无限维空间上的波方程和 Schrödinger 方程解的存在性和唯一性

梁冬冬
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：本文首先在无限维空间上定义了椭圆方程的弱解并得到其存在性和唯一性，然后以此为基础在一定的条件下利用半群方法得到了无限维空间上的波方程和 Schrödinger 方程解的存在性与唯一性.

关键词：无穷维空间上的偏微分方程；适定性；Guassian-Sobolev 空间；存在唯一性
中图分类号：O177.99　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.011003

Existence and uniqueness of solutions of wave equation and Schrödinger equation in infinite dimension

LIANG Dong-Dong
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we define the weak solutions of the elliptic equation in infinite dimension and obtain their existence and uniqueness. Then under suitable assumptions, the existence and uniqueness of solutions of the infinite dimensional wave equation and Schrödinger equation are obtained by the semigroup method.

Keywords: Partial differential equation in infinite-dimensional space; Well-posedness; Guassian-Sobolev space; Existence and Uniqueness
(2010 MSC 35R11, 34B15)

1 引　言

设 H 为无限维可分的复 Hilbert 空间，u 为定义在 H 上的泛函. 类似于有限维空间上的偏微分方程，我们也可以建立一个以 u 为未知函数的 H 上的偏微分方程. 我们称这样的微分方程为无限维空间上的偏微分方程. 这一类微分方程来源于量子场论、晶体的固态理论及具有无限多个自由度的系统、无限维随机控制理论等[1-8].

在有限维空间中，我们可以利用概率论的方法研究偏微分方程，推广这种方法也可以去研究无限维空间的偏微分方程. 比如：文献[2-3] 利用随机微分方程得到了无穷维空间中的线性抛物偏微分方程的解，即 Feynman-Kac 表示. 文献[4]利用正、倒向随机微分方程将线性 Feynman-Kac 公式推广到了非线性抛物方程的情形. 文献[5]推广了这种方法，并利用非耦合的正、倒向随机方程得到了无穷维空间的半线性抛物方程的初值问题的 mild 解，进而利用动态规划方法研究了对应的随机最优控制问题.

另一方面，有界开集上的无限维空间中的抛物偏微分方程的初边值问题也引起了部分学者的关

收稿日期：2019-04-12
基金项目：国家自然科学基金(11231007)
作者简介：梁冬冬(1992－)，男，陕西洋县人，硕士研究生，主要研究方向为无穷维系统分析与应用. E-mail：liang_d1221@163.com

注. 例如文献［6］利用停时对正向随机微分方程的解过程做了反射,得到了有界开集上的无穷维空间上的线性抛物偏微分方程的齐次边值问题解的存在唯一性. 然而,非齐次方程的边值问题还未解决. 当前,无限维空间中的微分方程的研究多局限在研究空间中的抛物方程. 利用这种方法获得的较好的结果见文献[7],该文解决了耦合的正倒向随机方程的适定性问题,并利用正、倒向随机微分方程的解来表示无穷维的 HJB 方程. 但是,用这种方法,解的表示公式越来越复杂,因而可以求解的偏微分方程的类型受到了极大的限制,比如本文中的无限维空间的波方程和 Schrödinger 方程就无法求解. 由于无限维椭圆方程的L^2理论不完善,本文利用 Guassian-Sobolev 空间,结合关于椭圆方程的假设条件,使用半群方法得到了无限维空间中的波方程和 Schrödinger 方程解的存在性、唯一性.

2 预备知识

设 H 上的范数为$|\cdot|$表示,$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$为 H 的一组正规正交基,内积用$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示. 考虑以下方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}[D_Q^2u(t,x)]+\\ \quad\langle Ax,Du(t,x)\rangle,t>0,x\in H,\\ u(0,x)=\psi(x),x\in H\end{cases}\tag{1}$$

其中 $Q\in L^+(H)$,$L^+(H)$表示 H 上的正对称的有界线性算子,A: $D(A)\subseteq H\to H$ 是上的C_0半$(\mathrm{e}^{tA})_{t\geqslant 0}$的无穷小生成元,且半群$(\mathrm{e}^{tA})_{t\geqslant 0}$满足:存在 $M\geqslant 0$ 和 $\omega>0$,使得$\|\mathrm{e}^{tA}\|\leqslant M\,\mathrm{e}^{-t\omega}$,$t\in[0,T]$. $\mathrm{D}\varphi(\mathrm{x})$表示函数 φ 在 x 处的 Q-导数,$D\varphi(x)$表示函数 φ 在 x 处的导数,这里的 Q-导数和导数将在下文给出定义. 令

$$Q_\infty x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{sA}Q\,\mathrm{e}^{sA^*}x\mathrm{d}s.$$

假设$Q_\infty\in L_1^+(H)$在全文中成立. 以$L_1^+(H)$表示 H 上的正对称的 Trace-class 算子的集合,以 0 为均值,Q_∞ 为协方差算子,就可以得到 H 上的一个 Gaussian 测度N_{0,Q_∞},记为 μ.

以$L^2(H,\mu)$表示 H 上在测度μ 下平方可积的函数全体,$\forall\varphi,\psi\in L^2(H,\mu)$,在$L^2(H,\mu)$中定义内积

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{L^2}=\int_H\varphi\psi\mu(\mathrm{d}x).$$

则$L^2(H,\mu)$在以上内积下成为一个 Hilbert 空间,其范数记为$\|\cdot\|_{L^2}$. 用测度μ 在$L^2(H,\mu)$上去构造 Sobolev 空间,可以使得方程(1)右端的微分算子类似于有限维空间上定义在 $H_0^1\cap H^2$上的 Laplace 算子. 方程(1)的左边对 t 求二次偏导就称为波方程.

定理 2.1[8] 对任意 $x,y\in D(A)$, Q_∞是唯一的使得下列等式成立的算子. $\forall x,y\in D(A^*)$,

$$\langle Q_\infty x,A^*y\rangle+\langle Q_\infty A^*x,y\rangle=-\langle Qx,y\rangle.$$

令$E_A(H)=\mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\langle h,x\rangle};h\in D(A^*)\}$. 由测度的 Fourier 变换可得$E_A(H)$在$L^2(H,\mu)$中稠密.

定义 2.2 任意 $k\in\mathbf{N}$,定义映射

$$D_k:E_A(H)\subset L^2(H,\mu)\to L^2(H,\mu),\varphi\to D_k\varphi,$$

$$D_k\varphi=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(x+\varepsilon e_k)-\varphi(x)].$$

以$L^2(H,\mu;H)$表示 H 上所有的 H-值的在测度μ 下平方可积的映射全体. $\forall\varphi,\psi\in L^2(H,\mu;H)$,以如下方式定义内积:

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_H\varphi(x)\psi(x)\mu(\mathrm{d}x),$$

则$L^2(H,\mu;H)$在以上内积下是一个 Hilbert 空间.

定义 2.3 以如下方式定义算子

$$D:E_A(H)\subset L^2(H,\mu)\to L^2(H,\mu;H),$$

$$\varphi\to D_k\varphi,\ D_k\varphi(x)=\sum_{k=1}^\infty D_k\varphi(x)\,e_k.$$

引理 2.4[8] 任意 $\varphi,\psi\in E_A(H)$, $\forall k\in\mathbf{N}$,有下列等式成立:

$$\int_H[D_k\varphi(x)\psi(x)+D_k\psi(x)\varphi(x)\mu(dx)]\mu(\mathrm{d}x)=\frac{1}{\lambda_k}\int_H\langle x,e_k\rangle\psi(x)\varphi(x)\mu(\mathrm{d}x),$$

其中$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$为 Q_∞的特征值.

引理 2.5[8] 任意 $k\in\mathbf{N}$,D_k和D为可闭算子.

$\forall k\in N$,分别对D_k和D取闭包,记为$\bar{D}_k$和$\bar{D}$. 仍然记为D_k,D. 用 $\mathrm{Dom}(D)$表示D的定义域,$\forall\varphi\in\mathrm{Dom}(D)$,称$D\varphi(x)$ 为 φ 在 x 处的导数.

定义 2.6 $\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Dom}(D)$,定义内积如下:

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{W^{1,2}}=\int_H\varphi\psi\mu(\mathrm{d}x)+\int_H\langle D\varphi,D\psi\rangle\mu(\mathrm{d}x),$$

则 $\mathrm{Dom}(D)$在这个内积下是一个 Hilbert 空间,称为 Sobolev 空间,记为$W^{1,2}(H)$.

以$L^2(H,\mu;L_2(H))$表示 H 上的在μ 测度下平方可积的$L_2(H)$-值映射全体,$L_2(H)$表示 H 上所有的 Hilbert-Schmidt 算子全体. $\forall\varphi,\psi\in L^2(H,\mu;L_2(H))$,在$L^2(H,\mu;L_2(H))$中以如下方式定

义内积：

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{L^2(H,\mu;L_2(H))}=\int_H\langle\varphi(x),\psi(x)\rangle_{L_2}\mu(\mathrm{d}x).$$

以 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2}$ 表示两个 Hilbert-Schmidt 算子的内积，$\|\cdot\|_{L_2}$ 表示 Hilbert-Schmidt 算子范数. 在以上内积下 $L^2(H,\mu;L_2(H))$ 为一个 Hilbert 空间.

定义 2.7　按如下方式定义映射 D^2，

$$D^2:E_A(H)\subset L^2(H,\mu)\to L^2(H,\mu;L_2(H)),$$
$$\varphi\to D^2\varphi,$$

其中 $D^2\varphi$ 为 φ 的二阶导数，作用为：$\forall\alpha,\beta\in H$，

$$\langle D^2\varphi(x)\alpha,\beta\rangle=\sum_{h,k=1}^{\infty}D_hD_k\varphi(x)\alpha_k\beta_h,$$

α_k,β_h 分别表示 α,β 在 H 的基下的坐标.

设 D^2 为可闭算子，用 $\bar{D}^2$ 表示 D^2 的闭包，仍记为 D^2. 记其定义域为 $\mathrm{Dom}(D^2)$. $\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Dom}(D^2)\cap\mathrm{Dom}(D)$，在 $\mathrm{Dom}(D^2)\cap\mathrm{Dom}(D)$ 中定义内如下：

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{W^{2,2}}=\langle\varphi,\psi\rangle_{W^{1,2}}+\langle D^2\varphi,D^2\psi\rangle_{L^2(H,\mu;L_2(H))},$$

则 $\mathrm{Dom}(D^2)\cap\mathrm{Dom}(D)$ 在这个内积下为一个 Hilbert 空间，记为 $W^{2,2}(H)$. 注意到空间 $W^{2,2}(H)$ 中的函数的二阶导数关于测度 μ 在几乎处处的意义下只是一个 Hilbert-Schmidt 算子.

定义 2.8　定义算子 D_Q 如下：

$$D_Q:E_A(H)\subset L^2(H,\mu)\to L^2(H,\mu;H),$$
$$\varphi\to D_Q\varphi,D_Q\varphi=Q^{\frac{1}{2}}D\varphi.$$

引理 2.9[8]　若 $\mathrm{Ker}Q=\{0\}$，$Q_\infty^{\frac{1}{2}}(H)\subset Q^{\frac{1}{2}}(H)$，则 D_Q 是可闭的.

假设引理 2.9 的条件在全文中成立. 对 D_Q 取闭包 $\bar{D}_Q$，仍记为 D_Q. 定义域记为 $\mathrm{Dom}(D_Q)$，$\forall\varphi\in\mathrm{Dom}(D_Q)$，称 $D_Q\varphi$ 为 φ 的 Q-导数. 在 $\mathrm{Dom}(D_Q)$ 中按如下方式定义内积：$\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Dom}(D_Q)$，

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{W_Q^{1,2}}=\langle\varphi,\psi\rangle_{L^2}+\int_H\langle D_Q\varphi,D_Q\psi\rangle\mu(\mathrm{d}x),$$

则 $\mathrm{Dom}(D_Q)$ 在以上内积下为一个 Hilbert 空间，称为 Q-Sobolev 空间，记为 $W_Q^{1,2}(H)$.

定义 2.10　按照如下方式定义算子 D_Q^2：

$$D_Q^2:E_A(H)\subset L^2(H,\mu)\to L^2(H,\mu;L_2(H)),$$
$$\varphi\to D_Q^2\varphi,$$

则 D_Q^2 是可闭算子. 对 D_Q^2 取闭包 $\bar{D}_Q^2$，仍记为 D_Q^2. 定义域仍记为 $\mathrm{Dom}(D_Q^2)$，$\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Dom}(D_Q)\cap\mathrm{Dom}(D_Q^2)$，定义内积如下：

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{W_Q^{2,2}}=\langle\varphi,\psi\rangle_{W_Q^{1,2}}+\int_H\langle D_Q^2\varphi,D_Q^2\psi\rangle_{L_2}\mu(\mathrm{d}x),$$

则 $\mathrm{Dom}(D_Q)\cap\mathrm{Dom}(D_Q^2)$ 在以上内积下为一个 Hilbert 空间，称为 Q-Sobolev 空间，记为 $W_Q^{2,2}(H)$.

注意到 $W_Q^{2,2}(H)$ 中的函数的二阶 Q-导数在几乎处处的意义下为 Hilbert-Schmidt 算子，然而(1)式的右端项要求 u 的二阶 Q-导数为 Trace-class 算子. 这是在无限维空间 H 上在 Sobolev 空间中求解无限维空间的偏微分方程的困难之处. 例如，给定函数 g，考虑如下方程，

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}[D_Q^2\varphi(x)]+\langle x,A^*D\varphi(x)\rangle=g(x),$$
$$\forall x\in H\tag{2}$$

要使方程(2)的左端有意义，未知函数 φ 应满足以下条件：$\varphi\in W_Q^{2,2}(H)\cap W^{1,2}(H)$，$D\varphi(x)\in D(A^*)$ 及 $D_Q^2\varphi(x)\in L_1(H)$，几乎处处的 $x\in H$. 这里 $L_1(H)$ 表示 H 上的 Trace-class 算子全体. 而在有限维空间上，注意到在方程(2)的左边 A 为一个矩阵，Q 为正对称的矩阵，二阶 Q-导数就是加权的二阶导数. 方程(2)就是一般定义的常系数椭圆型方程，不存在以上的限制.

假设 2.11　设算子 $A<0$，$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为三个正数列，满足条件：$Qe_k=\lambda_k$，$Q_\infty e_k=\gamma_ke_k$，$Ae_k=-\alpha_ke_k$，$k\in\mathbf{N}$，$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\alpha_k}<\infty$. 在下文中，我们假定假设 2.11 成立.

$\forall\varphi,\psi\in E_A(H)$，以如下方式定义内积：

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{W_{AQ}^{1,2}}=\langle\varphi,\psi\rangle_{W_Q^{1,2}}+\int_H\langle(-A)^{\frac{1}{2}}D_Q\varphi,(-A)^{\frac{1}{2}}D_Q\psi\rangle\mu(\mathrm{d}x).$$

记 $E_A(H)$ 在以上内积下的完备化为 $W_{AQ}^{1,2}(H)$. 这是一个 Hilbert 空间，称为 AQ-Sobolev 空间.

定义 2.12　按照如下方式定义一个算子

$$L:W_{AQ}^{1,2}(H)\cap W_Q^{2,2}(H)\subseteq L^2(H,\mu)\to L^2(H,\mu),$$
$$\varphi\to L\varphi,$$

其中 $L\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}L\varphi_n$ 在 $L^2(H,\mu)$ 中，$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq E_A(H)$ 满足 $\varphi_n\to\varphi(n\to\infty)$ 且在 $L^2(H,\mu)$ 中，$L\varphi_n=\frac{1}{2}\mathrm{tr}[D_Q^2\varphi_n(x)]+\langle x,AD\varphi_n(x)\rangle$.

引理 2.13[8]　对任意 $\varphi,\psi\in E_A(H)$，以下等式成立：

(i) $\int_H L\varphi\psi\mu(dx)=\int_H L\psi\varphi\mu(\mathrm{d}x)$.

(ii) $\int_H L\varphi\psi\mu(\mathrm{d}x)=-\frac{1}{2}\int_H\langle D_Q\varphi,D_Q\psi\rangle\mu(\mathrm{d}x)$.

$\forall\varphi\in E_A(H)$，不妨设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{\langle h,x\rangle}$，$h\in D(A)$，

$$\|D_Q^2\varphi\|_{L_2}^2=|Q^{\frac{1}{2}}h|^4\varphi^2,$$

$$L\varphi(x)=(\frac{|Q^{\frac{1}{2}}h|^2}{2}+\langle x,Ah\rangle)\varphi(x),$$

且$D_QL\varphi=L\varphi Q^{\frac{1}{2}}h+AD_Q\varphi$. 因此,

$$\int_H\langle D_QL\varphi,D_Q\varphi\rangle_{L_2}\mu(\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\int_H\|D_Q^2\varphi\|_{L_2}^2-\int_H|(-A)^{\frac{1}{2}}D_Q\varphi|^2\mu(\mathrm{d}x).$$

两次利用引理 2.13 的(ii)容易得到

$$2\int_H|L\varphi|^2\mu(\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\int_H\|D_Q^2\varphi\|_{L_2}^2+\int_H|(-A)^{\frac{1}{2}}D_Q\varphi|^2\mu(\mathrm{d}x).$$

所以定义 2.12 是合理的. 由引理 2.13 和 L 的定义知 L 是一个负定的闭算子. 因而$W_{A,Q}^{1,2}(H)\cap W_Q^{2,2}(H)$在 L 的图范数下是一个 Hilbert 空间, 记为 S,内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle_S$. $\forall\varphi,\psi\in S$,引理 2.13 成立,且$D(-L)^{\frac{1}{2}}=W_Q^{1,2}(H)$.

定义 2.14　在空间$E_A(H)$中按照如下方式定义范数. $\forall\psi\in E_A(H)$,

$$|\|\psi\||^2=\int_H\psi^2\mu(\mathrm{d}x)+\int_H|D_Q\psi|^2\mu(\mathrm{d}x)+\frac{1}{2}\int_H\|D_Q^2\psi\|_{L_1}^2\mu(\mathrm{d}x)+\int_H|AD\psi|^2\mu(\mathrm{d}x).$$

$\|\cdot\|_{L_1}$表示 Trace-class 算子的 Trace-class 范数,记 $\overline{H}$ 为$E_A(H)$按照以上范数的完备化. 则 $\overline{H}$ 为一个 Banach 空间,范数记为$\|\cdot\|_{\overline{H}}$.

命题 2.15　$\forall\varphi\in\overline{H}$. 则 $\varphi\in D(L)$且对几乎处处的 $x\in\overline{H}$, $L\varphi(x)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}[D_Q^2\varphi(x)]+\langle x,AD\varphi(x)\rangle$.

证明　$\forall\varphi\in\overline{H}$,由引理 2.1 易得

$$(-A)^{\frac{1}{2}}D_Q\varphi=(-A)^{\frac{1}{2}}(Q)^{\frac{1}{2}}D\varphi=\sqrt{2}(Q_\infty)^{\frac{1}{2}}AD\varphi,$$

因而

$$\int_H|(-A)^{\frac{1}{2}}D_Q\varphi(x)|^2\mu(\mathrm{d}x)\leqslant 2\|Q_\infty^{\frac{1}{2}}\|^2\int_H|AD\varphi(x)|^2\mu(\mathrm{d}x).$$

显然 $\int_H\|D_Q^2\varphi\|_{L_2}^2\mu(dx)<\infty$. 所以 $\varphi\in D(L)$. 因为 $E_A(H)$在$L^2(H,\mu)$中稠密,所以存在$(\varphi_n)\subseteq E_A(H)$,使得$\varphi_n\to\varphi(n\to\infty)$在$L^2(H,\mu)$中,$L\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}L\varphi_n$在$L^2(H,\mu)$中. 所以,

$$\int_H\left|L\varphi-(\frac{1}{2}tr[D_Q^2\varphi(x)]+\langle x,AD\varphi(x)\rangle)\right|\mu(\mathrm{d}x)\leqslant \|L\varphi-L\varphi_n\|_{L^2}+\frac{1}{2}\int_H\|D_Q^2\varphi_n-D_Q^2\varphi\|_{L_1}\mu(\mathrm{d}x)+\int_H|\langle x,A(D\varphi_n(x)-D\varphi(x))\rangle|\mu(\mathrm{d}x)\leqslant$$

$$\|L\varphi-L\varphi_n\|_{L^2}+\frac{1}{2}\int_H\|D_Q^2\varphi_n-D_Q^2\varphi\|_{L_1}\mu(dx)+\mathrm{tr}(Q_\infty)^{\frac{1}{2}}(\int_H|A(D\varphi_n(x)-D\varphi(x))|^2\mu(\mathrm{d}x))^{\frac{1}{2}}\leqslant \|L\varphi-L\varphi_n\|_{L^2}+C\|\varphi_n-D\varphi\|_H.$$

所以 $L\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{tr}[D_Q^2\varphi(x)]+\langle x,AD\varphi(x)\rangle$. 证毕.

3　椭圆方程弱解的存在唯一性

考虑如下方程,$\forall g\in L^2(H,\mu)$, $\forall x\in H$,

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}[D_Q^2\varphi(x)]+\langle x,AD\varphi(x)\rangle=g(x)\tag{3}$$

利用算子 L 将方程(3)形式地写成

$$L\varphi=g\tag{4}$$

注意到方程(3)和(4)本质上不是同一个方程. 算子 L 的作用方式一般不是方程(3)的左边项的形式. 然而它们的解之间确实有着很强的关系.

若$\varphi\in S$满足方程(4),在(4)式两边乘以 ψ 后在 H 上积分得

$$\int_H L\varphi\psi\mu(\mathrm{d}x)=\int_H g\psi\mu(\mathrm{d}x).$$

左边项利用引理 2.13 式(ii)知$\forall\psi\in S$,

$$-\frac{1}{2}\int_H\langle D_Q\varphi,D_Q\psi\rangle\mu(\mathrm{d}x)=\int_H g\psi\mu(\mathrm{d}x)\tag{5}$$

反之,若存在 $\varphi\in S$ 满足式(5),由引理 2.13(ii)得

$$\int_H(L\varphi-g)\psi\mu(\mathrm{d}x)=0,\forall\psi\in S.$$

由 S 在空间$L^2(H,\mu)$中的稠密性得(4).

定义 3.1　设$g\in L^2(H,\mu)$. $\varphi\in S$ 称为方程(4)的解,若任意 $\psi\in S$,φ 满足积分恒等式(5).

在无穷维空间中,椭圆方程的解很难直接得到,主要原因在于无穷维空间上椭圆的能量估计一般不成立. 而且,在何时成立着能量估计也尚不清楚. 本文在椭圆方程的解的基础之上去研究波方程和 Schrödinger 方程.

接下来,我们定义椭圆方程的另外一种较弱意义下的解,这种弱解的存在唯一性是容易得到的.

注意到在引理 2.13 的(ii)的右边项中，实际只要 $\varphi,\psi\in W_Q^{1,2}(H)$ 就有意义. 因而接下来我们定义方程(4)的另外一种较弱意义下的解.

定义 3.2　任意 $g\in L^2(H,\mu)$，称 $\varphi\in W_Q^{1,2}(H)$ 为方程(4)的弱解，若任意 $\psi\in W_Q^{1,2}(H)$，φ 满足等式(5).

定义 3.3　定义 $F:W_Q^{1,2}(H)\times W_Q^{1,2}(H)\to\mathbf{C}$ 为一个对称的双线性函数，$(\varphi,\psi)\in W_Q^{1,2}(H)$，

$$F(\varphi,\psi)=\frac{1}{2}\int_H\langle D_Q\varphi,D_Q\psi\rangle\mu(\mathrm{d}x).$$

命题 3.4　定义 3.3 中双线性函数 F 连续，且存在 $\delta\in(0,\frac{1}{2}]$，$\lambda_0\in\left[\frac{1}{2},0\right)$ 及 $C>0$，使得对任意 $\varphi,\psi\in W_Q^{1,2}(H)$ 下列估计式成立：

$$|F(\varphi,\psi)|\leqslant C\,\|\varphi\|_{W_Q^{1,2}}\|\psi\|_{W_Q^{1,2}},$$

$$F(\varphi,\varphi)=\frac{1}{2}\int_H|D_Q\varphi|^2\mu(\mathrm{d}x)\geqslant$$

$$\delta\,\|\varphi\|^2_{W_Q^{1,2}}-\lambda_0\,\|\varphi\|^2_{L^2}.$$

证明　由范数和双线性函数 F 的定义，容易得到结论.

定理 3.5　对任意 $g\in L^2(H,\mu)$，$\lambda\in C$，$\mathrm{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$，方程(4)有唯一弱解.

证明　根据命题 3.4，利用 Lax-Milgram 定理易

得定理 3.5 的结论.

当方程(4)的弱解正则性足够高时，弱解就是定义 3.1 中的解了. 然而遗憾的是，无论是(4)的解还是弱解，都不是方程，$g\in L^2(H,\mu)$，

$$\lambda\varphi-\frac{1}{2}tr[D_Q^2\varphi(x)]-\langle x,AD\,\varphi(x)\rangle=g(x)\tag{6}$$

的解，即几乎处处的 $x\in H$ 满足方程(6).

推论 3.6　若方程(4)的解或弱解 φ 属于 $\overline{H}$，则几乎处处的 $x\in H$，φ 满足方程(6).

证明　由命题 2.15 易得.

4　波方程弱解的存在唯一性

接下来，我们考虑如下形式的波方程，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}[D_Q^2u(t,x)]\\ \qquad+\langle Ax,Du(t,x)\rangle,t>0,x\in H,\\ u(0,x)=\varphi_1(x),x\in H,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(0,x)=\varphi_2,x\in H\end{cases}\tag{7}$$

应用前文所定义的算子 L，我们将方程(7)形式上写成下列方程：

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)=Lu(t),t>0,\\ u(0)=\varphi_1,\\ \dot{u}(0)=\varphi_2\end{cases}\tag{8}$$

记乘积空间 $L^2(H,\mu)\times W_Q^{1,2}(H)$ 为 M. 令

$$u=(u_1,u_2)^T,\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^T.$$

定义算子 G 如下：

$$G:S\times W_Q^{1,2}(H)\subseteq M\to M,$$

$$u\to Gu,$$

其中

$$Gu=\begin{bmatrix}0&I\\L&0\end{bmatrix}.$$

进一步，利用算子 G 将方程(8)写成下式：

$$\begin{cases}\dot{u}(t)=Gu(t),t>0,\\ u(0)=\varphi_1.\end{cases}$$

在 M 中重新定义内积如下：$\forall\,u_1,u_2\in M$，设 $u_1=(u_{11},u_{12})^T$，$u_2=(u_{21},u_{22})^T$，则

$$\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_{11},u_{21}\rangle_{L^2}+\langle u_{12},u_{22}\rangle_{L^2}+$$

$$\frac{1}{2}\int_H\langle D_Q\,u_{11}(x),D_Q\,u_{21}(x)\rangle(\mathrm{d}x).$$

M 在这个内积下的范数记为 $\|\cdot\|$. 这样定义的内积所诱导出的范数与原内积诱导的范数等价，$Dom(G)=S\times W_Q^{1,2}(H)$ 在空间 M 中稠密. 由 L 为闭算子知 G 为闭算子.

假设 4.1　令 $\lambda\in\mathbf{C}$. 方程 $\lambda\omega-L\omega=f$ 的弱解 ω 满足：

(i) $f\in L^2(H)$ 时，$\omega\in S$；

(ii) $f\in W_Q^{1,2}(H)$ 时，$\omega\in D((-L)^{1+\frac{1}{2}})$；

(i) $f\in S$ 时，$\omega\in D((L)^2)$.

注意到当 H 是一个有限维空间时，假设 4.1 就是椭圆方程弱解的正则性，成立；当算子 Q 和 A 均是有限秩算子，且二者的值域空间相同时，由偏微分方程弱解的正则性易知假设 4.1 也成立.

引理 4.2　若假设 4.1 中成立，则对任意 $F=(f_1,f_2)^T\in M$，$\lambda\in\mathbf{C}$，$\mathrm{Re}\,\lambda^2\geqslant\lambda_0$，$|\lambda|>1$，方程 $(\lambda I-G)U=F$ 有唯一解 $U\in S$，且解 U 满足估计式.

$$\|U\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-1}\|F\|.$$

证明　$\forall\,F=(f_1,f_2)^T\in M$，令 $U=(u_1,u_2)^T$. 方程 $(\lambda I-G)U=F$ 等价于

$$\begin{cases}\lambda\,u_1-u_2=f_1,\\ \lambda\,u_2-L\,u_1=f_2.\end{cases}$$

设方程 $\lambda^2I-L\,\omega_i=f_i$ 的弱解为 ω_i. 则 $\omega_i\in S$，$i=1,2$. 令 $u_1=\lambda\,\omega_1+\omega_2$，$u_2=\lambda\,\omega_2+L\,\omega_1$. 则 $U=$

$(u_1,u_2)^T$为方程$(\lambda I-G)U=F$的解. 事实上,我们有

$$\lambda u_1-u_2=\lambda^2\omega_1+\lambda\omega_2-\lambda\omega_2-L\omega_1=\lambda^2\omega_1-L\omega_1=f_1,$$
$$\lambda u_2-Lu_1=\lambda^2\omega_2+\lambda\omega_1-\lambda\omega_1-L\omega_2=\lambda^2\omega_2-L\omega_2=f_2.$$

因此,$\forall\lambda\in\mathbf{C},\mathrm{Re}\,\lambda^2\geqslant\lambda,\lambda I-G$为满射.

对任意$F=(f_1,f_2)^T\in S\times S,\lambda\in\mathbf{C},|\lambda|>1$,方程$(\lambda I-G)U=F$的解$U=(u_1,u_2)^T\in S\times S$. 为计算方便,将$L^2(H,\mu)$和$L^2(H,\mu;H)$中的内积简记为$\langle\cdot,\cdot\rangle$则

$$\begin{aligned}\|F\|^2=&\langle f_1,f_2\rangle+\frac{1}{2}\langle D_Qf_1,D_Qf_2\rangle+\langle f_2,f_2\rangle=\\&\langle f_1,f_2\rangle-\langle Lf_1,f_1\rangle+\langle f_2,f_2\rangle=\\&\langle f_1-Lf_1,f_1\rangle+\langle f_2,f_2\rangle=\\&\langle\lambda u_1-u_2-\lambda Lu_1+Lu_2,\lambda u_1-u_2\rangle+\\&\langle\lambda u_2-Lu_1,\lambda u_2-Lu_1\rangle\geqslant\\&|\lambda|^2\langle u_1,u_1\rangle-2Re\lambda\langle u_1,u_2\rangle+\\&(1+|\lambda|^2)\langle u_2,u_2\rangle-\\&|\lambda|^2\langle Lu_1,u_1\rangle+\langle Lu_1,Lu_1\rangle-\langle Lu_2,u_2\rangle\geqslant\\&|\lambda|^2\langle u_1,u_1\rangle-2|\lambda|\langle u_1,u_2\rangle+\\&(1+|\lambda|^2)\langle u_2,u_2\rangle+\frac{|\lambda|^2}{2}\langle D_Qu_1,D_Qu_1\rangle+\\&\langle Lu_1,Lu_1\rangle-\langle Lu_2,u_2\rangle\geqslant\\&(|\lambda|^2-|\lambda|)\langle u_1,u_1\rangle+\\&(1+|\lambda|^2-|\lambda|)\langle u_2,u_2\rangle+\\&\frac{(|\lambda|-1)^2}{2}\langle D_Qu_1,D_Qu_1\rangle\geqslant\\&(|\lambda|-1)^2\Big[\langle u_1,u_1\rangle+\frac{1}{2}\langle D_Qu_1,D_Qu_1\rangle+\\&\langle u_2,u_2\rangle\Big]=(|\lambda|-1)^2\|U\|^2.\end{aligned}$$

所以$\|U\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-1}\|F\|,\forall F\in S\times S$. 从而$G$为闭算子,$\lambda I-G$为满射,并且$S\times S$在$M$中稠密. 因此,

$$\|U\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-1}\|F\|,\forall F\in M.$$

定理 4.3 当假设 4.1 成立时,算子G能生成M上的一个C_0半群$\{T(t)\}_{t\geqslant0}$,满足$\|T(t)\|\leqslant\mathrm{e}^t$,$\forall t\geqslant0$.

证明 因$D(G)=S\times W_Q^{1,2}(H,\mu)$在$M$中稠密,$G$是闭算子,且$\lambda_0<1$,所以$\lambda>1$时,

$$\|R(\lambda,G)\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-1},$$

所以G能生成C_0半群$\{T(t)\}_{t\geqslant0}$. 证毕.

推论 4.4 令假设 2 成立. 则对任意$\varphi_1\in S$,$\varphi_2\in W_Q^{1,2}(H,\mu)$,存在唯一$u\in C^2([0,\infty],S)$满足方程(8).

证明 设$T(t)$是G所生成的C_0半群. 令

$$(u_1,u_2)^T=T(t)(\varphi_1,\varphi_2)^T,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1,u_2)^T=G(u_1,u_2)^T,$$

则u_1为(8)的解.

设u满足方程(8),则对任意$t>0,u(t,\cdot)\in D(L)$,$D_Q^2u(t,x)$存在但不一定是H上的迹类算子. 注意u对变量x的一阶导数不一定存在,就算$Du(t,\cdot)$存在,$Du(t,\cdot)$也不一定是属于算子A的定义域. 因此方程(8)的解一般不是方程(7)的解,即任意的$t>0$,对于x在几乎处处的意义下满足方程(7).

定理 4.5 设u满足方程(8),如果对任意$t>0,u(t,\cdot)\in\overline{H}$,则$u$关于测度在几乎处处的意义下满足方程(7).

5 Schrödinger 方程弱解的存在唯一性

考虑方程

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\mathrm{i}[\frac{1}{2}\mathrm{tr}[D_Q^2u(t,x)]+\\\quad\langle Ax,Du(t,x)\rangle],t>0,x\in H\\u(0,x)=\psi(x),x\in H.\end{cases}\tag{9}$$

利用算子L将方程(9)形式上写为下列方程:

$$\begin{cases}\dot{u}(t)=\mathrm{i}Lu(t),t>0,\\u(0)=\psi\end{cases}\tag{10}$$

定理 5.1 当假设 4.1 中的(i)成立时,iL能生成$L_2(H,\mu)$上的一个C_0半群.

证明 因$E_A(H)\subseteq\mathrm{Dom}(L)=\mathrm{Dom}(\mathrm{i}L)$,则$S$在$L_2(H,\mu)$中稠密,这里$\mathrm{Dom}(\mathrm{i}L)$表示i$L$的定义域. 由引理 2.13(ii),得$\mathrm{Re}<\mathrm{i}L\varphi(x),\varphi(x)>_{L^2}=0$. $\forall\varphi\in S$,且$\forall\lambda\in C,\mathrm{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$时,$\lambda I-L$为满射. 所以存在$\lambda_1\in\mathbf{C}$,使得$\lambda_1I-\mathrm{i}L$为满射,从而$L$是极大耗散的,算子i$L$能生成$L_2(H,\mu)$上的一个$C_0$半群.

推论 5.2 在定理 5.1 的条件下,方程(10)存在唯一解$u\in C^1([0,\infty),S)$.

定理 5.3 若方程(10)的解u满足,$u(t,\cdot)\in\overline{H},\forall t>0$,则$u$关于测度$\mu$在几乎处处的意义下满足方程(9).

参考文献:

[1] Fabbri G, Gozzi F, Święch A. Stochastic optimal

control in infinite dimension：dynamic programming and HJB equations [M]. New York：Springer Press，2017.

[2] Da Prato G，Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1992.

[3] Gawarecki L，Mandrekar V. Stochastic equations in infinite dimensions [M]. New York：Springer Press，2010.

[4] Zhang J. Backward stochastic differential equations [M]. New York：Springer Press，2017.

[5] Fuhrman M，Tessitore G. Nonlinear Kolmogorov equations in infinite dimensional space：the backward stochastic differential equations approach and applications to optimal control [J]. Ann Prob，2002，1397：30.

[6] Talarczyk A. Dirichlet problem for parabolic equations on Hilbert spaces [J]. Studia Math，2000，109：141.

[7] Guatteri G. On a class of forward-backward stochastic differential systems in infinite dimensions [J]. J Appl Math Stoch Anal，2007，1397：2007.

[8] Da Prato G，Zabczyk J. Second order partial differential equations in Hilbert spaces [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2004.

引用本文格式：

中　文：梁冬冬. 无限维空间上的波方程和 Schrödinger 方程解的存在性和唯一性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：011003.

英　文：Liang D D. Existence and uniqueness of solutions of wave equation and Schrödinger equation in infinite dimension [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2021，58：011003.