doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.02.006

一类四阶常微分方程非线性边值问题正解的存在性

赵中姿，马如云
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了一类四阶常微分方程非线性边值问题 $u''''=rf(t,u(t))$，$0<t<1$，$u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0$ 正解的存在性，其中 r 是一个正参数，$\psi(s)=sc(s)$，$c\in C([0,\infty),[0,12)\cup(12,\infty))$，且当 $u\to 0^+$ 时 $f(t,u)=au+o(u)$，$\psi(s)=a_1s+o(s)$；当 $u\to\infty$ 时，$f(t,u)=bu+o(u)$，$\psi(s)=b_1s+o(s)$. 主要结果的证明基于 Dancer 全局分歧理论.

关键词：存在性；非线性边界条件；分歧方法；正解
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)02-0236-07

Existence of positive solutions for a class of fourth-order ordinary differential equations with nonlinear boundary value

ZHAO Zhong-Zi, *MA Ru-Yun*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: We study the existence of positive solutions for a class of fourth-order ordinary differential equations with nonlinear boundary value $u''''=rf(t,u(t))$, $0<t<1$, $u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0$, where r is a positive parameter, $\psi(s)=sc(s)$, $c\in C([0,\infty),[0,12)\cup(12,\infty))$. When $u\to 0^+$, $f(t,u)=au+o(u)$, $\psi(s)=a_1s+o(s)$. When $u\to\infty$, $f(t,u)=bu+o(u)$, $\psi(s)=b_1s+o(s)$. The proof of the main results is based on the Dancer global bifurcation technique.

Keywords: Existence; Nonlinear boundary condition; Bifurcation method; Positive solution
(2010 MSC 26A33)

1　引　言

本文研究四阶常微分方程非线性边值问题

$$u''''=rf(t,u(t)),\ 0<t<1,\ u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0 \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $r>0$ 是一个参数，$f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$ 且 $\psi(s)=sc(s)$.

近年来，对带各种边界条件的二阶常微分边值问题已有广泛研究[1-6]，对四阶边值问题的研究则相对较少. 四阶边值问题的实际应用背景是弹性梁的弯曲平衡. 也有学者用不同方法研究了不同边界条件下的梁方程[7-18]解的存在性. 例如，Li 等[12]研究了下列四阶边值问题

$$x''''(t)=f(t,x(t)),\ 0<t<1,$$
$$x(0)=x'(1)=x'''(1)=0,x''(0)=\int_0^1 h(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

在该文中，边界条件是非线性的，且若 $h\equiv 0$ 则模型的一个端点为简单支撑，另一个端点为滑动夹紧梁. 对于两端均为简单支撑的弹性梁的研究可参见文献[13-15]. Cabada 等[16]和 Yang 等[17]则研究了一端嵌入、另一端滑动夹紧的弹性梁. 最近，

收稿日期：2019-03-15
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：赵中姿(1994－)，女，山西太原人，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：15193193403@163.com
通讯作者：马如云. mary@nwnu.edu.cn

Bouteraa 等[18]通过锥上不动点定理，在要求 f,ψ 均非减的条件下得到了问题(1)解的存在性. 当问题(1)中 $\psi\equiv 0$ 时，边界条件变为

$$u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)=0$$

这意味着在 $t=0$ 处梁嵌入，另一端 $t=1$ 处滑动支撑. 基于以上文献，我们在下列条件下研究问题(1)正解集的全局结构：

(H1) $f:[0,1)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续且存在常数 $a,b\in(0,\infty)$ 使得 $f(t,u)=au+o(u),u\to 0^+$ 对于 $t\in[0,1]$ 一致成立，$f(t,u)=bu+o(u),u\to\infty$ 对于 $t\in[0,1]$ 一致成立；

(H2) 当 $t\in[0,1]$ 且 $u\in(0,\infty)$ 时，$f(t,u)>0$；

(H3) 存在常数 $a_0\in(0,\infty)$ 使得 $f(t,u)\geqslant a_0u,(t,u)\in[0,1]\times[0,\infty)$；

(H4) $c\in C([0,\infty),[0,12)\cup(12,\infty))$ 且存在常数 $a_1,b_1\in(0,\infty)$ 使得 $\psi(s)=a_1s+o(s),s\to 0^+,\psi(s)=b_1s+o(s),s\to\infty$.

研究正解集的全局结构要用到下列特征值问题的主特征值 $\lambda_{1,k}$：

$$u''''(t)=\lambda_k u(t),\ t\in(0,1),$$
$$u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+ku(1)=0$$

以及问题

$$u''''(t)=0,\ t\in(0,1),$$
$$u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)=0$$

的 Green 函数及其性质.

2　正映射的分歧定理

设 E 是一个实的 Banach 空间，定义范数 $\|\cdot\|$. 设 K 是 E 中的一个锥. A 是一个非线性映射，$A:[0,\infty)\times K\to E$. 若 $A([0,\infty)\times K)\subseteq K$，则称 A 是正的. 若 A 是连续的，且将 $[0,\infty)\times K$ 中的有界子集映成 E 中的前紧致子集，则称 A 是 K-全连续的.

若一个正线性算子 V 满足 $A(\lambda,u)\geqslant\lambda V(u)$，$(\lambda,u)\in[0,\infty)\times K$，则称 V 在 E 上是对于 A 的线性弱函数. 若 B 是 E 上的一个连续线性算子，定义 $r(B)$ 为 B 的谱半径. 定义本征值集合

$$c_k(B)=\{\lambda\in[0,\infty):\exists x\in K,\ \|x\|=1,\ x=\lambda Bx\}.$$

引理 2.1[7]　假设以下两条成立：

(i) K 有非空的内部且 $E=\overline{K-K}$；

(ii) $A:[0,\infty)\times K\to E$ 是 K-全连续且正的，$A(\lambda,0)=0,\lambda\in\mathbf{R}$；$A(0,u)=0,u\in K$ 且 $A(\lambda,u)=\lambda Bu+F(\lambda,u)$，其中 $B:E\to E$ 是 E 上的一个强正的线性紧算子且 $r(B)>0$，$F:[0,\infty)\times K\to E$ 满足 $\|F(\lambda,u)\|=o(\|u\|)$，$\|u\|\to 0$ 在 λ 中局部一致.

那么，存在

$$D_k(A)=\{(\lambda,u)\in[0,\infty)\times K:u=A(\lambda,u),\ u\neq 0\}\cup\{(r^{-1}(B),0)\}$$

的一个无界连通分支 C，使得 $\{(r^{-1}(B),0)\}\in C$. 进一步，若 A 有一个线性弱函数 V 且存在一个 $(\mu,y)\in(0,\infty)\times K$ 使得 $\|y\|=1,\mu Vy\geqslant y$，则 C 在 $D_k(A)\cap([0,\mu]\times K)$ 中.

3　正特征值

考虑 $Y=C[0,1]$ 在最大值范数

$$\|u\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$$

下构成一个 Banach 空间. 令 X 表示 $\{u\in C^3[0,1]\mid u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0\}$，在 $\|u\|_X:=\max_{t\in[0,1]}\{|u(t)|,\ |u'(t)|,\ |u''(t)|,\ |u'''(t)|\}$ 下构成一个 Banach 空间.

引理 3.1　若 $c\in C([0,\infty),[0,12)\cup(12,\infty))$，则问题(1)对应的齐次问题

$$u''''(t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0$$

只有平凡解.

证明　由 $u''''(t)=0,0\leqslant t\leqslant 1$ 可得 $u'''(t)=c_1t,u''(t)=c_1t+c_2,u'(t)=\frac{c_1}{2}t^2+c_2t+c_3$ 及 $u(t)=\frac{c_1}{6}t^3+\frac{c_2}{2}t^2+c_3t+c_4$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 是待定系数. 代入边界条件可得

$$\begin{cases}u(0)=c_4=0,\\ u'(0)=c_3=0,\\ u'(1)=\dfrac{c_1}{2}+c_2=0,\\ u'''(1)+\psi(u(1))=c_1+\psi(\dfrac{c_1}{6}+\dfrac{c_2}{2})=\\ \qquad c_1+(\dfrac{c_1}{6}+\dfrac{c_2}{2})\cdot c(\dfrac{c_1}{6}+\dfrac{c_2}{2})=0.\end{cases}$$

对于任意 $t\in[0,1]$，当 $c(t)\neq 12$ 时，$c_1=c_2=c_3=c_4=0$，问题(1)对应的齐次问题只有平凡解，即问题(1)是非共振的，因而可以写成等价的积分形式.

引理 3.2[18]　假设 $y\in Y$. 若 $u\in C^4[0,1]$，则边值问题

$$u''''(t)=y(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\psi(u(1))\varphi(t),$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{12}t^2(6s-3s^2-2t),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ \frac{1}{12}s^2(6t-3t^2-2s),0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

且

$$\varphi(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{6}t^3.$$

引理 3.3[18] 对于任意$(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$有

$$\frac{1}{12}t^2s^2\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{1}{4}s^2(2t-t^2),$$

$$0\leqslant\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\leqslant\frac{1}{2}(1-t)s^2,$$

$$0\leqslant\varphi(t)\leqslant\frac{1}{4}(2t-t^2),0\leqslant\varphi'(t)\leqslant\frac{1}{2}(1-t).$$

引理 3.4 若 $y\in Y,y\geqslant 0$,则边值问题

$$u''''(t)=y(t),\ 0<t<1,$$

$$u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0$$

的唯一解 $u(t)$是非负的,满足

$$\min_{1/4\leqslant t\leqslant 1}u(t)\geqslant m\|u\|,$$

其中 $m=5/42$.

证明 由引理 3.3 知 $G(t,s)\leqslant\frac{1}{4}s^2(2t-t^2):=\hat{G}(t,s)$. 首先证明

$$\frac{G(t,s)}{\hat{G}(t,s)}\geqslant\frac{5}{42},t\in[\frac{1}{4},1],s\in(0,1].$$

分以下三种情况讨论.

(i) $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$. 则

$$\frac{G(t,s)}{\hat{G}(t,s)}=\frac{\frac{1}{12}t^2(6s-3s^2-2t)}{\frac{1}{4}s^2(2t-t^2)}=\frac{1}{3}\frac{t(6s-3s^2-2t)}{s^2(2-t)}\geqslant\frac{1}{3}\frac{3t-2t^2}{2-t}\geqslant\frac{1}{3}\frac{5}{14}=\frac{5}{42}.$$

(ii) $\frac{1}{4}\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$. 则

$$\frac{G(t,s)}{\hat{G}(t,s)}=\frac{\frac{1}{12}s^2(6t-3t^2-2s)}{\frac{1}{4}s^2(2t-t^2)}=\frac{1}{3}\frac{6t-3t^2-2s}{2t-t^2}\geqslant\frac{1}{3}\frac{6t-3t^2-2t}{2t-t^2}=\frac{1}{3}\frac{4-3t}{2-t}\geqslant\frac{1}{3}\geqslant\frac{5}{42}.$$

(iii) $0<s\leqslant\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 1$. 则

$$\frac{G(t,s)}{\hat{G}(t,s)}=\frac{\frac{1}{12}s^2(6t-3t^2-2s)}{\frac{1}{4}s^2(2t-t^2)}\geqslant\frac{1}{3}\frac{6t-3t^2-\frac{1}{2}}{2t-t^2}\geqslant\frac{1}{3}\frac{13}{7}\geqslant\frac{13}{21}\geqslant\frac{5}{42}.$$

另一方面,由引理 3.3 可知

$$\varphi(t)\leqslant\frac{1}{4}(2t-t^2):=\hat{\varphi}(t).$$

则$\frac{\varphi(t)}{\hat{\varphi}(t)}\geqslant\frac{5}{42},t\in[\frac{1}{4},1]$. 从而

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 1}u(t)=\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\psi(u(1))\varphi(t)\geqslant m\int_0^1\hat{G}(t,s)y(s)\mathrm{d}s+m\psi(u(1))\hat{\varphi}(t)\geqslant m(\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\psi(u(1))\hat{\varphi}(t))\geqslant m\|u\|.$$

因而 $\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 1}u(t)\geqslant m\|u\|$.

令 $P=\{u\in X:u(t)\geqslant 0,\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 1}u(t)\geqslant m\|u\|\}$, P 是正规的且有非空内部,$X=\overline{P-P}$. 对于线性特征值问题

$$u''''(t)=\lambda_{a_1}u(t),\ 0<t<1,$$

$$u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+a_1u(1)=0,$$

定义算子 $T_{\lambda_{a_1}},T_1,T_{2_{a_1}}:P\to Y$

$$(T_1u)(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s,$$

$$(T_{2_{a_1}}u)(t)=a_1u(1)\varphi(t),$$

$$T_{\lambda_{a_1}}=\lambda_{a_1}T_1+T_{2_{a_1}}.$$

下文证明算子 $T_{\lambda_{a_1}}:P\to P$ 是全连续的且 $T_{\lambda_{a_1}}(P\backslash\{0\})\subset\mathrm{int}P$.

引理 3.5 $T_{\lambda_{a_1}}(P\backslash\{0\})\subset\mathrm{int}P$.

证明 $u\in(P\backslash\{0\})$意味着 $u>0$. 则 $a_1u(1)\geqslant 0$. 进一步,对于 $u\in(P\backslash\{0\})$有

$$(T_{\lambda_{a_1}}u)''''(t)=\lambda_{a_1}u>0,t\in[0,1],$$

$$(T_{\lambda_{a_1}}u)(0)=(T_{\lambda_{a_1}}u)'(0)=(T_{\lambda_{a_1}}u)'(1)=0,$$

$$(T_{\lambda_{a_1}}u)'''(1)+a_1u(1)=0.$$

由引理 3.3,$G(t,s)$与 $\varphi(t)$关于 t 是递增的,则 $\|T_{\lambda_{a_1}}u\|=(T_{\lambda_{a_1}}u)(1)$. 又由引理 3.3,$\hat{G}(t,s)\geqslant$

$G(t,s)$，$\hat{\varphi}(t) \geqslant \varphi(t)$对任意的 $s,t\in[0,1]$成立，则有 $\hat{G}(t,s) \geqslant G(1,s)$，$\hat{\varphi}(t) \geqslant \varphi(1)$. 令 $u\in(P\backslash\{0\})$，$t\in[\frac{1}{4},1]$. 则

$$
\begin{aligned}
(T_{\lambda_{a_1}}u)(t) &= \lambda_{a_1}\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s + \\
& a_1u(1)\varphi(t) > \lambda_{a_1} m\int_0^1 \hat{G}(t,s)u(s)\mathrm{d}s + \\
& ma_1u(1)\hat{\varphi}(t) \geqslant \lambda_{a_1} m\int_0^1 G(1,s)u(s)\mathrm{d}s + \\
& ma_1u(1)\varphi(1) \geqslant m(T_{\lambda_{a_1}}u)(1) = \\
& m\|T_{\lambda_{a_1}}u\|.
\end{aligned}
$$

因此 $T_{\lambda_{a_1}}(P\backslash\{0\})\subset \mathrm{int}P$.

引理 3.6　$T_{\lambda_{a_1}}: P\to P$ 是全连续的.

证明　对于 $t\in[0,1]$，当 $n\to\infty$时，$u_n(t)\to u(t)$于 P，则

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}|T_{\lambda_{a_1}}u_n(t) - T_{\lambda_{a_1}}u(t)| = \\
&\lim_{n\to\infty}\left|\lambda_{a_1}\int_0^1 G(t,s)u_n(s)\mathrm{d}s + a_1u_n(1)\varphi(t) - \right.\\
&\left.\lambda_{a_1}\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s - a_1u(1)\varphi(t)\right| \leqslant \\
&\lim_{n\to\infty}\lambda_{a_1}\int_0^1 G(t,s)|u_n(s)-u(s)|\mathrm{d}s + \\
&\lim_{n\to\infty}a_1\varphi(t)|u_n(1)-u(1)| = 0.
\end{aligned}
$$

这意味着当 $n\to\infty$时 $T_{\lambda_{a_1}}u_n(t)\to T_{\lambda_{a_1}}u(t)$. 由 Heine 定理，$T_{\lambda_{a_1}}$ 是连续的且在 P 中一致有界.

当 $u\in P$，$t_1,t_2\in[0,1]$时，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当$|t_2-t_1|<\delta$时(不妨令 $t_1<t_2$)有

$$
\begin{aligned}
&|T_{\lambda_{a_1}}u(t_2) - T_{\lambda_{a_1}}u(t_1)| = \\
&\left|\int_{t_1}^{t_2}G(t,s)u(s)\mathrm{d}s + \right.\\
&\left. a_1u(1)(\varphi(t_2)-\varphi(t_1))\right| \leqslant \\
&\left|\int_{t_1}^{t_2}(\frac{1}{4}s^2(2t-t^2))\|u(s)\|\mathrm{d}s + \right.\\
&\left. a_1u(1)(\frac{1}{4}(t_2^2-t_1^2)-\frac{1}{6}(t_2^3-t_1^3))\right| < \\
&\frac{1}{4}(2t-t^2)\|u\|\int_{t_1}^{t_2}|s^2|\mathrm{d}s + a_1u(1)\cdot \\
&\frac{1}{4}(t_2+t_1)(t_2-t_1) < \\
&\frac{1}{4}(2t-t^2)\|u\|\int_{t_1}^{t_2}1\mathrm{d}s + \\
&a_1u(1)\cdot\frac{1}{2}(t_2-t_1) = \\
&\frac{1}{2}(\|u\|+a_1u(1))|t_2-t_1| < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此 $T_{\lambda_{a_1}}$ 是等度连续的. 由 Arzela-Ascoli 定理可知，$T_{\lambda_{a_1}}$ 是全连续的.

由引理 3.5，引理 3.6 及 Kreun-Rutman 定理可知，$T_{\lambda_{a_1}}$ 有一个正特征值 λ_{1,a_1}，$\varphi_{1,a_1}(t)>0$ 是 λ_{1,a_1}对应的特征函数. 同理可知，线性特征值问题

$$
\begin{aligned}
&u''''(t)=\lambda_{b_1}u(t),\ 0<t<1,\\
&u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+b_1u(1)=0
\end{aligned}
$$

有一个正特征值 λ_{1,b_1}，$\varphi_{1,b_1}(t)>0$ 是 λ_{1,b_1}对应的特征函数.

4　主要结果

定理 4.1　假设(H1)～(H4)成立. 若下列条件之一成立：

(i) $\dfrac{\lambda_{1,a_1}}{a}<r<\dfrac{\lambda_{1,b_1}}{b}$；

(ii) $\dfrac{\lambda_{1,b_1}}{b}<r<\dfrac{\lambda_{1,a_1}}{a}$，

则问题(1)至少存在一个正解.

推论 4.2　假设(H1)～(H4)成立. 若下列条件之一成立：

(i) $\dfrac{\lambda_{1,a_1}}{a}<1<\dfrac{\lambda_{1,b_1}}{b}$；

(ii) $\dfrac{\lambda_{1,b_1}}{b}<1<\dfrac{\lambda_{1,a_1}}{a}$.

则四阶非线性常微分方程边值问题

$$
\begin{aligned}
&u''''=f(t,u(t)),\ 0<t<1,\\
&u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

至少存在一个正解.

注 1　当$\dfrac{\lambda_{1,a_1}}{a}=1=\dfrac{\lambda_{1,b_1}}{b}$时，问题(2)未必存在正解. 例如，考虑问题

$$
\begin{aligned}
&u''''=f(u(t)),\ 0<t<1,\\
&u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

这里

$$
f(u)=\begin{cases}\lambda_{1,a_1}u+u^2,\ u\in[0,1],\\ \text{光滑连接},\ u\in(1,2],\\ \lambda_{1,b_1}u+\sqrt{u},\ u\in(2,+\infty).\end{cases}
$$

令 $a=\lambda_{1,a_1}$，$b=\lambda_{1,b_1}$，$f(u)$满足(H1)，(H2)；$a_0\leqslant\min\{a,b\}$，f 满足(H3)；(H4)成立且$\dfrac{\lambda_{1,a_1}}{a}=1=\dfrac{\lambda_{1,b_1}}{b}$. 问题(3)没有正解.

反设 u 是问题(3)的一个正解. 若 $b<a$,在方程两端同乘以 $\varphi_{1,b_1}(t)$并在 0 到 1 上积分可得

$$\int_0^1 \varphi_{1,b_1}(t)u''''(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi_{1,b_1}(\mathrm{s})f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \int_0^1 \lambda_{1,b_1}\varphi_{1,b_1}(t)u(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \varphi_{1,b_1}(t)\rho(u)\mathrm{d}t,$$

其中

$$\rho(u)=\begin{cases} u^2, u\in[0,1], \\ \text{光滑连接}, u\in(1,2], \\ \sqrt{u}, u\in(2,+\infty). \end{cases}$$

简单计算可得

$$\varphi_{1,b_1}(1)u'''(1)-\varphi_{1,b_1}{}'''(1)u(1)+\int_0^1 \varphi_{1,b_1}{}''''(t)u(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \lambda_{1,b_1}\varphi_{1,b_1}(t)u(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \varphi_{1,b_1}(t)\rho(u)\mathrm{d}t,$$

即

$$\varphi_{1,b_1}(1)u(1)(c(\varphi_{1,b_1}(1))-c(u(1))) \geqslant \int_0^1 \varphi_{1,b_1}(t)\rho(u)\mathrm{d}t \tag{4}$$

由本文的第三节可知,$\varphi_{1,b_1}(t)>0$ 且 $\int_0^1 \rho(u)\mathrm{d}t>0$.

若 $c(\varphi_{1,b_1}(1))-c(u(1))=0$,则(4)式左端为 0. 由 $c(s)$的任意性,这种情况确实可能发生. 得到矛盾!

若 $a\leqslant b$,问题(3)中方程两端同乘以 $\varphi_{1,a_1}(t)$ 且在 0 到 1 上积分同样可以得到矛盾. 因而问题(3)不存在正解.

定义 $L:D(L)\to Y, Lu\coloneqq u''''$, $u\in D(L)$,其中

$$D(L)=\{u\in C^4[0,1]: u(0)=u'(0)=u'(1)=u'''(1)+\psi(u(1))=0\}.$$

由第三节的证明可知,$L^{-1}:Y\to X$ 是紧的.

设 $\zeta,\xi\in C([0,1]\times[0,\infty))$, $\eta_1,\eta_2\in C[0,\infty)$ 使得

$$f(t,u)=au+\zeta(t,u), f(t,u)=bu+\xi(t,u),$$
$$\psi(u)=a_1u+\eta_1(u), \psi(u)=b_1u+\eta_2(u).$$

由假设(H1)及(H4),有 $\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\zeta(t,u)}{u}=0$ 对于 $t\in[0,1]$一致成立,$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\xi(t,u)}{u}=0$ 对于 $t\in[0,1]$一致成立,且 $\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\eta_1(u)}{u}=0$, $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\eta_2(u)}{u}=0$. 令

$$\widetilde{\xi}(v)=\max\{|\xi(t,u)|:0\leqslant u\leqslant v, t\in[0,1]\},$$
$$\widetilde{\eta}_2(v)=\max\{|\eta(u)|:0\leqslant u\leqslant v\}.$$

则 $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}_2$ 是非减的,且

$$\lim_{v\to\infty}\frac{\widetilde{\xi}(v)}{v}=0, \lim_{v\to\infty}\frac{\widetilde{\eta}_2(v)}{v}=0.$$

现考虑

$$Lu=\lambda rau+\lambda r\zeta(t,u) \tag{5}$$

是从平凡解 $u\equiv 0$ 处产生的分歧问题. 由引理 3.2,问题(5)等价于

$$u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)aru(s)\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 G(t,s)r\zeta(s,u(s))ds+\psi(u(1))\varphi(t)=$$
$$\lambda\int_0^1 G(t,s)aru(s)\mathrm{d}s+a_1u(1)\varphi(t)+\lambda\int_0^1 G(t,s)r\zeta(s,u(s))\mathrm{d}s+\eta_1(u(1))\varphi(t)\coloneqq A(\lambda,u)(t).$$

定义 $B:X\to X$

$$Bu(t)\coloneqq\lambda\int_0^1 G(t,s)aru(s)\mathrm{d}s+a_1u(1)\varphi(t).$$

由引理 3.5,B 在 X 上是一个强正的线性算子. 同样,由引理 3.6 易得 $B:X\to X$ 全连续. 由文献[8,定理 3.2]可得 $r(B)=\frac{ar}{\lambda_{1,a_1}}$.

定义 $F:[0,\infty)\times X\to X$,

$$F(\lambda,u)\coloneqq\lambda\int_0^1 G(t,s)r\zeta(s,u(s))\mathrm{d}s+\eta_1(u(1))\varphi(t).$$

则对于 $\lambda\in\Lambda$(Λ 是有界的)有

$$\|F(\lambda,u)\|_X=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\Big\{\Big|\lambda\int_0^1 G(t,s)r\zeta(s,u(s))\mathrm{d}s+\eta_1(u(1))\varphi(t)\Big|,$$
$$\Big|\lambda\int_0^1 G_t(t,s)r\zeta(s,u(s))\mathrm{d}s+\eta_1(u(1))\varphi'(t)\Big|,$$
$$\Big|\lambda\int_0^1 G_{tt}(t,s)r\zeta(s,u(s))\mathrm{d}s+\eta_1(u(1))\varphi''(t)\Big|,$$
$$\Big|\lambda\int_0^1 G_{ttt}(t,s)r\zeta(s,u(s))\mathrm{d}s+\eta_1(u(1))\Big|\Big\}\leqslant$$
$$C_1\|\zeta(t,u(t))\|_X+C_2\|\eta_1(u)\|_X.$$

则

$$\lim_{\|u\|_X\to 0}\frac{\|F(\lambda,u)\|_X}{\|u\|_X}\leqslant\lim_{\|u\|_X\to 0}\Big(\frac{C_1\|\zeta(t,u)\|_X}{\|u\|_X}+\frac{C_1\|\eta_2(u)\|_X}{\|u\|_X}\Big)=0,$$

即 $\|F(\lambda,u)\|_X=o(\|u\|_X)$在 Λ 中局部一致.

由(H2)和引理 3.3 可推得若(λ,u)是问题(5)的一个非平凡解,则 $u\in\mathrm{int}P$. 结合引理 2.1,存在集合$\{(\lambda,u)\in(0,\infty)\times P: u=A(\lambda,u), u\in\mathrm{int}P\}\cup\{(\frac{\lambda_{1,a_1}}{ar},0)\}$ 的一个无界连通分支 C 使得

$\left(\frac{\lambda_{1,a_1}}{ar},0\right)\in C$.

定理 4.1 的证明　显然，当 $\lambda=1$ 时，问题(5)的任意一个解 $(1,u)$ 都是问题(1)的解 u. 下面证明 C 连接 $\left(\frac{\lambda_{1,a_1}}{ar},0\right)$ 到 $\left(\frac{\lambda_{1,b_1}}{br},\infty\right)$. 设 $(\mu_n,y_n)\in C$ 满足

$$\mu_n+\|y_n\|_X\to\infty.$$

注意，对于任意的 $n\in\mathbf{N}$，$\mu_n>0$. 这是因为，$(0,0)$ 是 $\lambda=0$ 时问题(5)的唯一解且 $C\cap(\{0\}\times X)=\varnothing$.

在(i)这种情形下，只需证明

$$\left(\frac{\lambda_{1,b_1}}{br},\frac{\lambda_{1,a_1}}{ar}\right)\subseteq\{\lambda\in\mathbf{R}\mid\exists(\lambda,u)\in C\}.$$

第一步，证明若存在一个常数 $M>0$ 使得

$$\mu_n\in(0,M] \tag{6}$$

则 C 连接 $\left(\frac{\lambda_{1,a_1}}{ar},0\right)$ 到 $\left(\frac{\lambda_{1,b_1}}{br},\infty\right)$. 由(6)式，有 $\|y_n\|_X\to\infty$. 将方程写为

$$Ly_n=\mu_n rb\,y_n+\mu_n r\xi(t,y_n(t)).$$

令 $\bar{y}_n=\frac{y_n}{\|y_n\|_X}$. 因为 $\bar{y}_n$ 在 X 中有界，则对于 $\bar{y}\in X$，有 $\bar{y}_n\to\bar{y}$ 且 $\|\bar{y}\|_X=1$. 进一步，由于 $\tilde{\xi},\tilde{\eta}_2$ 是非减的，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\xi(y_n(t))|}{\|y_n\|_X}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{|\eta_2(y_n(t))|}{\|y_n\|_X}=0.$$

因为

$$\frac{|\xi(y_n(t))|}{\|y_n\|_X}\leqslant\frac{\tilde{\xi}(|y_n(t)|)}{\|y_n\|_X}\leqslant\frac{\tilde{\xi}(\|y_n(t)\|_\infty)}{\|y_n\|_X}\leqslant\frac{\tilde{\xi}(\|y_n\|_X)}{\|y_n\|_X},$$

$$\frac{|\eta_2(y_n(t))|}{\|y_n\|_X}\leqslant\frac{\tilde{\eta}_2(|y_n(t)|)}{\|y_n\|_X}\leqslant\frac{\tilde{\eta}_2(\|y_n(t)\|_\infty)}{\|y_n\|_X}\leqslant\frac{\tilde{\eta}_2(\|y_n\|_X)}{\|y_n\|_X},$$

则

$$\bar{y}(t):=\bar{\mu}\int_0^1 G(t,x)rb\bar{y}(x)\mathrm{d}x+b_1\bar{y}(1)\varphi(t),$$

其中 $\bar{\mu}:=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n$. 因此

$$\bar{y}''''(t)=\bar{\mu}rb\,\bar{y}(t),\ 0<t<1,$$
$$\bar{y}(0)=\bar{y}'(0)=\bar{y}'(1)=\bar{y}'''(1)+b_1\bar{y}(1)=0.$$

由第三节可知 $\bar{\mu}=\frac{\lambda_{1,b_1}}{br}$. 因而 C 连接 $\left(\frac{\lambda_{1,a_1}}{ar},0\right)$ 到 $\left(\frac{\lambda_{1,b_1}}{br},\infty\right)$.

第二步，证明确实存在一个常数 M 使得对于任意的 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\mu_n\in(0,M]$. 由引理 2.1，仅需要证明 A 有一个线性弱函数 V 且存在一个 $(\mu,y)\in(0,\infty)\times P$ 使得 $\|y\|_X=1$ 且 $\mu Vy\geqslant y$. 由(H3)，存在常数 $a_0\in(0,\infty)$ 满足

$$f(t,u)\geqslant a_0u,(t,u)\in[0,1]\times[0,\infty).$$

对于 $u\in X$，令

$$Vu(t):=\int_0^1 G(t,s)ra_0u(s)\mathrm{d}s+\frac{a_0r}{\lambda_{1,a_1}}a_1u(1)\varphi(t).$$

则 V 是 A 的一个线性弱函数. 进一步，存在 $(\frac{\lambda_{1,a_1}}{a_0r},\varphi_{1,a_1}(t))\in(0,\infty)\times P$ 使得 $\|\varphi_{1,a_1}(t)\|_X=1$ 且 $\frac{\lambda_{1,a_1}}{a_0r}V\varphi_{1,a_1}=\varphi_{1,a_1}$. 事实上，

$$\frac{\lambda_{1,a_1}}{a_0r}V\varphi_{1,a_1}(t)=\frac{\lambda_{1,a_1}}{a_0r}\int_0^1 G(t,s)ra_0\varphi_{1,a_1}(s)\mathrm{d}s+a_1\varphi_{1,a_1}(1)\varphi(t)=\varphi_{1,a_1}(t)-a_1\varphi_{1,a_1}(1)\varphi(t)+a_1\varphi_{1,a_1}(1)\varphi(t)=\varphi_{1,a_1}(t).$$

由引理 2.1 有 $|\mu_n|\leqslant\frac{\lambda_{1,a_1}}{a_0r}$.

在(ii)这种情况下，若 $(\mu_n,y_n)\in C$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(\mu_n+\|y_n\|_X)=\infty,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\infty$，则

$$\left(\frac{\lambda_{1,a_1}}{ar},\frac{\lambda_{1,b_1}}{br}\right)\subseteq\{\lambda\in(0,\infty)\mid(\lambda,u)\in C\},$$

且 $(\{1\}\times E)\cap C\neq\varnothing$. 假设存在 $M>0$ 使得对所有 $n\in\mathbf{N}$，$\mu_n\in(0,M]$. 同样由情形(i)的第一步可得

$$(\mu_n,y_n)\to(\frac{\lambda_{1,b_1}}{br},\infty),n\to\infty.$$

因此 C 连接 $\left(\frac{\lambda_{1,a_1}}{ar},0\right)$ 到 $\left(\frac{\lambda_{1,b_1}}{br},\infty\right)$. 证毕.

由定理 4.1 可知，当 $r=1$ 时结果仍然成立. 推论 4.2 证毕.

参考文献：

[1] Li Y. Positive solutions for second-order boundary value problems with derivative terms [J]. Math Nachr, 2016, 289: 2058.

[2] Cabada A, Enguica R, López S L. Positive solutions for second-order boundary-value problems with sign changing Green's functions [J]. Electron J Differ Eq, 2017, 245: 1.

[3] 闫东亮，马如云. 带有导数项的 Neumann 问题正解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：1136.

[4] Ma R Y, Thompson B. Nodal solutions for nonlinear eigenvalue problems [J]. Nonlinear Anal, 2004, 59: 707.

[5] 龙严. 一类非线性二阶 Robin 问题多个正解的存在

性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：249.

[6] 叶芙梅. 一类非线性二阶常微分方程 Dirichlet 问题正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：463.

[7] Dancer E N. Global solution branches for positive mappings [J]. Arch Rat Mech Anal，1973，52：181.

[8] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces [J]. Siam Rev，1976，18：620.

[9] Benham A，Kosmatov N. Multiple positive solutions of a fourth-order boundary value problem [J]. Mediterr J Math，2017，14：1.

[10] Zhai C B，Song R P，Han Q Q. The existence and the uniqueness of symmetric positive solutions for a fourth-order boundary value problem[J]. Comput Math Appl，2011，62：2639.

[11] Bachar I，Maagli H. Existence of positive solutions for some superlinear fourth-order boundary value problems [J]. J Funct Spaces，2014，2014：1.

[12] Li H，Wang L B，Pei M H. Solvability of a fourth-order boundary value problem with integral boundary conditions [J]. J Appl Math，2013，2013：1.

[13] Ma R Y. Existence of positive solutions of a fourth-order boundary value problems [J]. Appl Math Comput，2005，168：1219.

[14] Ma R Y，Xu L. Existence of positive solutions of a nonlinear fourth-order boundary value problem [J]. Appl Math Lett，2010，23：537.

[15] Ma R Y，Xu J. Bifurcation from interval and positive solutions of a nonlinear fourth-order boundary value problem [J]. Nonlinear Anal-Theor，2010，72：113.

[16] Cabada A，Precup R，Saavedra L，*et al*. Multiple positive solutions to a fourth-order boundary-value problem[J]. Electron J Differ Eq，2016，254：1.

[17] Yang B. Positive solutions for a fourth order boundary value problem [J]. Electron J Qual Theo，2005，3：1.

[18] Bouteraa N，Benaicha S，Djourdem H，*et al*. Positive solutions of nonlinear fourth-order two-point boundary value problem with a parameter [J]. Rom J Math Comput Sci，2018，8：17.

引用本文格式：

中　文：赵中姿，马如云. 一类四阶常微分方程非线性边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：236.

英　文：Zhao Z Z，Ma R Y. Existence of positive solutions for a class of fourth-order ordinary differential equations with nonlinear boundary value [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2020，57：236.