. 容易验证，任给 $x,y\in X$，$x\sqsubseteq y\Leftrightarrow\{y\}\to x$. 因此，当 $x\sqsubseteq y$ 时有 $(\{y\},x)\in D(X)$. 接下来给出定向空间的概念.

**定义 2.2**[10] 设 $X$ 是一个$T_0$空间.

(i) 一个子集 $U\subseteq X$ 称为定向开集如果 $\forall(D,x)\in D(X), x\in U\Rightarrow D\cap U\neq\varnothing$. 记 $d(X)$表示由 $X$ 的所有定向开集组成的集合.

(ii) 称 $X$ 为一个定向空间如果 $X$ 每个定向开集都是开集，即，$d(X)=O(X)$.

**注 1** (i) $T_0$拓扑空间每个开集是定向开集，反之不一定成立. 例如，设 $Y$ 是一个非离散的$T_1$拓扑空间，则其特殊化序是对角线，即，$\forall x,y\in Y$，$x\sqsubseteq y\Leftrightarrow x=y$. 因此，$Y$ 的所有子集都是定向开的. 注意 $Y$ 的拓扑非离散，故至少存在一个定向开集不是开集.

(ii) 这里的定向空间等价于文中的 monotone determined space.

(iii) 每个偏序集赋予 Scott 拓扑是一个定向空间. 因此，定向空间扩展 Scott 拓扑的概念.

下面介绍定向连续函数.

**定义 2.3** 设 $X,Y$ 是两个$T_0$空间. 函数 $f: X\to Y$ 称为定向连续如果它是单调的并且保持 $X$ 的所有定向集的极限；等价地，$(D,x)\in D(X)\Rightarrow(f(D),f(x))\in D(Y)$.

下面是定向连续函数的刻画.

**命题 2.4**[10]　设 $X,Y$ 是两个$T_0$空间. 函数 $f$: $X\to Y$ 是 $X,Y$ 之间的映射.

(i) $f$ 定向连续当且仅当$\forall U\in d(Y)$，$f^{-1}(U)\in d(X)$.

(ii) 若 $X,Y$ 是定向空间，则函数 $f$ 连续当且仅当它是定向连续的.

接下来介绍定向空间的乘积. 设 $X,Y$ 是两个定向空间. 令 $X\times Y$ 表示 $X,Y$ 的笛卡尔乘积，则该乘积上有一个自然的偏序：$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$，

$$(x_1,y_1)\leqslant(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1\sqsubseteq x_2,y_1\sqsubseteq y_2.$$

我们称该序为 $X\times Y$ 上的点态序. 接下来，我们在 $X\times Y$ 定义一个拓扑空间 $X\otimes Y$ 如下：

(i) $X\otimes Y$ 的承载集是 $X\times Y$；

(ii) $X\otimes Y$ 的拓扑由如下方式生成：任给$\leqslant$-定向集 $D\subseteq X\times Y$ 及$(x,y)\in X\times Y$，$D\to(x,y)\in X\otimes Y\Leftrightarrow\pi_1 D\to x\in X,\pi_2 D\to y\in Y$；

(iii) 子集 $U\subseteq X\times Y$ 是开的当且仅当对任意按上述方式定义的定向极限 $D\to(x,y)$，$(x,y)\in U\Rightarrow U\cap D\neq\emptyset$.

**定理 2.5**[10]　设 $X$ 和 $Y$ 是两个定向空间.

(i) 由上述方式生成拓扑空间 $X\otimes Y$ 是一个定向空间且满足如下性质：$X\otimes Y$ 特殊化序等于 $X\times Y$ 上的点态序，即$\sqsubseteq=\leqslant$.

(ii) 设 $Z$ 是另一个定向空间，则函数 $f$:$X\otimes Y\to Z$ 连续当且仅当它关于每个变量分别连续.

记 Dtop 表示由所有定向空间及连续映射构成的范畴. 文献[10]证明，Dtop 包含所有赋予 Scott 拓扑的偏序集且是一个 cartesian 闭范畴；特别地，两个定向空间 $X$ 和 $Y$ 的范畴乘积同构于 $X\otimes Y$. 因此，定向空间是 domain 理论的扩展模型.

## 3　定向空间的下幂空间

如前所述，定向空间是 domain 理论的扩展模型. 就像文献[11]所做的工作一样，在定向空间范畴推广幂 domain 结构是很有意义的. 本节将构造定向空间的下幂空间，该结构是定向空间关于膨胀运算生成的自由代数.

**定义 3.1**　设 $X$ 是一个定向空间.

(i) 称 $X$ 上的一个二元运算$\oplus$:$X\otimes X\to X$ 为一个膨胀运算如果它是连续的且满足以下四个条件：$\forall x,y,z\in X$，

a. $x\oplus x=x,\forall x\in X$；

b. $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z),\forall x,y,z\in X$；

c. $x\oplus y=y\oplus x$；

d. $x\oplus y\geqslant x,\forall x,y\in X$.

(ii) 若$\oplus$是 $X$ 上的膨胀运算，则称$(X,\oplus)$为一个定向膨胀半格，即定向膨胀半格就是那些带有膨胀运算的定向空间.

由定理 2.5,(ii)知，定向空间 $X$ 上的膨胀运算$\oplus$是连续的当且仅当它是单调的且任给 $x,y\in X$ 及定向集 $D\subseteq X$，若 $x\equiv\lim D$ 则 $x\oplus y\equiv\lim(D\oplus y)$. 这里，$D\oplus y=\{d\oplus y:d\in D\}$.

**例 3.2**　(i) 设 $P$ 是一个偏序集并赋予 Scott 拓扑，且对任意 $a,b\in P$，$a$ 和 $b$ 在 $P$ 中的上确界存在(记为 $a\vee b$). 则$(P,\vee)$是一个定向膨胀半格.

(ii) 令 $I=[0,1]$(单位区间)，记 $AI=\{[a,1]:a\in I\}$，则 $AI$ 是 $I$ 上的亚力山大拓扑. 容易验证，$(I,AI)$是一个定向空间，且赋予该拓扑后$(I,\max)$是一个定向膨胀半格.

**定义 3.3**　设$(X,\oplus)$,$(Y,\uplus)$是两个定向膨胀半格，映射 $f$:$(X,\oplus)\to(Y,\uplus)$称为 $X$ 与 $Y$ 之间的膨胀同态，如果 $f$ 关于两个定向空间是连续的并且 $f(x\oplus y)=f(x)\uplus f(y)$对所有$\forall x,y\in X$ 成立.

下面的引理表明一个定向空间上至多存在一个膨胀结构，记 $Disl$ 表示由所有定向膨胀半格和膨胀同态构成的范畴，因此范畴 $Disl$ 可以看作定向空间范畴 $Dtop$ 的子范畴.

**引理 3.4**　设$(X,\oplus)$是一个定向膨胀半格，那么$\oplus=\vee_{\sqsubseteq}$. 这里，$\forall x,y\in X$，$x\vee_{\sqsubseteq}y$ 表示 $x$ 和 $y$ 在 $X$ 中关于特殊化序$\sqsubseteq$的上确界(称之为并运算). 反之，若 $X$ 是一个定向空间且对任意 $x,y\in X$，$x\vee_{\sqsubseteq}y$ 存在，则当$\vee_{\sqsubseteq}$连续时，$(X,\vee_{\sqsubseteq})$是一个定向膨胀半格.

证明　由定义 3.1 知，$\forall x,y\in X$,$x\oplus y\geqslant x,y$，故 $x\oplus y$ 是$\{x,y\}$的一个上界. 设 $z$ 是$\{x,y\}$的任意一个上界，由定理 2.6 知，$X\otimes X$ 上的 点态序等于其特殊化序，故$(x,y)\sqsubseteq(z,z)$. 又因为膨胀算子连续且满足幂等性，所以 $x\oplus y\sqsubseteq z\oplus z=z$. 即 $x\oplus y$ 是$\{x,y\}$的上确界，从而 $x\oplus y=x\vee_{\sqsubseteq}y$. 反之，连续并运算显然符合定义 3.1 中的所有条件，从而结论成立. 证毕.

上述结论表明，一个定向膨胀半格$(X,\oplus)$就是一个定向空间带有一个连续的并运算$\vee_{\sqsubseteq}$并且$\oplus=\vee_{\sqsubseteq}$. 由于本文定向空间上的序关系总是特殊化序，以下我们用符号$\vee$代替$\vee_{\sqsubseteq}$. 因此，定向膨胀半格总是用形如$(X,\vee)$的二元组表示，其中

$X$ 是一个定向空间，$\vee$表示 $X$ 的连续并运算.

接下来给出下幂空间的定义.

**定义 3.5** 设 $X$ 是一个定向空间. 一个定向空间 $Z$ 称为 $X$ 的下幂空间如果下述两个条件成立：

(i) $Z$ 是一个定向膨胀半格，即 $Z$ 上的并运算 $\vee$存在且连续；

(ii) 存在连续映射 $i:X\to Z$ 且满足如下条件：对任意具有定向膨胀半格$(Y,\vee)$及连续映射 $f:X\to Y$，存在唯一的膨胀同态$\overline{f}:(Z,\vee)\to(Y,\vee)$使得 $f=\overline{f}\circ i$.

由上述定义知，若膨胀半格$(Z_1,\vee)$和$(Z_2,\vee)$都是定向空间 $X$ 的下幂空间，则存在拓扑同胚的膨胀同态 $g:Z_1\to Z_2$. 因此，在序同构且拓扑同胚意义下，定向空间的下幂空间唯一. 特别地，我们把任意定向空间 $X$ 的下幂空间记为$P_L(X)$.

下面，我们将通过具体构造的方式证明每个定向空间 $X$ 的下幂空间存在.

设 $X$ 是一个定向空间. 记

$LX=\{\downarrow F:F\subseteq_{fin}X\}$,

这里 $F\subseteq_{fin}X$ 的非空有限子集. 在 $LX$ 上定义序关系$\leqslant_L$如下：$\downarrow F_1\leqslant_L\downarrow F_2\Leftrightarrow\downarrow F_1\subseteq\downarrow F_2$.

设 $D\subseteq LX$ 是定向集（关于上述序关系$\leqslant_L$），$\downarrow F\in LX$. 定义符号 $D\Rightarrow_L\downarrow F$ 表示下述意义的收敛：$D\Rightarrow_L\downarrow F\Leftrightarrow\forall a\in F$，$\exists$ $X$ 的定向集$D_a\subseteq\bigcup D$ 满足$D_a\to a$.

一个子集$U\subseteq LX$ 称为 $LX$ 的$\Rightarrow_L$收敛开集如果对$LX$ 中的任意定向集 $D$ 及$\downarrow F\in LX$，若 $D\Rightarrow_L\downarrow F\in U$，则 $D\cap U\neq\varnothing$. 记$O_{\Rightarrow_L}(LX)$表示由 $LX$ 的所有$\Rightarrow_L$收敛开集组成的集族.

**命题 3.6** 设 $X$ 是一个定向拓扑空间，则下述各条成立：

(i) $(LX,O_{\Rightarrow_L}(LX))$是一个拓扑空间，简记为 $LX$；

(ii) $(LX,O_{\Rightarrow_L}(LX))$上的特殊化序$\sqsubseteq$等于$\leqslant_L$；

(iii) $(LX,O_{\Rightarrow_L}(LX))$是定向空间，即$O_{\Rightarrow_L}(LX)=d(LX)$.

**证明** (i) 显然 $\varnothing,LX\in O_{\Rightarrow_L}(LX)$. 设$U\in O_{\Rightarrow_L}(LX)$，$\downarrow F_1,\downarrow F_2\in LX$. 若$\downarrow F_1\leqslant\downarrow F_2$，$\{\downarrow F_2\}\Rightarrow_L\downarrow F_1$显然成立，从而$\downarrow F_1\in U$ 必然导致$\downarrow F_2\in U$. 这表明$U$ 关于序关系$\leqslant_L$是$LX$ 的上集. 设$U_1$，$U_2\in O_{\Rightarrow_L}(LX)$. 若 $D$ 是 $LX$ 中的定向集，$\downarrow F\in LX$ 且 $D\Rightarrow\downarrow F\in U_1\cap U_2$，则存在$\downarrow G_1\in D\cap U_1$和$\downarrow G_2\in D\cap U_2$. 由 $D$ 的定向性知，存在$\downarrow G\in D$ 使得$\downarrow G_1,\downarrow G_2\leqslant_L\downarrow G$，从而$\downarrow G\in D\cap U_1\cap U_2$. 同理可证$O_{\Rightarrow_L}(LX)$关于集合的任意并封闭. 因此，$O_{\Rightarrow_L}(LX)$是 $LX$ 上的一个拓扑.

(ii) 设$\downarrow F_1,\downarrow F_2\in LX$. 若$\downarrow F_1\leqslant_L\downarrow F_2$，则由(1)的证明，每个$\Rightarrow_L$收敛开集都是关于偏序$\leqslant_L$的上集，从而$\downarrow F_1\in\overline{\{\downarrow F_2\}}$，即，$\downarrow F_1\sqsubseteq\downarrow F_2$成立. 另一方面，设$\downarrow F_1\sqsubseteq\downarrow F_2$. 要证$\downarrow F_1\leqslant_L\downarrow F_2$，即证$\{\downarrow F\in LX:\downarrow F\subseteq\downarrow F_2\}$是 $LX$ 关于拓扑$O_{\Rightarrow_L}(LX)$的闭集，因为$\{\downarrow F\in LX:\downarrow F\subseteq\downarrow F_2\}\subseteq\overline{\{\downarrow F_2\}}$，所以当$\{\downarrow F\in LX:\downarrow F\subseteq\downarrow F_2\}$是 $LX$ 关于拓扑$O_{\Rightarrow_L}(LX)$的闭集时有$\{\downarrow F\in LX:\downarrow F\subseteq\downarrow F_2\}=\overline{\{\downarrow F_2\}}$，从而$\downarrow F_1\leqslant_L\downarrow F_2$.

下证$\{\downarrow F\in LX:\downarrow F\subseteq\downarrow F_2\}$是 $LX$ 关于拓扑$O_{\Rightarrow_L}(LX)$的闭集，等价于证明 $U=LX\setminus\{\downarrow F\in LX:\downarrow F\subseteq\downarrow F_2\}$是 $LX$ 中的$\Rightarrow_L$收敛开集. 设 $D\subseteq LX$ 是$\leqslant_L$- 定向集且 $D\Rightarrow_L\downarrow G\in U$. 不妨设 $G=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$. 由$\Rightarrow_L$收敛开集的定义，存在 $X$ 的定向集$D_i\subseteq\bigcup D$ 使得$D_i\to a_i$，$i=1,2,\cdots,k$. 假定 $D\cap U=\varnothing$. 则$\bigcup D\subseteq\downarrow F_2$，从而$D_i\subseteq\downarrow F_2$，$i=1,,2,\cdots,k$. 因为$\downarrow F_2$是 $X$ 的闭集，所以$D_i$的极限必然属于$\downarrow F_2$，从而 $G=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\subseteq\downarrow F_2$，即，$\downarrow G\leqslant_L\downarrow F_2$. 此与$\downarrow G\in U$ 矛盾. 因此，$U=LX\setminus\{\downarrow F\in LX:\downarrow F\subseteq\downarrow F_2\}$是 $LX$ 中的$\Rightarrow_L$收敛开集得证.

(iii) 对任意一个拓扑空间 $X$，有 $O(X)\subseteq d(X)$，于是$O_{\Rightarrow_L}(LX)\subseteq d(LX)$. 另一方面，根据$\Rightarrow_L$收敛的定义，若 $LX$ 的定向集 $D\Rightarrow_L\downarrow F$，则 $D$ 关于拓扑$O_{\Rightarrow_L}(LX)$收敛到$\downarrow F$. 因此，由定向开集的定义，若 $D\Rightarrow_L\downarrow F\in U\in d(LX)$，则必有 $U\cap D\neq\varnothing$. 这表明，$U\in O_{\Rightarrow_L}(LX)$，从而$O_{\Rightarrow_L}(LX)=d(LX)$，即，$(LX,O_{\Rightarrow_L}(LX))$是定向空间.

**命题 3.7** 设 $X,Y$ 是两个定向空间. 则映射 $f:(LX,O_{\Rightarrow_L}(LX))\to Y$ 是连续的当且仅它当对任意定向集 $D\subseteq LX$ 及$\downarrow F\in LX$，$D\Rightarrow_L\downarrow F$ 意味着 $f(D)\to f(\downarrow F)$.

**证明** 因为$\Rightarrow_L$收敛必然关于拓扑$O_{\Rightarrow_L}(LX)$收敛，所以充分性显然.

下证必要性. 先证 $f$ 是单调的. 若$\downarrow F_1,\downarrow F_2\in LX$ 且$\downarrow F_1\leqslant_L\downarrow F_2$，则$\{\downarrow F_2\}\Rightarrow_L\downarrow F_1$，从而由已知条件有$\{f(\downarrow F_2)\}\to f(\downarrow F_1)$，从而 $f(\downarrow F_2)\sqsubseteq f(\downarrow F_1)$. 设 $U$ 是 $Y$ 的开集且定向集 $D\Rightarrow_L\downarrow F$

$\in f^{-1}(U)$，则 $f(D)$ 是 $Y$ 的定向集且 $f(D)\to f(\downarrow F)\in U$，从而 $\exists\downarrow F\in D$ 使得 $f(\downarrow F)\in U$. 因此，$\downarrow F\in D\cap f^{-1}(U)$. 由 $\Rightarrow_L$ 收敛开集的定义有，$f^{-1}(U)\in O_{\Rightarrow_L}(LX)$，从而 $f$ 是连续映射.

**命题 3.8**　设 $X$ 是一个定向空间. 则 $(LX, O_{\Rightarrow_L}(LX))$ 关于集合并运算 $\cup$ 是一个定向膨胀半格.

证明　由命题 3.6，$(LX,O_{\Rightarrow_L}(LX))$ 是一个定向空间. 下证 $\cup$ 是一个膨胀运算. 任给 $\downarrow F_1, Z\downarrow F_2\in LX$，则 $\downarrow F_1\cup\downarrow F_2=\downarrow(F_1\cup F_2)\in LX$. 显然 $\cup$ 运算满足定义 3.1 中的(a)，(b)，(c)，(d)四个要求，只需证明 $\cup$ 是连续的. $\cup$ 显然是单调的. 由定理 2.5 及命题 3.7，我们只需证明：对任意定向集 $D\subseteq LX$ 及 $\downarrow F, \downarrow G\in LX$，若 $D\Rightarrow_L\downarrow F$，则 $G\cup D\Rightarrow_L(\downarrow G\cup\downarrow F)=\downarrow(G\cup F)$. 这里 $G\cup D=\{\downarrow(G\cup F'):\downarrow F'\in D\}$ 也是一个定向集. 任给 $a\in G\cup F$，若 $a\in G$，则 $\{a\}\to a$；若 $a\in F$，则由 $D\Rightarrow_L\downarrow F$ 存在 $D\subseteq\cup D$ 使得 $D\to a$. 所以由 $\Rightarrow_L$ 收敛的定义，有 $G\cup D\Rightarrow_L\downarrow(G\cup F)$.

**引理 3.9**　设 $\oplus: X\times X\to X$ 是定向空间 $X$ 上的一个二元运算. 则算子 $\oplus$ 是连续的当且仅当任给两个定向集 $D_1, D_2\subseteq X$ 及 $x_1, x_2\in X$，若 $D_i\to x_i$ $(i=1,2)$，则 $D_1\oplus D_2\to x_1\oplus x_2$. 这里，$D_1\oplus D_2=\{d_1\oplus d_2:(d_1,d_1)\in D_1\times D_2\}$.

下面的定理是本文的主要结果.

**定理 3.10**　设 $X$ 是一个定向空间，则 $(LX, O_{\underset{L}{\Rightarrow}}(LX))$ 是 $X$ 的下幂空间，即，赋予拓扑 $O_{\Rightarrow_L}(LX)$，$(LX,\cup)\cong P_L(X)$.

证明　定义映射 $i: X\to LX$ 如下：$\forall x\in X$，$i(x)=\downarrow x$. 下证映射 $i$ 连续. $i$ 显然单调. 设定向集 $D\subseteq X$ 及 $x\in X$ 满足 $D\to x$. 令 $D=\{\downarrow d: d\in D\}$，则 $D$ 是 $LX$ 的定向集并且 $D\Rightarrow_L\downarrow\downarrow x$. 注意到 $i(D)=D$，所以 $i(D)\Rightarrow_L\downarrow x=i(x)$. 由定理 2.5，映射 $i$ 是连续的.

设 $(Y,\vee)$ 是一个定向膨胀半格，$f: X\to Y$ 是一个连续映射. 定义 $\overline{f}: LX\to Y$ 如下：$\forall\downarrow F\in LX$（不妨设 $F=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$），

$$\overline{f}(\downarrow F)=f(a_1)\vee f(a_2)\vee\cdots\vee f(a_n).$$

$\overline{f}$ 显然是良定义的. 特别地，我们记 $\overline{f}(\downarrow F)=\vee f(F)$.

(i) $f=\overline{f}\circ i$. 任给 $x\in X$，$(\overline{f}\circ i)(x)=\overline{f}(i(x))=\overline{f}(\downarrow x)=f(x)$.

(ii) $\overline{f}$ 是膨胀同态，即 $\overline{f}$ 连续且对任意 $\downarrow F_1, \downarrow F_2\in LX$，$\overline{f}(\downarrow F_1\cup\downarrow F_2)=\overline{f}(\downarrow F_1)\vee\overline{f}(\downarrow F_2)$. 先证明 $\overline{f}$ 保持并运算. 设 $\downarrow F_1, \downarrow F_2\in LX$. 则 $\overline{f}(\downarrow F_1\cup\downarrow F_2)=\overline{f}(\downarrow(F_1\cup F_2))=\vee f(F_1\cup F_2)=(\vee f(F_1)\vee(\vee f(F_2))=\overline{f}(\downarrow F_1)\vee\overline{f}(\downarrow F_2)$. 接下来证明 $\overline{f}$ 是连续的. 注意到 $\vee$ 是并运算，$\overline{f}$ 显然是单调的. 设定向集 $D\subseteq LX$ 及 $\downarrow G\in LX$ 满足 $D\Rightarrow_L\downarrow G$. 令 $G=\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$. 则由 $\Rightarrow_L$ 收敛的定义，对每个 $b_i\in G$，存在定向集 $D_i\subseteq\cup D$ 使得 $D_i\to b_i$. 由映射 $f$ 的连续性，有 $f(D_i)\to f(b_i)$，$i=1,2,\cdots,k$. 由引理 3.9 及定向膨胀半格 $Y$ 的并运算 $\vee$ 的连续性，有

$$f(D_1)\vee f(D_2)\vee\cdots\vee f(D_k)\to f(b_1)\vee\cdots\vee f(b_k).\tag{1}$$

这里

$$f(D_1)\vee f(D_2)\cdots\vee f(D_k)=\{f(d_1)\vee f(d_2)\vee\cdots\vee f(d_k):(d_1,d_2,\cdots,d_k)\in\prod_{i=1}^{k}D_i\}.$$

设 $(d_1,d_2,\cdots,d_k)\in\prod_{i=1}^{k}D_i$. 对任意 $i\in\{1,2,\cdots,k\}$，存在 $\downarrow F_i\in D$ 使得 $d_i\in\downarrow F_i$. 又因为 $D$ 是定向的，故存在 $\downarrow F\in D$ 使得 $\downarrow F_i\subseteq\downarrow F$. 于是 $f(d_1)\vee\cdots\vee f(d_n)\sqsubseteq\vee f(F_1)\vee\cdots\vee f(F_k)\sqsubseteq\vee f(F)$. 这表明，

$$f(D_1)\vee\cdots\vee f(D_n)\subseteq\downarrow\{\vee f(F):\downarrow F\in D\}\tag{**}$$

设 $U\subseteq Y$ 是 $f(b_1)\vee f(b_2)\vee\cdots\vee f(b_k)$ 的开邻域. 由(*)式知，存在 $(d_1,d_2\cdots,d_k)\in\prod_{i=1}^{k}D_i$ 使得 $f(d_1)\vee f(d_2)\vee\cdots\vee f(d_k)\in U$. 因为每个开集都是上集，故由(**)式知，存在 $\downarrow F\in D$ 使得 $\vee f(F)\in U$. 这表明 $\overline{f}(D)\to\overline{f}(\downarrow G)$. 因此，由命题 2.7，映射 $\overline{f}$ 是连续的.

(iii) 映射 $\overline{f}$ 是唯一的. 假设存在膨胀同态 $g:(LX,\cup)\to(Y,\vee)$ 满足 $f=g\circ i$. 则 $g(\downarrow x)=f(x)=\overline{f}(\downarrow x)$. 任给 $\downarrow F\in LX$（不妨设 $F=(a_1,\cdots,a_n)$），则

$$\begin{aligned}g(\downarrow F)&=g(\downarrow a_1\cup\downarrow a_2\cdots\cup\downarrow a_n)=\\&g(\downarrow a_1)\vee g(\downarrow a_2)\vee\cdots\vee g(\downarrow a_n)=\\&\overline{f}(\downarrow a_1)\vee\overline{f}(\downarrow a_2)\vee\cdots\vee\overline{f}(\downarrow a_n)=\\&\overline{f}(\downarrow a_1\cup\downarrow a_2\cdots\cup\downarrow a_n)=\overline{f}(\downarrow F).\end{aligned}$$

故 $\overline{f}$ 是唯一的.

综上，由定义 3.5，赋予拓扑 $O_{\underset{L}{\Rightarrow}}(LX)$ 的膨胀

半格$(LX,\cup)$是定向空间 $X$ 的下幂空间，即$P_L(X)\cong(LX,\cup)$. 证毕.

由于下幂空间在序同构及拓扑同胚的意义下是唯一的，因此我们直接把每个定向空间 $X$ 的下幂空间记为$P_L(X)=(LX,\cup)$.

设 $X,Y$ 是两个定向空间，$f:X\to Y$ 是一个连续函数. 定义映射$P_L(f):P_L(X)\to P_L(Y)$如下：$\forall\downarrow F\in LX,P_L(f)(\downarrow F)=\downarrow f(F)$. 容易看出，$P_L(f)$是良定义的且保序. 运用上述定理的证明方法，容易验证$P_L(f)$是两个下幂空间之间的膨胀同态并. 若 $id_X$ 是恒等映射且 $g:Y\to Z$ 是 $Y$ 到定向空间 $Z$ 的连续映射，$P_L(id_X)=id_{P_L(X)}$, $P_L(g\circ f)=P_L(g)\circ P_L(f)$. 因此，$P_L:Dtop\to Disl$ 是定向空间范畴 $Dtop$ 到定向膨胀半格范畴 $Disl$ 的函子. 令 $U:Disl\to Dtop$ 表示遗忘函子. 则由定理 3.10，我们有下述结果.

**推论 3.11** 函子$P_L$是遗忘函子 $U$ 的左伴随，即，定向膨胀半格范畴 Disl 是定向空间范畴 $Dtop$ 的反射子范畴.

## 4 下幂结构间的关系

本节我们比较 dcpo 的下幂 domain、拓扑空间的观察诱导的下幂空间及定向空间的下幂空间之间的关系.

设 $X$ 的一个拓扑空间 (其拓扑记为 $O(X)$). 记 $C(X)$是由 $X$ 的所有非空闭集组成的集族. 显然，$C(X)$关于集合的有限并 $\cup$ 封闭. 任给 $U\in O(X)$，令$\langle U\rangle=\{A\in C(X):A\cap U\neq\emptyset\}$. 容易验证，$\{\langle U\rangle:U\in O(X)\}$关于有限交和任意并封闭，构成 $C(X)$的一个拓扑，该拓扑称为 $C(X)$ 的下 Vietoris 拓扑并记为$V_L(C(X))$. 同时，$C(X)$关于集合包含关系是一个 dcpo. $C(X)$上的 Scott 拓扑记为 $\sigma(C(X))$. 容易验证，下 Vietoris 拓扑$V_L(C(X))$粗于 Scott 拓扑 $\sigma(C(X))$，即，$V_L(C(X))\subseteq\sigma(C(X))$. 特别地，记$P_{OL}(X)=(C(X),\cup)$赋予下 Vietoris 拓扑$V_L(C(X))$，记 $H(X)=(C(X),\cup)$ 赋予 Scott 拓扑 $\sigma(C(X))$.

**定理 4.1**[1] 设 $P$ 是一个 dcpo 并赋予 Scott 拓扑 $\sigma(P)$. 则 $H(P)$ 同构于 $P$ 的下幂 domain (又称为 Hoare 幂 domain)，即 $H(P)$是 $P$ 的自由 dcpo 并半格.

**定理 4.2**[11] 设 $X$ 是一个拓扑空间. 则 $P_{OL}(X)$ 同构于 $X$ 的观察诱导的下幂空间 (the observationally-induced lower powerspace over $X$).

设 $P$ 是一个赋予 Scott 拓扑的 dcpo，$(P,\sigma(P))$也是一个定向空间. 由定理 3.10，作为定向空间其下幂空间$P_L(P)=(LP,\cup)$并赋予拓扑$O_{\Rightarrow_L}(LP)$. 与 $P$ 的下幂 domain 及观察诱导的下幂空间相较，二元运算都是集合的有限并 $\cup$，$LP$ 是 $C(P)$的子集，且一般情况下 $LP\neq C(P)$. 对于拓扑结构，$P_L(X)$既不一定是下幂 domain $H(P)$的子空间，也不一定是观察诱导的下幂空间$P_{OL}(X)$的子空间.

**例 4.3** 设 $P=(\mathbf{N}\times\mathbf{N})\cup\{\infty\}$，其中 $\mathbf{N}$ 是自然数集. 定义 $P$ 上的序关系如下：$\forall x,y\in P$，$x\leqslant y$ 当且仅当下列条件之一成立：

- $y=\infty$;
- $\exists n_0\in\mathbf{N},x=(m,n_0),y=(m',n_0)$ 且 $m'-m\geqslant0$.

显然，$P$ 是一个 dcpo. 容易验证，一个非空子集 $A$ 是 $P$ 的 Scott 闭集当且仅当 $A=P$ 或者存在 $P$ 中一个反链 $B$ 使得 $A=\downarrow B$. 因此，$\mathcal{V}\neq\langle V\rangle$ 对任意 $n\in\mathbf{N}$，令$D_n=\mathbf{N}\times\{n\}$，则$D_n$是一个定向集且 $\vee(\mathbf{N}\times\{n\})=\infty$. 任给 $U\subseteq P$，$U$ 是 Scott 开集当且仅当 $U=\emptyset$ 或$D\cap D_n\neq\emptyset$. 所以，$P$ 的每个非空 Scott 开集等于它的极小元集 $\min U$ 的上集. 设 $U\subseteq C(P)$，则 $U$ 是关于下 Vietoris 拓扑的开集当且仅当存在 $U\in\sigma(P)$使得 $U=\{B\in C(P):B\cap\min U\neq\emptyset\}$. 令

$$V=\{A\in C(P):\exists n\in\mathbf{N},Z(5,n)\in A\}\cup\{A\in C(P):\exists n\in\mathbf{N},Z(4,n),(4,n+1)\in A\}.$$

容易验证，$V$ 是 $C(P)$的一个 Scott 开集，且对任意 $V\in\sigma(P)$，$V\neq\langle V\rangle$. 因此 $V$ 不是下 Vietoris 拓扑的开集. 这表明，$H(P)\neq P_{OL}(P)$.

上述例子说明，赋予 Scott 拓扑的定向完备偏序集上的下幂 domain 与观察诱导的下幂空间一般来说是不相等的. 接下来考虑下幂 domain 与定向空间的下幂空间的关系.

设 $P$ 是一个 dcpo 并赋予 Scott 拓扑 $\sigma(P)$. 以

$$\sigma(C(P))|_{LP}=\{U\cap LP:U\in\sigma(C(X))\}$$

表示 $C(P)$ 的 Scott 拓扑遗传到 $LP$ 上的拓扑. 对任意 $V\in O_{\Rightarrow_L}(LP)$，记

$$\uparrow_{C(P)}V=\{A\in C(P):\exists\downarrow F\in V,Z\downarrow F\subseteq A\}.$$

**命题 4.4** 设 $P$ 是一个 dcpo 并赋予 Scott 拓扑 $\sigma(P)$. 则 $\sigma(C(X))|_{LP}\subseteq O_{\Rightarrow_L}(LP)$. 特别地，$\sigma(C(X))|_{LP}=O_{\Rightarrow_L}(LP)$当且仅当$\forall V\in O_{\Rightarrow_L}(LP)$，$\uparrow_{C(P)}V\in\sigma(C(P))$.

**证明** 设$U\in\sigma(C(X))$，定向集 $D\subseteq LX$ 满足

$D \Rightarrow_L \downarrow F \in U \cap LX$. 则对任意 $a \in F$，存在定向集 $D_a \subseteq \cup D$ 满足 $D_a \rightarrow a$. 从而，$\downarrow F \subseteq \overline{\cup D}$，其中 $\overline{\cup D}$ 表示 $\cup D$ 的 Scott 闭包. 注意到 $\overline{\cup D}$ 就是 $\cup D$ 在 $C(P)$ 中的定向上确界，因此 $D \cap U \cap LP = D \cap U \neq \emptyset$. 这表明，$U \cap LP \in O_{\Rightarrow_L}(LP)$，即，$\sigma(C(X))|_{LP} \subseteq O_{\Rightarrow_L}(LP)$.

另一方面，任给非空 Scott 闭集 $\in U$，令 $F(A)=\{\downarrow F : F \subseteq_{fin} A\}$，则 $F(A)$ 是 $LP$ 的定向集且 $A = \cup F(A)$. 从而存在 $A$ 的非空有限集 $F$ 使得 $\downarrow F \in U$. 这表明，$U = \uparrow_{C(P)}(U \cap LP)$. 因此，$\sigma(C(X))|_{LP} = O_{\Rightarrow_L}(LP)$ 当且仅当 $\forall V \in O_{\Rightarrow_L}(LP)$，$\uparrow_{C(P)} V \in \sigma(C(P))$.

设 $A$ 是 dcpo $P$ 的任意子集. 令 $A^1 = \downarrow\{x \in P : \exists$ 定向集 $D \subseteq \downarrow A, \vee D = x\}$.

**引理 4.5**[15]　设 $P$ 是一个拟连续 domain 且 $A \subseteq P$. 则 $A$ 的 Scott 闭包 $\overline{A} = A^1$.

**推论 4.6**　设 $P$ 是一个连续或拟连续 domain. 则 $\sigma(C(X))|_{LP} = O_{\Rightarrow_L}(LP)$，即 $P$ 赋予 Scott 拓扑作为定向空间，其下幂空间 $P_L(X)$ 是下幂 domain$H(P)$ 的子空间.

证明　由命题 4.4，我们只需证明：任意 $\mathcal{V} \in O_{\Rightarrow_L}(LP)$，$\uparrow_{C(P)} \mathcal{V} \in \sigma(C(P))$. 设 $D \subseteq C(P)$ 且 $\overline{\cup D} \in \uparrow_{C(P)} \mathcal{V}$. 令 $D' = \{\downarrow F : F \subseteq_{fin} \cup D\}$，则 $D'$ 是 $LP$ 的定向集且 $\cup D' = \cup D$. 从而存在 $\downarrow F \in \mathcal{V}$ 使得 $\downarrow F \subseteq \overline{\cup D'}$. 由引理 4.5，$\forall a \in F$，$\exists$ 定向集 $D_a \subseteq \cup D'$ 满足 $D_a \rightarrow a$. 从而，$D' \Rightarrow_L \downarrow F \in \mathcal{V}$. 注意到 $\mathcal{V} \in O_{\Rightarrow_L}(LP)$，所以存在 $\downarrow G \in D' \cap \mathcal{V}$. 由 $D$ 是定向的，存在 $A \in D$ 使得 $\downarrow G \in A$. 从而 $A \in \uparrow_{C(P)} \mathcal{V}$. 因此，$\uparrow_{C(P)} \mathcal{V} \in \sigma(C(P))$ 得证.

## 参考文献：


[1] Gierz G, Hofmann K H, Keimel K, *et al*. Continuous lattices and domains [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[2] Heckmann R. Power domain constructions [J]. Sci Comput Program, 1991, 17: 77.

[3] Heckmann R. An upper power domain construction in terms of strongly compact sets [C]// International Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics. Berlin: Springer, 1991.

[4] Heckmann R, Keimel K. Quasicontinuous domains and the Smyth powerdomain [J]. Electron N Theor Comput Sci, 2013, 298: 215.

[5] Mislove M W. On the Smyth power domain. [C]// International Workshop on Mathematical Foundations of Programning Semantics. Berlin: Springer, 1987.

[6] Plotkin G D. A powerdomain construction [J]. SIAM J Comput, 1976, 5: 452.

[7] Yuan Y Y, Kou H. Consistent Smyth powerdomains [J]. Topol Appl, 2014, 173: 264.

[8] Yuan Y Y, Kou H. Consistent Hoare powerdomains [J]. Topol Appl, 2014, 178: 40.

[9] Yuan Y Y, Kou H, Consistent Plotkin powerdomains [J]. Topol Appl, 2014, 178: 339.

[10] 俞月，寇辉，由 $T_0$ 空间的特殊化序定义的定向空间，四川大学学报：自然科学版，2015，52：217.

[11] Battenfeld I, Schöder M. Observationally-induced lower and upper powerspace constructions [J]. J Log Algebr Methods, 2015, 84: 668.

[12] Erné M. Infinite distributive laws versus local connectedness and compactness properties [J]. Topol Appl, 2009, 156 : 2054.

[13] Abramsky S, Jung A. Domain theory [M]. Oxford: Oxford University Press, 1994.

[14] MacLane S. Categories for the working mathematician [M]. New York: Springer-Verlag, 1971.

[15] Geng J, Kou H. Consistent Hoare powerdomains over dcpos [J]. Topol Appl, 2017, 232: 169.



**引用本文格式：**

中　文：谢晓林，寇　辉. 定向空间的下幂结构[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：211.

英　文：Xie X L, Kou H. Lower power structures of directed spaces [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 211.