doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2020.06.006

算术平均半亚式期权的快速定价算法

陈　聪，唐亚勇
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：算术平均半亚式期权是一种推广的亚式期权，尚无解析定价公式. 因此，在实际应用中人们大多采用蒙特卡洛法等数值算法对其定价，虽定价精度较高，但计算时间长. 本文结合改进的蒙特卡洛法和矩近似解析法得到了算术平均半亚式期权定价的近似半解析法. 该算法在确保精度的前提下大幅减少了计算时间. 然后，本文利用对偶变量技术改进该算法进一步减少了计算时间.

关键词：期权定价；蒙特卡洛法；矩近似解析法；对偶变量技术
中图分类号：O29　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)06-1061-06

A fast pricing algorithm for the arithmetic average half-Asian option

CHEN Cong, *TANG Ya-Yong*
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: The arithmetic average half-Asian option is a generalized Asian option, without analytic pricing formula. The Monte Carlo method are mostly used in option pricing. Despite of the high pricing accuracy, the calculation time of the method is rather long. In this paper, a fast pricing algorithm named semi-analytic method for the arithmetic average half-Asian option is proposed by combining the Monte Carlo method and moment approximation method. This method greatly reduces the computation time under the ensuring accuracy. Then the semi-analytic method is improved by using the antithetic variable technique in order to further reduce the computation time.

Keywords: Option pricing; Monte Carlo method; Moment approximation method; Antithetic variable technique

1　引　言

期权是一种选择权，即投资者在支付一定的权利金后拥有在预定日期(到期日)以合约中规定的价格(敲定价)买卖相应数量资产的权利. 按照权利的差异，期权可以分为看涨期权与看跌期权；按照行权方式的不同，则可以分为欧式期权、美式期权与亚式期权.

在欧式期权中，投资者可以在到期日按照敲定价进行交易. Black 和 Scholes 于 1973 年首次提出了欧式期权定价公式[1]. 以看涨期权为例，其定价公式为：

$$C(S,K,T,\sigma,r)=SN(d_1)-e^{-rT}KN(d_2) \tag{1}$$

其中，C 为看涨期权价格，S 为行情价(标的在合约签订当日的开盘价或收盘价)，K 为敲定价，T 为有效期，σ 为波动率，r 为无风险利率，

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}.$$

收稿日期：2019-10-16
作者简介：陈聪(1994－)，男，浙江台州人，硕士研究生，主要研究方向为金融数学. E-mail：congchopper@foxmail.com
通讯作者：唐亚勇. E-mail：yayongtang@scu.edu.cn

在亚式期权中,投资者可以在到期日按照敲定价进行交易,但行情价不是标的在合约签订当日的市场价格,而是 $\frac{1}{T}\int_0^T S(t)\mathrm{d}t$ 或 $\mathrm{e}^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S(t))\mathrm{d}t}$ ($S(t)$为标的在时刻 t 的价格),具有路径依赖性.前者称为算术平均亚式期权,后者称为几何平均亚式期权.同欧式期权一样,几何平均亚式期权行情价的时间序列(以下简称行情价序列)服从对数正态分布,因而可以利用推导欧式期权定价的 BS 公式的方法得到解.算术平均亚式期权的行情价序列不服从对数正态分布,无法类似地得到解析解[2-4].与欧式期权相比,亚式期权的期权费更低,在金融衍生品市场中被广泛使用.

半亚式期权是一种推广的亚式期权,指投资者可以提前规定好采价期$[T',T]$,在到期日 T 按照敲定价进行交易,但行情价不是标的在合约签订当日的市场价格,而是 $\frac{1}{T-T'}\int_{T'}^T S(t)\mathrm{d}t$ 或者 $\mathrm{e}^{\frac{1}{T-T'}\int_{T'}^T \ln(S(t))\mathrm{d}t}$,也具有路径依赖性.不同于亚式期权的采价期即为合同期,半亚式期权的采价期可以小于合同期.半亚式期权虽然比亚式期权的费率高(仍低于欧式期权),但预期收益也更高.在场外期权市场(在非集中性的交易场所进行的非标准化期权交易市场),特别是在以玉米、豆粕等农产品为标的的期权交易中,半亚式期权极受欢迎.

在实际应用中,对亚式期权及半亚式期权定价的研究主要有两个方面.其一是利用以蒙特卡洛方法为基础的模拟算法进行定价,再通过控制变量技术、并行计算等方法对模型进行改进.该方法虽然得到的近似定价精度较高,但其计算时间较长[5-7].其二是对期权所满足的偏微分方程求数值解,得到期权的近似定价.该类方法的计算时间较少,但部分 PDE 方法得到的近似的定价精度无法保证[8-10].

本文针对半亚式期权的特点,对期权的波动期和采价期分别采用改进的蒙特卡洛法和矩近似解析法,结合模拟算法与 PDE 方法,得到了算术平均半亚式期权定价的近似半解析法.在保证精度的前提下,本文将定价的计算时间减少为蒙特卡洛法的7%.然后,本文利用对偶变量技术改进该方法进一步减少了计算时间.

2 改进的蒙特卡洛方法

假设行情价 $S(t)$符合初值为 $S(0)$的几何布朗运动,其中

$$S(t)=S(0)\mathrm{e}^{X(t)},$$

$$X(t)\sim N\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t,\sigma^2 t\right].$$

对于离散的价格$\{S(n)\}$,存在以下递推关系,

$$S(n)=S(n-1)\mathrm{e}^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\xi_n} \tag{2}$$

其中,Δt 为 n 时刻与 $n-1$ 时刻的时间差,$\{\xi_n\}$是一组相互独立且服从标准正态分布的随机变量.根据上述递推关系可以得到如下欧式期权定价的蒙特卡洛算法.

算法 2.1

Step 1:输入 S、K、T、σ、r、m,其中 m 为模拟次数;

Step 2:生成 m 个服从标准正态分布的 T 维列向量 a_i,以a_i为列构成矩阵$A_{m\times T}$,令 $i=1$;

Step 3:从 $S(0)=S$ 出发,按照公式

$$S(j)_i=S(j-1)_i\mathrm{e}^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}A[i,j]}$$

生成序列$\{S(j)_i\}$,其中 $1\leqslant j\leqslant T$,$\Delta t=1/252$(设一年有252个交易日),$A[i,j]$代表矩阵 A 第 i 行、第 j 列的元素;

Step 4:取序列$\{S(j)_i\}$的最后一个数$S(T)_i$,计算$C_i=\max\{S(T)_i-K,0\}$,完成一次模拟,$i=i+1$;

Step 5:当 $i\leqslant m$ 时,返回 Step 3;

Step 6:计算 $C_{EMC}=\frac{\sum C_i}{m}\mathrm{e}^{-rT}$.

在欧式期权定价中,我们只需要 T 时刻的价格 $S(T)$,因而蒙特卡洛法模拟的每条价格路径的前$(T-1)$个价格都是未利用的.为减少蒙特卡洛法定价的计算时间,我们考虑直接在每次路径模拟时生成价格 $S(T)$.

由式(2)可以得出

$$S(T)=S(T-1)\mathrm{e}^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\xi_{T/\Delta t}}$$

$$\cdots,$$

$$S(1)=S(0)\mathrm{e}^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\xi_1}.$$

由上式可得

$$S(T)=S(0)\mathrm{e}^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t T/\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\sum\xi_n} \tag{3}$$

由于$\{\xi_n\}$是独立同分布标准正态分布的随机变量,我们有

$$\sum\xi_n\sim N\left[0,\frac{T}{\Delta t}\right],$$

即

$$\xi \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum \xi_n}{\sqrt{T/\Delta t}} \sim N[0,1].$$

代入式(3)可以得

$$S(T)=S(0)\mathrm{e}^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\xi} \tag{4}$$

根据式(4)可以直接由 $S(0)$ 生成 $S(T)$，进而得到如下欧式期权定价的改进蒙特卡洛算法.

算法 2.2

Step 1：输入 S、K、T、σ、r、m；

Step 2：生成 1 个服从标准正态分布的 T 维列向量 a，将 a 记为矩阵$A_{m\times 1}$，令 $i=1$；

Step 3：从 $S(0)=S$ 出发，按照公式

$$S(T)_i=S(0)\mathrm{e}^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}A[i,1]}$$

生成$S(T)_i$；

Step 4：计算$C_i=\max\{S(T)_i-K,0\}$，完成一次模拟，$i=i+1$；

Step 5：当 $i\leqslant m$ 时，返回 Step 3；

Step 6：计算 $C_{EIMC}=\dfrac{\sum C_i}{m}\mathrm{e}^{-rT}$.

例如，设定 $T=63$，$\sigma=0.2$，$r=0.03$，期权类型为看涨期权，我们分别对实值期权($S=100$，$K=90$)、平值期权($S=100$，$K=100$)和虚值期权($S=100$，$K=110$)进行数值算例模拟. 下面我们来比较欧式期权定价的 BS 公式法(EBS，式(1))、蒙特卡洛法(EMC 算法 2.1)和改进蒙特卡洛法(EIMC 算法 2.2)，其中蒙特卡洛法的期权价格和计算时间为运行 1 000 次程序后取均值，单次模拟次数为 10^5 次，基准价格为 EBS 算法的价格. 程序运行的软件环境为 Win10+Python 3.7，硬件环境为 Intel Core i5-8300H，结果见表 1.

表 1　EBS、EMC、EIMC 算法的算例比较

Tab. 1　A numerical example of the EBS、EMC and EIMC algorithms

定价方法	期权种类	Price	Time	Price Error
EBS	实值期权	11.284 7	1.1e-04	
	平值期权	4.357 62	1.1e-04	
	虚值期权	1.091 34	1.1e-04	
EMC	实值期权	11.284 5	0.275	1.8e-05
	平值期权	4.358 23	0.278	1.4e-04
	虚值期权	1.091 32	0.279	1.8e-05
EIMC	实值期权	11.284 8	3.1e-03	8.9e-06
	平值期权	4.358 47	3.5e-03	2.0e-04
	虚值期权	1.091 65	3.1e-03	2.8e-05

可以看出，对实值期权、平值期权及虚值期权，蒙特卡洛法和改进的蒙特卡洛法对比公式法的价格误差都极小. 因而在价格没有解析表达式的期权(如美式期权、算术平均亚式期权)定价过程中，我们可以使用蒙特卡洛法进行定价，近似地得到真实价格. 同时，改进蒙特卡洛法的计算时间仅为蒙特卡洛法的 1%，效率较高.

3　算术平均亚式期权定价的矩近似解析法

算术平均亚式期权需要计算[0，T]时间段内每一时刻价格的平均值作为行情价，一般采用蒙特卡洛法来进行定价，算法如下[11-12].

算法 3.1

Step 1：输入 S、K、T、σ、r、m；

Step 2：生成 m 个服从标准正态分布的 T 维列向量 a_i，以a_i为列，构成矩阵$A_{m\times T}$，令 $i=1$；

Step 3：按照算法 2.1 的 Step 3，生成序列$\{S(j)_i\}$；

Step4：计算序列$\{S(j)\}_i$的算术平均值 ave_i；

Step 5：计算$C_i=\max\{\mathrm{ave}_i-K,0\}$，完成一次模拟，$i=i+1$；

Step 6：当 $i\leqslant m$ 时，返回 Step 3；

Step 7：计算 $C_{AMC}=\dfrac{\sum C_i}{m}\mathrm{e}^{-rT}$.

1991 年，Turnbull 和 Wakeman 首次提出利用几何布朗运动$\bar{S}(t)$来近似算术平均亚式期权行情价 $S(t)$，其中

$$\bar{S}(t)=S(0)\mathrm{e}^{\bar{X}(t)},$$

$$\bar{X}(t)\sim N\left[\left(\bar{u}-\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)t,\bar{\sigma}^2 t\right].$$

通过$\bar{S}(t)$和 $S(t)$的一阶矩和二阶矩相等求出$\bar{u}$和$\bar{\sigma}$后，我们可以利用欧式期权定价公式的推导方法得出算术平均亚式期权定价公式. 以亚式看涨期权为例，计算公式如下[13].

$$C_{AMA}(S,K,T,\sigma,r)=$$

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-rT}}{rT}\left[SN(\bar{d}_1)-\mathrm{e}^{-\bar{u}T}KN(\bar{d}_2)\right] \tag{5}$$

其中

$$\bar{u}=\frac{1}{T}\ln\left[\frac{\mathrm{e}^{rT}-1}{rT}\right],$$

$$\bar{\sigma}^2=\frac{1}{T}\ln\left\{\frac{2r^2}{(r+\sigma^2)(\mathrm{e}^{rT}-1)^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{(2r+\sigma^2)T}-1}{2r+\sigma^2}-\frac{\mathrm{e}^{rT}-1}{r}\right]\right\},$$

$$\bar{d}_1=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(\bar{u}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T}{\bar{\sigma}\sqrt{T}},$$

$$\bar{d}_2=\bar{d}_1-\bar{\sigma}\sqrt{T}.$$

此外,亚式期权矩近似解析法的价格可直接按照式(5)进行计算,算法不再给出.

下面我们再给出一个数值算例. 设定 $T=63$,$\sigma=0.2$,$r=0.03$,期权类型为看涨期权. 我们分别对实值期权、平值期权和虚值期权进行数值算例模拟,以比较亚式期权定价的蒙特卡洛法(AMC 算法 3.1)和矩近似解析法(AMA,式(5)),其中蒙特卡洛法的期权价格和计算时间为运行 10^3 次程序后取均值,单次模拟次数为 10^5,基准价格设为 AMC 算法的价格(由第 2 节的结论,近似认为 10^5 次蒙特卡洛法的期权价格为真实价格),结果见表 2.

表 2 AMC 与 AMA 的算例比较

Tab. 2 A numerical example of the AMC and AMA algorithms

定价方法	期权种类	Price	Time	Price Error
AMC	实值期权	10.367	0.291	
	平值期权	2.502 63	0.294	
	虚值期权	0.160 155	0.299	
AMA	实值期权	10.360 7	1.4e-04	6.1e-04
	平值期权	2.484 56	1.3e-04	7.2e-03
	虚值期权	0.145 574	1.3e-04	0.091

由表 2 可以看出,对于实值期权和平值期权,矩近似解析法相较蒙特卡洛法的误差分别为 0.6‰和 7‰,处于可接受的范围内;对于虚值期权,误差在 9%左右,偏差较大,但矩近似解析法的计算时间仅为蒙特卡洛法的 0.4‰,提升效果明显. 鉴于在场外期权市场中虚值期权交易较少,在实际运用中可以考虑用矩近似解析法来进行亚式期权快速定价.

4 算术平均半亚式期权定价的快速算法

按照半亚式期权的定义,我们可以将$[0,T]$时间段分为$[0,T']$和$[T',T]$两个时间段,其中$[0,T']$时间段为波动期,行情价 $S(t)$符合初值为 $S(0)$的几何布朗运动;$[T',T]$时间段为采价期,行情价 $S(t)$符合初值为 $S(T')$的几何布朗运动.

在波动期内,我们采用改进蒙特卡洛法得到价格$S(T')_i$,随后对每一个价格$S(T')_i$用式(5)计算得到$C_{AMA}(S(T')_i,K,T-T',\sigma,r)$,即在采价期内可将其看成$S(0)'=S(T')_i$,$K=K$,$T=T-T'$,$\sigma=\sigma$,$r=r$ 的一次亚式期权定价. 对$C_{AMA}(S(T')_i,K,T-T',\sigma,r)$进行贴现后可得到 $S(0)$时刻的半亚式期权价值,即

$$C_{HIMCMA}^{(i)}(S,K,T,T',\sigma,r)=$$
$$\mathrm{e}^{-rT'}C_{AMA}(S(T')_i,K,T-T',\sigma,r) \quad (6)$$

对$C_{HIMCMA}^{(i)}(S(0),K,T,T',\sigma,r)$取平均值后得 $S(0)$时刻的半亚式期权价值,算法如下.

算法 4.1 结合改进蒙特卡洛法与矩近似解析法的近似半解析法(HIMCMA)

Step 1:输入 S、K、T、σ、r、m;

Step 2:生成 1 个服从标准正态分布的 T 维列向量a,将 a 记为矩阵$A_{m\times1}$,令 $i=1$;

Step 3:按照算法 2.2 的 Step 4 生成序列$S(T')_i$;

Step4:根据式(6)计算$C_{HIMCMA}^{(i)}(S,K,T,T',\sigma,r)$,完成一次模拟,$i=i+1$;

Step 5:当 $i\leqslant m$ 时,返回 Step 3;

Step 6:计算 $C_{HIMCMA}=\frac{\sum C_{HIMCMA}^{(i)}}{m}$.

由半亚式期权定价的近似半解析法,在采价期内采用矩近似解析法进行直接计算,在波动期内采用改进蒙特卡洛法进行价格路径模拟. 为减少定价的计算时间,我们可以考虑在波动期内采用对偶变量技术[14-16],在保证方差不变的前提下减少模拟次数,算法如下.

算法 4.2 对偶近似半解析法(HIMCMAA)

Step 1:输入 S、K、T、σ、r、m、n,其中 n 为蒙特卡洛模拟次数减少系数,即蒙特卡洛模拟总次数为 $2m/n$;

Step 2:生成 1 个服从标准正态分布的 T 维列向量a,将 a 记为矩阵$B_{\frac{m}{n}\times1}$,令 $i=1$;

Step 3:将矩阵$B_{\frac{m}{n}\times1}$和$-B_{\frac{m}{n}\times1}$按列拼接成矩阵$A_{\frac{2m}{n}\times1}$;

Step 4:按照算法 4.1 的 Step 3 和 Step 4 完成一次模拟,$i=i+1$;

Step5:当 $i\leqslant m$ 时,返回 Step 4;

Step 6:计算 $C_{HIMCMAA}=\frac{\sum C_{HIMCMA}^{(i)}}{m}$.

下面我们给出一个数值算例. 设定 $T=63$,$T'=21$,$\sigma=0.2$,$r=0.03$,期权类型为看涨期权. 我

们分别对实值期权、平值期权和虚值期权进行数值算例模拟，以比较半亚式期权定价的蒙特卡洛法(HMC)、近似半解析法(HIMCMA)和对偶近似半解析法(HIMCMAA，$n=2,4,8$)的计算效率. 其中，期权价格和计算时间为运行 10^3 次程序后取均值，单次模拟次数为 10^5，基准价格设为 HMC 算法的价格. 结果见表3.

表3　HMC 及 HIMCMA、HIMCMAA(n=2,4,8)算法的算例比较

Tab. 3　A numerical example of the HMC、HIMCMA and HIMCMAA (n=2,4,8) algorithms

定价方法	期权种类	Price	Time	Var	Price Error
HMC	实值期权	10.967 7	0.287	6.6-04	
	平值期权	3.843 4	0.288	3.1e-04	
	虚值期权	0.765 8	0.287	6.5e-05	
HIMCMA	实值期权	10.954 4	0.019 92	5.2e-04	1.2e-03
	平值期权	3.822 2	0.019 17	2.5e-04	5.5e-03
	虚值期权	0.752 6	0.019 29	5.0e-05	0.017
HIMCMAA (n=2)	实值期权	10.955 2	0.019 31	3.6e-05	1.1e-03
	平值期权	3.821 2	0.018 22	1.3e-04	5.8e-03
	虚值期权	0.753 1	0.018 29	4.0e-05	0.017
HIMCMAA (n=4)	实值期权	10.955 2	0.006 46	7.0e-05	1.1e-03
	平值期权	3.822 4	0.007 34	2.6e-04	5.5e-03
	虚值期权	0.752 8	0.007 06	8.6e-05	0.017
HIMCMAA (n=8)	实值期权	10.955 3	0.002 86	1.5e-04	1.1e-03
	平值期权	3.822 1	0.002 91	4.6e-04	5.5e-03
	虚值期权	0.752 5	0.002 90	1.6e-04	0.017

可以看出，对于实值期权和平值期权，近似半解析法相较于蒙特卡洛法的误差分别为1‰和5‰左右，处于可接受的范围内；对于虚值期权，误差在1.6%左右，偏差较大. 但是，鉴于近似半解析法的计算时间为蒙特卡洛法的7%左右，效率提升明显，在实际运用中可以考虑利用近似半解析法进行半亚式期权快速定价. 同时，我们还发现，随着 n 的增大，模拟次数不断减少，HIMCMAA 算法的计算时间也不断减小，方差缓慢增大，价格误差则几乎没有变化. 因此，在实际运用中可以比较近似半解析法和对偶近似半解析法的方差来确定合适的 n，以保证在方差尽可能不变的前提下减少计算时间.

5　结　论

本文旨在减少算术平均半亚式期权定价的计算时间. 首先，根据行情价服从几何布朗运动的理论假设，本文提出了改进蒙特卡洛法. 随后，对半亚式期权的波动期和采价期分别采用改进蒙特卡洛法和矩近似解析法，本文提出了近似半解析法. 数值算例比较发现，在保证精度的前提下，近似半解析法的计算时间大幅少于传统蒙特卡洛法. 此外，本文利用对偶变量技术改进近似半解析法提出了对偶近似半解析法，在误差可接受的情况下进一步减少计算时间.

参考文献：

[1]　Black F, Scholes M S. The pricing of options and corporate liabilities [J]. J Polit Econ, 1973, 81: 637.

[2]　Zhang P G. Exotic options [M]. Singapore: World Scientific, 2009.

[3]　Pascucci A. PDE and martingale methods in option pricing [M]. Milan: Springer, 2011.

[4]　Kwok Y K. Mathematical models of financial derivatives [M]. Berlin/Heidelberg: Springer, 2010.

[5]　Boughamoura W, Trabelsi F. Variance reduction with control variate for pricing Asian options in a geometric Levy model [J]. Iaeng Int J Appl Math, 2011, 41: 320.

[6]　姜广鑫，徐承龙，寇大治，等. 高性能计算中的亚式期权蒙特卡罗加速方法[J]. 同济大学学报：自然科学版，2013，41：792.

[7]　Li S, Lin J. Accelerating Asian option pricing on many-core architectures [J]. Concurr Comp-Pract E, 2016, 28: 848.

[8]　Hugger J. A fixed strike Asian option and comments on its numerical solution [J]. Anziam J, 2014, 2003: 215.

[9]　Ma J, Zhou Z. Convergence rates of moving mesh rannacher methods for PDEs of Asian options pricing [J]. J Comput Math, 2016, 34: 265.

[10]　Patel K S, Mehra M. High-order compact finite difference scheme for pricing Asian option with moving boundary condition [J]. Diff Equ Dynsyst, 2019, 27: 39.

[11]　Boyle P, Potapchik A. Prices and sensitivities of Asian options: a survey [J]. Insur Math Econ, 2008, 42: 189.

[12]　袁国军，肖庆宪. 基于近似对冲的亚式期权定价模型与实证分析[J]. 上海理工大学学报，2014，36：416.

[13]　Lo C L, Palmer K J, Yu M T. Moment-matching

approximations for Asian Options [J]. J Derivatives, 2014, 21: 103.

[14] Dingec K D, Sak H, Hormann W. Variance reduction for Asian options under a general model framework [J]. Rev Financ, 2015, 19: 907.

[15] Vajargah B F, Salimipour A, Salahshour S. Variance analysis of control variate technique and applications in Asian option pricing [J]. Indagat Math, 2016, 8: 61.

[16] 徐玲玲. 算术平均亚式期权定价的 Monte Carlo 模拟改进研究[D]. 济南：山东大学，2018.

引用本文格式：

中　文：陈聪，唐亚勇. 算术平均半亚式期权的快速定价算法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：1061.

英　文：Chen C, Tang Y Y. A fast pricing algorithm for the arithmetic average half-Asian option [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 1061.