2021 年 1 月　　四川大学学报(自然科学版)　　Jan. 2021
第 58 卷　第 1 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 58　No. 1

GLS-代数的奇点范畴

姜习伟
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：设 H 是 GLS-代数，$D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)$ 是其有限维 $\mathbf{Z}$-分次 H-模的奇点范畴. 本文证明了 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)$ 存在倾斜对象，从而 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)$ 三角等价于某个代数投射模的有界同伦范畴.

关键词：GLS-代数；奇点范畴；倾斜对象
中图分类号：O154.2　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.011005

Singularity categories of GLS-algebras

JIANG Xi-Wei
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Let H be a GLS-algebra and $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)$ be the singularity category of the finite-dimensional $\mathbf{Z}$-graded H-modules. In this paper we prove that $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)$ admits a tilting object T and thus $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)\simeq K^b(\mathrm{proj}(\mathrm{End}(T)^{op}))$.

Keywords: GLS-algebra; Singularity category; Tilting object
(2010 MSC 16G20, 18E30, 18E40)

1　引　言

代数的奇点范畴的定义为有界导出范畴关于有界投射复形范畴的 Verdier 商. Orlov 将这个概念推广到代数几何和理论物理的研究中. 代数的奇点范畴反映了代数的同调性质，奇点范畴平凡当且仅当代数的整体维数是有限的. Buchweitz[1] 和 Happel[2] 证明，对于 Gorenstein 代数，奇点范畴与 Gorenstein 投射模的稳定范畴是等价的. Gorenstein 代数是代数表示论中很重要的一类代数，包含许多重要的代数，如丛倾斜代数、2-CY-倾斜代数、三角范畴中丛倾斜对象的自同态代数以及本文研究的 GLS-代数等.

对于分次代数，我们可以类似定义代数的分次奇点范畴. Keller[3] 证明：若代数的三角范畴 C 存在倾斜对象 T，则 T 的自同态代数的反代数 Λ 的有界投射复形范畴 $K^b(\mathrm{proj}\Lambda)$ 与 C 是三角等价的. 特别地，若 Λ 的投射维数有限，则 C 三角等价于 $D^b(\Lambda)$. Yamaura[4] 对正分次的自入射代数构造了 $\mathbf{Z}$-分次模范畴的稳定范畴中的倾斜对象 T，从而利用 T 的自同态代数将稳定范畴实现为导出范畴. 受 Yamaura 的工作的启发，Lu 和 Zhu[5] 证明：对正分次 1-Gorenstein 代数 A，若 A_0 的整体维数有限，则 $\mathbf{Z}$-分次奇点范畴存在 silting 对象，并证明了 Gorenstein monomial 代数的 $\mathbf{Z}$-分次奇点范畴存在倾斜对象，进而利用该倾斜对象的自同态代数刻画了该奇点范畴. 另外，Geiss，Leclerc 和 Schröer[6] 对任意可对称化广义嘉当矩阵定义了其相伴 GLS-代数和预投射代数，将 Gabriel 定理从单边根系 ADE 型推广到了非单边根系 BCFG 型，并利用卷积代数(convolution algebra)实现了可对称化 Kac-Moody 代数的泛包络代数的正部分.

本文主要研究 GLS-代数的 $\mathbf{Z}$-分次模范畴单模的右 Gorenstein 投射逼近，并利用 Yamaura 的

收稿日期：2019-05-04
作者简介：姜习伟(1994－)，男，重庆万州人，硕士研究生，主要研究方向为代数表示论. E-mail：jiangxw94@163.com

构造证明 $\mathbf{Z}$-分次奇点范畴存在倾斜对象. 设 $T := \oplus_{i\geqslant 0} A(i)_{\leqslant 0}$，其中截断函子 $(-)_{\leqslant i}: \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} H \to \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} H$ 见后文(1)式和(2)式. 本文主要结论如下：

定理 1.1　设 $H=H(C,D,\Omega)$是对应于 C, D, Ω 的 GLS-代数. 则 T 是 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} H)$ 中的倾斜对象. 特别地，有如下的三角范畴等价：

$D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} H) \simeq K^b(\mathrm{projEnd}_{D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} H)}(T)^{op})$.

2　预备知识

本文中，我们总假定 K 是代数闭域，A 均为 K 上的有限维 $\mathbf{Z}$-分次结合代数，所有模都是有限维 $\mathbf{Z}$-分次左模. 对 $\mathbf{Z}$-分次代数 A，用 $\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A$ 表示有限维 $\mathbf{Z}$-分次 A-模范畴，$\mathrm{proj}^{\mathbf{Z}} A$ 表示有限维 $\mathbf{Z}$-分次投射 A-模范畴. 对任意的 A-模 M，用 gr. inj. $\dim_A M$ 表示 M 的分次入射维数. 一个分次代数 $A=\oplus_{i\in \mathbf{Z}} A_i$ 若满足对任意的 $i<0$ 有 $A_i=0$，则称 A 为正分次代数(也称为非负分次代数).

受 Gorenstein 代数定义[2,7]的启发，我们可以按如下定义 $\mathbf{Z}$-分次 Gorenstein 代数.

定义 2.1　对任意有限维 $\mathbf{Z}$-分次代数 A，若 gr. inj. $\dim_A A<\infty$ 和 gr. inj. $\dim A_A<\infty$，则称 A 为 $\mathbf{Z}$-分次 Gorenstein 代数.

对 $\mathbf{Z}$-分次 Gorenstein 代数 A，由 Zarks 引理可知，gr. inj. $\dim_A A=$ gr. inj. $\dim A_A$. 这个公共数记为 gr. G. dimA. 若 gr. G. dimA $\leqslant d$，则称 A 为 $\mathbf{Z}$-分次 d-Gorenstein 代数. 事实上，设 $F: \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A \to \mathrm{mod} A$ 为遗忘函子，对任意 $M\in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A$，$M$ 是 $\mathbf{Z}$-分次投射模(或 $\mathbf{Z}$-分次入射模)当且仅当 $F(M)$ 是投射(或入射)A-模. 从而我们有 gr. proj. $\dim M=$ gr. proj. $\dim F(M)$ 和 gr. inj. $\dim M=$ gr. inj. $\dim F(M)$. 故 A 是 $\mathbf{Z}$-分次 d-Gorenstein 代数且仅当 A 是 d-Gorenstein 代数. 于是本文不区分这两个概念.

设 A 是 $\mathbf{Z}$-分次 Gorenstein 代数. 若有限维 $\mathbf{Z}$-分次模 M 满足 $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A}(M,A)=0$，$\forall i>0$，则称 M 为 $\mathbf{Z}$-分次 Gorenstein 投射模. 我们用 $\mathrm{Gproj}^{\mathbf{Z}}(A)$表示 $\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A$ 的所有 Gorenstein 投射模组成的满子范畴. 众所周知，$\mathrm{Gproj}^{\mathbf{Z}}(A)$ 是一个 Frobenius 正合范畴，并且其稳定范畴$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbf{Z}}(A)$是一个三角范畴，其中平移函子为分次 cosyzygy 函子 Ω^{-1}[2].

设 $X\in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A$. 若态射 $f: G\to X$ 满足 $G\in \mathrm{Gproj}^{\mathbf{Z}} A$，且对任意 $G'\in \mathrm{Gproj}^{\mathbf{Z}} A$，

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A}(G',G) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A}(G',X)$

是满射，则称 $f: G\to X$ 为 X 的一个右 Gorenstein 投射逼近. 若态射 $f: G\to M$ 满足 G 是 Gorenstein 投射模且 Kerf 的投射维数有限，则易知 f 是 M 的一个右 Gorenstein 投射逼近.

定理 2.2[8]　设 A 是 $\mathbf{Z}$-分次代数，$d\geqslant 0$. 下列条件是等价的：

(i) A 是 d-Gorenstein 代数；

(ii) $\mathrm{Gproj}^{\mathbf{Z}}(A)=\Omega^d(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A)$，

其中 Ω 为 syzygy 函子.

定义 2.3[1]　设 $D^b(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A)$是$\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A$ 的 $\mathbf{Z}$-分次有界复形的导出范畴，$K^b(\mathrm{proj}^{\mathbf{Z}} A)$是$\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A$ 的 $\mathbf{Z}$-分次有界投射复形的同伦范畴. 定义 A 的 $\mathbf{Z}$-分次奇点范畴为 Verdier 商

$D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A) := D^b(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A)/K^b(\mathrm{proj}^{\mathbf{Z}} A)$.

现在我们给出 Buchweitz-Happel 定理.

定理 2.4[1]　设 A 是 $\mathbf{Z}$-分次 Gorenstein 代数. 则存在三角等价 $\Phi: \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbf{Z}}(A) \simeq D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A)$.

对一个三角范畴 $\mathcal{T}$，若对象 $T\in \mathcal{T}$ 满足下列条件：

(i) 对任意 $i>0$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T,T[i])=0$；

(ii) $\mathcal{T}=\mathrm{thick}_{\mathcal{T}} T$，

则称 T 为 sliting 对象. 进一步，若 silting 对象 T 还满足对任意 $i<0$ 有$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T,T[i])=0$，则称 T 为倾斜对象.

定理 2.5[3]　若代数的三角 Krull-Schmidt 范畴 $\mathcal{T}$ 有一个倾斜对象 T，则存在三角等价

$\mathcal{T} \simeq K^b(\mathrm{projEnd}_{\mathcal{T}}(T)^{op})$.

定义 2.6　若矩阵 $C=(c_{ij})\in M_n(\mathbf{Z})$ 满足：

(C1) $c_{ii}=2$，$\forall i$；

(C2) $c_{ij}\leqslant 0$，$\forall i=j$；

(C3) $c_{ij}=0$ 当且仅当 $c_{ji}=0$；

(C4) 存在对角整数矩 $D=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n)$ 使得 DC 对称，其中对任意的 i 有 $c_i\geqslant 1$，

则称 C 为可对称化广义嘉当矩阵，其中(C4)中矩阵 D 为 C 的对称化子.

对任意的 $c_{ij}<0$，定义 $g_{ij} := |\gcd(c_{ij},c_{ji})|$，$f_{ij} := |c_{ij}/g_{ij}|$，$k_{ij} := \gcd(c_i,c_j)$. 我们有 $g_{ij}=g_{ji}$，$k_{ij}=k_{ji}$ 和 $c_i=k_{ij}f_{ji}$.

设 $C=(c_{ij})\in M_n(\mathbf{Z})$是可对称化广义嘉当矩阵. C 的定向 Ω 是指$\{1,2,\cdots,n\}\times\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个满足如下条件的子集：

(i) $\{(i,j),(j,i)\}\cap\Omega\neq\varnothing$当且仅当 $c_{ij}<0$；

(ii) 对任意序列$((i_1,i_2),(i_2,i_3),\cdots,(i_t,i_{t+1}))$，若满足$t\geqslant 1$和对任意$1\leqslant s\leqslant t$，有$(i_s,i_{s+1})\in\Omega$，则$i_1\neq i_{t+1}$。

给定 C 的一个定向 Ω，令 $Q:=Q(C,\Omega):=(Q_0,Q_1,s,t)$是一个箭图，其顶点集和箭头集分别为 $Q_0:=\{1,\cdots,n\}$和 $Q_1:=\{\alpha_{ij}^{(g)}:j\to i \mid (i,j)\in\Omega,1\leqslant g\leqslant g_{ij}\}\cup\{\varepsilon_i:i\to i \mid 1\leqslant i\leqslant n\}$. 令 $Q^\circ:=Q^\circ(C,\Omega)$表示 Q 删除所有回路(loop)ε_i后的箭图. 显然，由定向的定义(ii)可知，Q° 是无环箭图(acyclic quiver).

设 K 为代数闭域. 对箭图 $Q=Q(C,\Omega)$和 C 的对称化子 $D=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n)$，定义

$$H:=H(C,D,\Omega):=KQ/I,$$

其中 KQ 是Q 的路代数，I 是 KQ 的由如下关系生成的理想：

(H1) 对任意 i，有幂零关系 $\varepsilon_i^{c_i}=0$；

(H2) 对任意 $(i,j)\in\Omega$ 和任意 $1\leqslant g\leqslant g_{ij}$，有交换关系 $\varepsilon_i^{f_{ji}}\alpha_{ij}^{(g)}=\alpha_{ij}^{(g)}\varepsilon_j^{f_{ij}}$，

则称 H 为对应于 C,D,Ω 的 GLS-代数，简称为 GLS-代数[6]. 由定义，GLS-代数是有限维路代数(bounded quiver algebra).

定理 2.7[6]　沿用上述记号，$H=H(C,D,\Omega)$是 1-Gorenstein 代数.

引理 2.8　沿用上述记号，设 $c=\mathrm{lcm}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. 则 H 是正分次的 1-Gorenstein 代数，其中对任意 i,j,g，$\deg\alpha_{ij}^{(g)}:=0$ 和 $\deg\varepsilon_i=c/c_i$.

证明　令 $\deg\alpha_{ij}^{(g)}:=0$，$\deg\varepsilon_i=c/c_i$. 则我们给出了 KQ 的一个 $\mathbf{Z}$-分次. 在 H 的生成关系中，显然幂零关系是齐次的. 由

$$\deg(\varepsilon_i^{f_{ji}}\alpha_{ij}^{(g)})=cf_{ji}/c_i=cf_{ji}/(k_{ij}f_{ji})=c/k_{ij}$$

和

$$\deg(\alpha_{ij}^{(g)}\varepsilon_i^{f_{ij}})=cf_{ij}/c_j=cf_{ij}/(k_{ji}f_{ij})=c/k_{ji}=c/k_{ij}$$

可知，交换关系也是齐次的. 从而 H 也是 $\mathbf{Z}$-分次的. 显然，$H=H_{\geqslant 0}$，从而 H 是正分次代数. 故 H 是正分次的 1-Gorenstein 代数. 证毕.

值得注意的是，这里给出的 H 的 $\mathbf{Z}$-分次不同于文献[6]中给出的 $\mathbf{Z}$-分次.

3　主要结果的证明

为证明定理 1.1，我们对每个单模构造其右 Gorenstein 投射逼近. 对任意 $i\in Q_0$，约定 $\varepsilon_i^0=e_i$ 和 $\Omega(-,i):=\{j\in Q_0\mid(j,i)\in\Omega\}$. 由投射模结构定理[9]可知，作为 K 向量空间，$P_i:=He_i(0)$ 有如下直和分解

$$P_i=e_iHe_i\oplus\bigoplus_{\substack{j\in\Omega(-,i),1\leqslant g\leqslant g_{ij},\\ 0\leqslant k\leqslant f_{ji}-1}}H\alpha_{ji}^{(g)}\varepsilon_i^k=\bigoplus_{0\leqslant k\leqslant c_i-1}K\{\varepsilon_i^k\}\oplus\bigoplus_{\substack{j\in\Omega(-,i),1\leqslant g\leqslant g_{ij},\\ 0\leqslant k\leqslant f_{ji}-1}}H\alpha_{ji}^{(g)}\varepsilon_i^k.$$

设

$$G_i:=K\{\varepsilon_i^{c_i-1}\}\oplus\bigoplus_{j\in\Omega(-,i),1\leqslant g\leqslant g_{ij}}H\alpha_{ji}^{(g)}\varepsilon_i^{f_{ji}-1}.$$

则 G_i是 P_i的 $\mathbf{Z}$-分次子空间. 由生成关系(H1)和(H2)可知，

$$H\varepsilon_i^{c_i-1}\subseteq\bigoplus_{j\in\Omega(-,i),1\leqslant g\leqslant g_{ij}}H\alpha_{ji}^{(g)}\varepsilon_i^{f_{ji}-1}.$$

又易知 $\bigoplus_{j\in\Omega(-,i),1\leqslant g\leqslant g_{ij}}H\alpha_{ji}^{(g)}\varepsilon_i^{f_{ji}-1}$ 是 P_i的子模，从而在 H 的作用下封闭. 故 G_i在 H 作用下封闭，即 G_i是 P_i的 $\mathbf{Z}$-分次子模.

引理 3.1　沿用上述记号，对任意 $i\in Q_0$，存在如下正合列

$$0\to\bigoplus_{j\in\Omega(-,i)}(P_j(k_j))^{g_{ij}}\to G_i(l)\xrightarrow{f}S_i(0)\to 0,$$

其中 $k_j=(f_{ij}-1)c/c_i$，$l=(c_i-1)c/c_i$. 特别地，f 是 $S_i(0)$ 的一个右 Gorenstein 投射逼近并且 $\mathrm{top}G_i(l)=(\mathrm{top}G_i(l))_{\leqslant 0}$.

证明　首先，由定理 2.2 我们有$\mathrm{Gproj}^{\mathbf{Z}}(H)=\Omega^1(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)$. 由 G_i是投射模 P_i的子模，则 G_i是 $\mathbf{Z}$-分次 Gorenstein 投射模.

其次，由 H 的投射模的构造[6]可知，对任意 $j\in\Omega(-,i)$，$1\leqslant g\leqslant g_{ij}$ 和 $0\leqslant k\leqslant f_{ji}-1$，有 $H\alpha_{ji}^{(g)}\varepsilon_i^k(kc/c_i)\cong He_j(0)$. 由 G_i的构造可知

$$G_i(0)/(\bigoplus_{j\in\Omega(-,i),1\leqslant g\leqslant g_{ij}}H\alpha_{ji}^{(g)}\varepsilon_i^{f_{ji}-1}(0))\cong S_i(-l).$$

从而我们得到了引理中的正合列. 由短正合列我们有 f 是 $S_i(0)$ 的一个右 Gorenstein 投射逼近并且得到如下正合列

$$\mathrm{top}(\bigoplus_{j\in\Omega(-,i)}(P_j(k_j))^{g_{ij}})\to\mathrm{top}G_i(l)\to\mathrm{top}S_i(0)\to 0.$$

由于 $\deg(\mathrm{top}(P_j(k_j)))=-k_j$，$\deg(\mathrm{top}(S_i(0))=0$，故 $\mathrm{top}G_i(l)=(\mathrm{top}G_i(l))_{\leqslant 0}$. 证毕.

引理 3.2　设 A 是 $\mathbf{Z}$-分次 d-Gorenstein 代数，$0\to L\to M\to N\to 0$ 为正合列. 给定 L 和 N 的右 Gorenstein 投射逼近 $G_L\xrightarrow{f_L}L$ 和 $G_N\xrightarrow{f_N}N$ 满足 gr. proj. $\dim\mathrm{Ker}f_L\leqslant d-1$ 及 gr. proj. $\dim\mathrm{Ker}f_N\leqslant d-1$. 则存在如下交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G_L \arrow[r] \arrow[d, "f_L"] & G_M \arrow[r] \arrow[d, "f_M"] & G_N \arrow[r] \arrow[d, "f_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

满足第一行是正合列，其中 f_M是 M 的一个右

Gorenstein 投射逼近且 gr. proj. dimKer $f_M \leqslant d-1$.

证明　考虑如下交换图,其中右边方块是拉回:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & G_N \arrow[r] \arrow[d, "f_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

则第一行是正合列. 将 $\mathrm{Hom}_A(G_N,-)$ 函子作用到正合列 $0 \to \mathrm{Ker} f_L \to G_L \xrightarrow{f_L} L \to 0$ 上可得到下列长正合列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_A^1(G_N, \mathrm{Ker} f_L) \to \mathrm{Ext}_A^1(G_N, G_L) \to \mathrm{Ext}_A^1(G_N, L) \to \mathrm{Ext}_A^2(G_N, \mathrm{Ker f}_L) \to \cdots.$$

由于$\mathrm{Ext}_A^1(G_N, \mathrm{Ker f}_L) = \mathrm{Ext}_A^2(G_N, Ker f_L) = 0$,我们有 $\mathrm{Ext}_A^1(G_N, G_L) \cong \mathrm{Ext}_A^1(G_N, L)$. 从而存在如下交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G_L \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "h"] & G_N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & X \arrow[r] & G_N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

使得第一行是正合的. 考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker} f_L \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\, gh \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker} f_N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G_L \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "gh"] & G_N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd},$$

其中每行每列都是正合的. 由 gr. proj. dimKer $f_L \leqslant d-1$ 和 gr. proj. dimKer $f_N \leqslant d-1$,我们有 gr. proj. dimKerg $h \leqslant d-1$. 由于 G_L 和 G_N 都是 Gorenstein 投射的,则 Y 也是 Gorenstein 投射的. 令 Y 为 G_M 和 $f_M = gh$. 结论成立. 证毕.

下面定义截断函子 $(-)_{\geqslant i}: \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A \to \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A$ 和 $(-)_{\leqslant i}: \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A \to \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A$. 对 $\mathbf{Z}$-分次 A-模 X, 定义 X 的 $\mathbf{Z}$-分次子模 $X_{\geqslant i}$:

$$(X_{\geqslant i})_j := \begin{cases} 0, & j < i \\ X_j, & j \geqslant i \end{cases} \tag{1}$$

令

$$X_{\leqslant i} := X / X_{\geqslant i+1} \tag{2}$$

为 X 的 $\mathbf{Z}$-分次商模.

为了证明定理 1.1,我们还需要下述引理.

引理 3.3[5]　设 A 为正分次 1-Gorenstein 代数. 若 gl. dim $A_0 < \infty$, 则 $T = \oplus_{i \geqslant 0} A(i)_{\leqslant 0}$ 是 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} A)$ 中的 silting 对象.

定理 1.1 的证明　令 $T := \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} H(i)_{\leqslant 0}$. 我们证明 T 是 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} H)$ 中的倾斜对象. 由于 H 是有限维代数,则存在充分大的 i,使得 $H(i)_{\leqslant 0} = H(i)$ 是投射的. 从而在 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} H)$中,$H(i)_{\leqslant 0} = H(i)$. 故我们可以视 T 为 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}} H)$ 中的对象. 由于 Q_0 是无环的,则 $H_0 = KQ^{\circ}$ 是遗传代数. 由引理 2.8 和引理 3.3,我们只需证明对任意 $i > 0$, $\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}(H))}(T[i], T) = 0$.

取 $H(i)_{\leqslant 0}$的极小投射预解

$$\cdots \to P^2 \to P^1 \to H(i) \to H(i)_{\leqslant 0} \to 0.$$

由于 H 是正分次代数, 对任意 $i > 0$,我们有 $(P^i)_{\leqslant 0} = 0$,从而$(\Omega^i T)_{\leqslant 0} = 0$. 由于 $T = T_{\leqslant 0}$, 对任意 $i > 0$,我们有$\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}(H)}(T, \Omega^i T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}(H)}(\Omega^i T, T) = 0$. 用 $\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$ 表示 $\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}(H)$ 的由所有满足 $M = M_{\leqslant 0}$的 $\mathbf{Z}$-分次模 M 组成的满子范畴. 我们断言:对任意 $M \in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$,存在 M 的右 Gorenstein 投射逼近 $G_M \xrightarrow{f_M} M$ 使得 $\mathrm{top} G_M \in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$ 且 $\mathrm{Ker} f_M$是投射的. 下面我们对 M 的长度 $l(M)$ 做归纳.

当 $l(M) = 1$ 时,存在 $i \in Q_0$ 和 $j \geqslant 0$ 使得 $M \cong S_i(j)$. 由引理 3.1,存在 $S_i(j)$的右 Gorenstein 投射逼近 $G_i(j) \xrightarrow{f_{S_i(j)}} S_i(j)$ 使得 $\mathrm{top} G_i(j) \in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$ 并且 $\mathrm{Ker} f_{S_i(j)}$是投射的.

当 $l(M) \geqslant 2$ 时,存在正合列 $0 \to N \to M \to S \to 0$ 使得 $l(N) = l(M) - 1$, $l(S) = 1$. 易知 $N \in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$, $S \in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$. 由归纳假设, 存在右 Gorenstein 投射逼近 $G_N \xrightarrow{f_N} N$ 和 $G_S \xrightarrow{f_S} S$ 使得 $\mathrm{top} G_N \in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$ 和 $\mathrm{top} G_S \in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$, 且 $\mathrm{Ker} f_N$ 和 $\mathrm{Ker} f_S$是投射的. 由引理 3.2,存在如下交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G_N \arrow[r] \arrow[d, "f_N"] & G_M \arrow[r] \arrow[d, "f_M"] & G_S \arrow[r] \arrow[d, "f_S"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

使得每一行是正合的,其中 $G_M \xrightarrow{f_M} M$ 是 M 的右 Gorenstein 投射逼近并且 $\mathrm{Ker} f_M$是投射的. 又由 $\mathrm{top}\ G_N \in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$ 和 $\mathrm{top}\ G_S \in \mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$, 则有

$\mathrm{top}G_M\in\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$. 断言得证.

因为 $T=T_{\leqslant 0}$，由上述断言可知，存在 T 的右 Gorenstein 投射逼近 $G_T\xrightarrow{f_T}T$ 使得 $\mathrm{top}G_T\in\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$ 和 $\mathrm{Ker}f_T$是投射的. 因此，对任意 $i>0$，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}(H))}(T[i],T)=\\&\quad\mathrm{Hom}_{D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}(H))}(G_T[i],G_T)=\\&\quad\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbf{Z}}(H)}(G_T\langle i\rangle,G_T)=\\&\quad\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbf{Z}}(H)}(G_T,\Omega^iG_T).\end{aligned}$$

我们断言：对任意 $i>0$，$\Omega^iG_T\cong\Omega^iT$. 事实上，我们只需要证明 $\Omega G_T\cong\Omega T$. 由于 $\mathrm{Ker}f_T$是投射模，则有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}f_T \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}f_T \arrow[r] \arrow[d] & 0\\
0 \arrow[r] & \Omega G_T \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & G_T \arrow[r] \arrow[d] & 0\\
0 \arrow[r] & \Omega T \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{i\geqslant 0}H(i) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0\\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

使得每行和每列都是正合的，其中 X 为 $\mathrm{Ker}f_T\oplus(\oplus_{i\geqslant 0}H(i))$. 特别地，$\Omega G_T\cong\Omega T$. 我们证明了断言.

对任意 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}(H)}(G_T,\Omega^iT)$，由于 $\mathrm{Im}f$ 是 Ω^iT 的 $\mathbf{Z}$-分次子模且$(\Omega^iT)_{\leqslant 0}=0$，则 $(\mathrm{Im}f)_{\leqslant 0}=0$，从而$(\mathrm{top}(\mathrm{Im}f))_{\leqslant 0}=0$. 考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
G_T \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{Im}f \arrow[d, "g"]\\
\mathrm{top}\,G_T \arrow[r, "h"] & \mathrm{top}(\mathrm{Im}f).
\end{tikzcd}$$

由 $\mathrm{top}G_T\in\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}_{\leqslant 0}(H)$和 $\mathrm{top}\,(\mathrm{Im}f)_{\leqslant 0}=0$ 可知 $h=0$，从而 $gf=0$. 又 g 是满的，故 $f=0$. 由 f 的任意性可知 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}(H)}(G_T,\Omega^iT)=0$，从而 $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbf{Z}}(H)}(G_T,\Omega^iT)=0$. 因此，对任意 $i>0$，有

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{Hom}}_{D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}(H))}(T[i],T)=\\&\quad\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbf{Z}}(H)}(G_T,\Omega^iG_T)=\\&\quad\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbf{Z}}(H)}(G_T,\Omega^iT)=\\&\quad\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbf{Z}}(H)}(G_T,\Omega^iT)=0.\end{aligned}$$

所以 T 是 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)$ 的倾斜对象.

最后，由定理 2.4 可知，$D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)\simeq\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbf{Z}}(H)$. 则 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)$ 是代数的三角 Krull-Schmidt 范畴. 故由定理 2.5 立即得到 $D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)\simeq K^b(\mathrm{projEnd}_{D_{sg}(\mathrm{mod}^{\mathbf{Z}}H)}(T)^{op})$. 证毕.

参考文献：

[1] Buchweitz R. Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate cohomology over Gorenstein rings [EB/OL]. [2019-04-29]. http://hdl.handle.net/1807/16682, 1987.

[2] Happel D. Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras [M]. London: Cambridge University Press, 1988.

[3] Keller B. Deriving DG categories [J]. Ann Sci Ecole Norm S, 1994, 27: 63.

[4] Yamaura K. Realizing stable categories as derived categories [J]. Adv Math, 2013, 248: 784.

[5] Lu M, Zhu B. Singularity categories of Gorenstein monomial algebras [EB/OL]. arXiv:1708.00311.

[6] Geiss C, Leclerc B, Schröer J. Quivers with relations for symmetrizable Cartan matrices I: foundations [J]. Invent Math, 2017, 209: 61.

[7] Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories [J]. Adv Math, 1991, 86: 111.

[8] Avramov L L, Martsinkovsky A. Absolute, relative and Tate cohomology of modules of finite Gorenstein dimensions [J]. Proc London Math, 2002, 85: 393.

[9] Assem I, Simson D, Skowroński A. Elements of representation theory of associative algebras, volume 1: techniques of representation theory [M]. London: Cambridge University Press, 2006.

引用本文格式：

中　文：姜习伟. GLS-代数的奇点范畴[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：011005.

英　文：Jiang X W. Singularity categories of GLS-algebras [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 011005.