doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.06.002

一类含迭代的二元均值函数

陈荔靖
（四川大学数学学院，成都 610064）

摘　要：本文给出了含有迭代的二元函数 $M_f(x,y)=\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)+\mu_1 f(y)+\mu_2 f^2(y)$ 为均值函数的条件，研究了该类均值函数的对称性、等价性及拟算术均值函数关于该类均值函数的不变性，其中 f 为实区间 I 上的自映射，f^2 为 f 的 2 次迭代，λ_1，λ_2，μ_1，μ_2 为实数.

关键词：均值函数；迭代；函数方程
中图分类号：O171　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)06-1033-05

On a class of two-variable means with iteration

CHEN Li-Jing
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: This paper gives the condition that a two-variable function with iteration, *i.e.*, $M_f(x,y)=\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)+\mu_1 f(y)+\mu_2 f^2(y)$, is mean, where f maps a real interval I into itself, f^2 is the second iterate of f and λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 are real numbers. Some properties of $M_f(x,y)$ mean type, including the symmetry, equivalence and invariance of the quasi-arithmetic mean with respect to this mean type are discussed.

Keywords: Mean; Iteration; Functional equation
(2010 MSC 26A18, 26E60)

1　引　言

均值是统计学中最常用的统计量，常被用来描述统计对象总体的一般水平或分布的集中趋势，柯西[1]首先给出了均值函数的定义：设区间 $I\subset \mathbf{R}$，若对任意 $x,y\in I$，函数 $M:I^2\to\mathbf{R}$ 满足

$$\min(x,y)\leqslant M(x,y)\leqslant \max(x,y),$$

则称 M 是 I^2 上的均值函数. 若上述不等式等号成立当且仅当 $x=y$，则称 M 是 I^2 上的严格均值函数. 显然，均值函数具有自反性，即对任意 $x\in I$，$M(x,x)=x$. 设 $K,M,N:I^2\to I$ 都是均值函数，若对任意 $x,y\in I$，$M(x,y)=M(y,x)$，则称 M 是对称的；若对任意 $x,y\in I$，K 满足

$$K(M(x,y),N(x,y))=K(x,y),$$

则称 K 关于 (M,N) 是不变的. 设 $M_2(I)$ 是定义在区间 I 上的一类二元均值函数，若 $M,N\in M_2(I)$，并且对任意 $x,y\in I$ 有 $M(x,y)=N(x,y)$，则称 M,N 等价.

经典的均值函数有算术均值函数 $A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$：

$$A(x,y)=\frac{x+y}{2} \tag{1}$$

几何均值函数 $G:(0,+\infty)^2\to(0,+\infty)$：

$$G(x,y)=\sqrt{xy} \tag{2}$$

以及调和均值函数 $H:(0,+\infty)^2\to(0,+\infty)$：

$$H(x,y)=\frac{2xy}{x+y} \tag{3}$$

它们都具有对称性，且满足 $G\circ(A,H)=G$.

1930 年，Kolmogoroff[2]引入了拟算术均值函

收稿日期：2019-12-07
作者简介：陈荔靖(1996－)，女，重庆万州人，硕士研究生，主要研究方向为微分方程与动力系统. E-mail：lijingchen023@163.com

数的形式定义. 设区间 $I\subset\mathbf{R}$, $\varphi: I\to\mathbf{R}$ 连续且严格单调,称

$$A_\varphi(x,y) := \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \tag{4}$$

为拟算术均值函数. 式(1)~(3)中的函数都是拟算术均值函数的特殊形式. 此后, Hardy 等[3]研究了拟算术均值函数的等价性, Matkowski[4]研究了算术均值函数关于拟算术均值函数的不变性.

当(4)式中的等权重 1/2 变为不等权重 $p\in(0,1)$ 和 $1-p$ 时,(4)式变为加权拟算术均值函数. Daróczy[5]研究了有关该类均值函数的函数方程,在加权拟算术均值函数中的权重为权重函数时得到带有权重函数的拟算术均值函数. Jarczyk[6]研究了带有权重函数的拟算术均值函数关于这一类均值函数的不变性.

为进一步推广二元均值函数,也有学者研究了更一般的 n 元均值函数. 设 f 为实区间 I 上的自映射, f^k 为 f 的 k 次迭代, Draga 和 Morawiec[7]研究了自然数 $k\in[0,n]$ 时方程 $f^k(x)=N(x,f(x),\cdots,f^n(x))$ 连续解 f 的存在性,其中 N 为拟算术均值函数. Liu 和 Matkowski[8]研究了函数 $N_f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f^i(x_i)$ 为均值函数的条件,并着重对 $n=2$ 的情形

$$N_f(x,y)=a_1 f(x)+a_2 f^2(y) \tag{5}$$

研究了算术均值函数、拟算术均值函数关于该类均值函数的不变性.

受上述工作启发,本文研究式(5)的推广形式

$$M_f(x,y)=\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)+\mu_1 f(y)+\mu_2 f^2(y) \tag{6}$$

我们首先给出 M_f 为均值函数的条件,进而研究了 M_f 的对称性、等价性及拟算术均值函数关于该类均值函数的不变性.

2 预备知识

引理 2.1 设区间 $I\subset\mathbf{R}$, $f: I\to I$ 连续, $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbf{R}$. 若对任意 $x,y\in I$, M_f 是均值函数,则

(i) 对任意 $x\in I$, 有

$$(\lambda_1+\mu_1)f(x)+(\lambda_2+\mu_2)f^2(x)=x \tag{7}$$

并且 $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$ 不全为 0, f 是单射;

(ii) 当 $\lambda_2+\mu_2\neq0$ 时,对任意 $x\in I$,

$$f^2(x)=\frac{x-(\lambda_1+\mu_1)f(x)}{\lambda_2+\mu_2} \tag{8}$$

若此时 $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=0$,则对任意 $x,y\in I$,

$$M_f(x,y)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}x+\frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}y \tag{9}$$

当 $\lambda_2+\mu_2=0$ 时,对任意 $x,y\in I$,

$$M_f(x,y)=\frac{\lambda_1^2+\lambda_1\mu_1+\lambda_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}x+\frac{\mu_1^2+\lambda_1\mu_1+\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}y \tag{10}$$

(iii) $\lambda_1 f+\lambda_2 f^2$, $\mu_1 f+\mu_2 f^2$ 均单增.

证明 (i) 由均值函数的自反性可知,对任意 $x\in I$, (7)式成立. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$ 全为 0,则对任意 $x,y\in I$, $M_f(x,y)=0$,与 M_f 为均值函数矛盾. 若存在 $x,y\in I$,使得 $f(x)=f(y)$,则 $f^2(x)=f^2(y)$. 所以

$$\begin{aligned} x&=M_f(x,x)=\\ &(\lambda_1+\mu_1)f(x)+(\lambda_2+\mu_2)f^2(x)=\\ &(\lambda_1+\mu_1)f(y)+(\lambda_2+\mu_2)f^2(y)=\\ &M_f(y,y)=y. \end{aligned}$$

因此 f 是单射.

(ii) 当 $\lambda_2+\mu_2\neq0$ 时,由(7)式易知,对任意 $x\in I$, (8)式成立. 若此时 $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=0$,将(8)式代入(6)式计算可得,对任意 $x,y\in I$, (9)式成立.

当 $\lambda_2+\mu_2=0$ 时,由(7)式可得,对任意 $x\in I$, $(\lambda_1+\mu_1)f(x)=x$, 故此时 $\lambda_1+\mu_1\neq0$. 因此,对任意 $x\in I$,

$$f(x)=\frac{x}{\lambda_1+\mu_1},$$

(10)式成立.

(iii) 由均值函数的自反性知 $M_f(y,y)=y$, 所以对任意 $y\in I$,

$$\mu_1 f(y)+\mu_2 f^2(y)=y-\lambda_1 f(y)-\lambda_2 f^2(y).$$

因此,

$$M_f(x,y)=\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)+y-\lambda_1 f(y)-\lambda_2 f^2(y) \tag{11}$$

由均值函数的定义可知,对任意 $x,y\in I$,

$$\min(x,y)\leqslant\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)+y-\lambda_1 f(y)-\lambda_2 f^2(y)\leqslant\max(x,y)$$

所以 $\lambda_1 f+\lambda_2 f^2$ 单增. 同理可得 $\mu_1 f+\mu_2 f^2$ 单增. 证毕.

3 主要结果及证明

定理 3.1 设区间 $I\subset\mathbf{R}$, $f: I\to I$ 连续, $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbf{R}$,则下列等价:

(i) 对任意 $x,y\in I$, M_f 是均值函数;

(ii) 对任意 $x\in I$, (7)式成立, 且 $\lambda_1 f+\lambda_2 f^2$, $\mu_1 f+\mu_2 f^2$ 均单增.

证明　假设(i)成立. 由引理 2.1 的(i)、(iii)可得,(ii)成立.

若(ii)成立,则对任意 $x\in I$, $M_f(x,x)=x$,并且对任意 $x,y\in I$ 有

$$\begin{aligned}\min(x,y)=&\lambda_1 f(\min(x,y))+\\&\lambda_2 f^2(\min(x,y))+\mu_1 f(\min(x,y))+\\&\mu_2 f^2(\min(x,y))\leqslant\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)+\\&\mu_1 f(y)+\mu_2 f^2(y)\leqslant\lambda_1 f(\max(x,y))+\\&\lambda_2 f^2(\max(x,y))+\mu_1 f(\max(x,y))+\\&\mu_2 f^2(\max(x,y))=\max(x,y)\end{aligned}\tag{12}$$

因此 M_f 是均值函数. 证毕.

定理 3.2　设区间 $I\subset\mathbf{R}$, $f:I\to I$ 连续, $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbf{R}$,则下列等价:

(i) 对任意 $x,y\in I$,M_f 是严格均值函数;

(ii) 对任意 $x\in I$, (7)式成立,λ_1,λ_2 不全为 0 且 μ_1,μ_2 不全为 0, $\lambda_1 f+\lambda_2 f^2$,$\mu_1 f+\mu_2 f^2$ 均严格单增.

证明　设(i)成立. 则 λ_1,λ_2 不全为 0 且 μ_1,μ_2 不全为 0. 事实上,若 $\lambda_1=\lambda_2=0$,此时必有 μ_1,μ_2 不全为 0,则对任意 $x,y\in I$,

$$\begin{aligned}M_f(x,y)=&\mu_1 f(y)+\mu_2 f^2(y)=\\&M_f(y,y)=y.\end{aligned}$$

这与 M_f 是严格均值函数矛盾. 同理,若 $\mu_1=\mu_2=0$,易推出矛盾.

若存在 $x,y\in I$,使得

$$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)=\lambda_1 f(y)+\lambda_2 f^2(y),$$

则由均值函数的自反性可知(11)式成立. 所以此时 $M_f(x,y)=y$. 又因 M_f 是严格均值函数,故 $x=y$. 因而 $\lambda_1 f+\lambda_2 f^2$ 是单射. 同理 $\mu_1 f+\mu_2 f^2$ 也是单射. 再由定理 3.1 知(ii)成立.

若(ii)成立,将(12)式中“$\leqslant$”替换为“$<$”即得证. 证毕.

定理 3.3　设区间 $I\subset\mathbf{R}$,$\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in\mathbf{R}$, $f:I\to I$连续, 对任意 $x,y\in I$,M_f 是均值函数. M_f 是对称的当且仅当

$$M_f(x,y)=\frac{x+y}{2}\tag{13}$$

证明　必要性. 若 M_f 是对称的,则对任意 $x,y\in I$,$M_f(x,y)=M_f(y,x)$. 因此,

$$\begin{aligned}&(\lambda_1-\mu_1)f(x)+(\lambda_2-\mu_2)f^2(x)=\\&\quad(\lambda_1-\mu_1)f(y)+(\lambda_2-\mu_2)f^2(y).\end{aligned}$$

从而存在 $C\in\mathbf{R}$,使得对任意 $x\in I$,

$$(\lambda_1-\mu_1)f(x)+(\lambda_2-\mu_2)f^2(x)=C\tag{14}$$

当 $\lambda_2+\mu_2\neq0$ 时,因为 M_f 是均值函数, 由引理 2.1 的(ii)可知,对任意 $x,y\in I$,(8)式成立. 将(8)式代入(14)式可得

$$2\frac{\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}{\lambda_2+\mu_2}f(x)+\frac{\lambda_2-\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}x=C\tag{15}$$

若 $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1\neq0$,由(15)式可知,对任意 $x,y\in I$,

$$f(x)=-\frac{\lambda_2-\mu_2}{2(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)}x+\widetilde{C}\tag{16}$$

其中

$$\widetilde{C}=\frac{C(\lambda_2+\mu_2)}{2(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)}.$$

此时一定有 $\lambda_2\neq\mu_2$,否则 f 为常数与引理 2.1(i)中的 f 是单射矛盾. 将(8),(16)式代入(6)式计算可得(13)式成立.

若 $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=0$,则由引理 2.1 的(ii)可知(9)式成立. 又由 M_f 对称得 $\lambda_2=\mu_2$, 所以(13)式成立.

当 $\lambda_2+\mu_2=0$ 时,由引理 2.1 的(ii)可得, 对任意 $x,y\in I$,(10)式成立. 因此,由均值函数的自反性 $M_f(x,x)=x$ 知

$$\frac{\lambda_1^2+\lambda_1\mu_1+\lambda_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}+\frac{\mu_1^2+\lambda_1\mu_1+\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}=1\tag{17}$$

再由 M_f 具有对称性可得

$$\frac{\lambda_1^2+\lambda_1\mu_1+\lambda_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}=\frac{\mu_1^2+\lambda_1\mu_1+\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}=\frac{1}{2}\tag{18}$$

所以(13)式成立.

充分性. 若(13)式成立,则显然有 $M_f(x,y)=M_f(y,x)$. 证毕.

为讨论方便,以下记

$$\Lambda\coloneqq(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2),\ \Lambda'\coloneqq(\lambda_1',\lambda_2',\mu_1',\mu_2').$$

$$\begin{aligned}M_{f,\Lambda}(x,y)\coloneqq&\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)+\\&\mu_1 f(y)+\mu_2 f^2(y)\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}M_{g,\Lambda'}(x,y)\coloneqq&\lambda_1' g(x)+\lambda_2' g^2(x)+\\&\mu_1' g(y)+\mu_2' g^2(y)\end{aligned}\tag{20}$$

易见 $M_f=M_{f,\Lambda}$.

定理 3.4　设区间 $I\subset\mathbf{R}$, $f,g:I\to I$ 连续, 对任意 $i\in\{1,2\}$,$\lambda_i,\lambda_i',\mu_i,\mu_i'\in\mathbf{R}$. 若 $M_{f,\Lambda}$,$M_{g,\Lambda'}$ 都是均值函数,则对任意 $x,y\in I$, $M_{f,\Lambda}(x,y)=M_{g,\Lambda'}(x,y)$, 当且仅当存在 $C,C'\in\mathbf{R}$,$C+C'=0$,使得对任意 $x\in I$,

$$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)-\lambda_1' g(x)-\lambda_2' g^2(x)=C\tag{21}$$

$$\mu_1 f(x)+\mu_2 f^2(x)-\mu_1' g(x)-\mu_2' g^2(x)=C'\tag{22}$$

证明　必要性. 若 $M_{f,\Lambda}$,$M_{g,\Lambda'}$ 都是均值函数,

由均值函数的自反性可知,对任意 $x,y\in I,M_{f,\Lambda}(x,y)=M_{g,\Lambda'}(x,y)$意味着

$$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)+y-\lambda_1 f(y)-\lambda_2 f^2(y)=\lambda_1' g(x)+\lambda_2' g^2(x)+y-\lambda_1' g(y)-\lambda_2' g^2(y).$$

故此时存在 $C\in\mathbf{R}$,使得对任意 $x\in I$,(21)式成立. 同理可得存在 $C'\in\mathbf{R}$,使得对任意 $x\in I$,(22)式成立. 又由于对任意 $x,y\in I$,

$$M_{f,\Lambda}(x,y)-M_{g,\Lambda'}(x,y)=\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)-\lambda_1' g(x)-\lambda_2' g^2(x)+\mu_1 f(y)+\mu_2 f^2(y)-\mu_1' g(y)-\mu_2' g^2(y) \tag{23}$$

因此 $C+C'=M_{f,\Lambda}(x,y)-M_{g,\Lambda'}(x,y)=0$.

充分性. 反过来,由(23)式及条件易得, 对任意 $x,y\in I,M_{f,\Lambda}(x,y)=M_{g,\Lambda'}(x,y)$. 证毕.

定理 3.5 设区间 $I\subset\mathbf{R},\varphi:I\to\mathbf{R}$ 连续且严格单调, $f,g:I\to I$ 连续, 对任意 $i\in\{1,2\},\lambda_i,\lambda_i',\mu_i,\mu_i'\in\mathbf{R}$, 拟算术均值函数

$$A_\varphi(x,y):=\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right).$$

若由(19),(20)式定义的 $M_{f,\Lambda},M_{g,\Lambda'}$ 都是均值函数,则

(i) 拟算术均值函数 A_φ 关于$(M_{f,\Lambda},M_{g,\Lambda'})$是不变的,即

$$A_\varphi\circ(M_{f,\Lambda},M_{g,\Lambda'})=A_\varphi \tag{24}$$

当且仅当对任意 $x,y\in I$,

$$\varphi(M_{f,\Lambda}(x,y))+\varphi(M_{g,\Lambda'}(x,y))=\varphi(x)+\varphi(y) \tag{25}$$

(ii) 若 φ,f,g 可导,对任意 $x\in I$, $\varphi'(x)\neq 0$, $\Lambda'=\Lambda$,并且

$$A_\varphi\circ(M_{f,\Lambda},M_{g,\Lambda})=A_\varphi \tag{26}$$

则 λ_1,λ_2 不全为 0 且 μ_1,μ_2 不全为 0,对任意 $x,y\in I$,有

$$M_{g,\Lambda}(x,y)=M_{f,\Lambda}(y,x) \tag{27}$$

并且当 $\lambda_2+\mu_2\neq 0$ 且 $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=0$, 或当 $\lambda_2+\mu_2=0$ 时, 存在 $k,l\in\mathbf{R}$ 且 $k\neq 0$,使得

$$\varphi(x)=kx+l \tag{28}$$

证明 (i) 显然成立.

(ii) 由于 $\Lambda'=\Lambda$,则

$$M_{g,\Lambda}(x,y)=\lambda_1 g(x)+\lambda_2 g^2(x)+\mu_1 g(y)+\mu_2 g^2(y) \tag{29}$$

因为(26)式成立,所以由(i)可知,

$$\varphi(M_{f,\Lambda}(x,y))+\varphi(M_{g,\Lambda}(x,y))=\varphi(x)+\varphi(y) \tag{30}$$

若 $\lambda_1=\lambda_2=0$,此时必有 μ_1,μ_2 不全为 0. 则由均值函数的自反性可知,对任意 $x,y\in I$,

$$M_{f,\Lambda}(x,y)=y=M_{g,\Lambda}(x,y) \tag{31}$$

将(31)式代入(30)式可得,对任意 $x,y\in I,\varphi(x)=\varphi(y)$. 则 φ 为常函数,与 φ 严格单调矛盾. 同理,若 $\mu_1=\mu_2=0$ 可推出矛盾. 因此 λ_1,λ_2 不全为 0 且 μ_1,μ_2 不全为 0.

当 $\lambda_2+\mu_2\neq 0$ 时,由引理 2.1 的(ii)可知, 对任意 $x\in I$,(8)式成立,且

$$g^2(x)=\frac{x-(\lambda_1+\mu_1)g(x)}{\lambda_2+\mu_2} \tag{32}$$

将(8),(32)式分别代入(19),(29)式后对 x 求导可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M_{f,\Lambda}(x,y)}{\partial x}=\left(\dfrac{\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}{\lambda_2+\mu_2}\right)f'(x)+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2},\\ \dfrac{\partial M_{g,\Lambda}(x,y)}{\partial x}=\left(\dfrac{\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}{\lambda_2+\mu_2}\right)g'(x)+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}\end{cases} \tag{33}$$

对(30)式左右两边 x 求导可得

$$\varphi'(M_{f,\Lambda}(x,y))\frac{\partial M_{f,\Lambda}(x,y)}{\partial x}+\varphi'(M_{g,\Lambda}(x,y))\frac{\partial M_{g,\Lambda}(x,y)}{\partial x}=\varphi'(x) \tag{34}$$

将(33)式代入(34)式,再令 $y=x$,由对 任意 $x\in I$, $M_{f,\Lambda}(x,x)=M_{g,\Lambda}(x,x)=x,\varphi'(x)\neq 0$ 可知,

$$\frac{\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}{\lambda_2+\mu_2}f'(x)+2\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}+\frac{\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}{\lambda_2+\mu_2}g'(x)=1 \tag{35}$$

若 $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1\neq 0$,则由(35)式可知, 存在 $c\in\mathbf{R}$,使得

$$g(x)=-f(x)+\frac{\mu_2-\lambda_2}{\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}x+c \tag{36}$$

将(32),(36)式代入(29)式计算可得

$$M_{g,\Lambda}(x,y)=\lambda_1 f(y)+\lambda_2\frac{y-(\lambda_1+\mu_1)f(y)}{\lambda_2+\mu_2}+\mu_1 f(x)+\mu_2\frac{x-(\lambda_1+\mu_1)f(x)}{\lambda_2+\mu_2}=\lambda_1 f(y)+\lambda_2 f^2(y)+\mu_1 f(x)+\mu_2 f^2(x)=M_{f,\Lambda}(y,x).$$

若 $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=0$,由引理 2.1 的(ii)可知, 对任意 $x,y\in I$,(9)式成立. 所以此时 $M_{f,\Lambda}(x,y)=M_{g,\Lambda}(x,y)=M_f(x,y)$. 又由(35)式可得 $\lambda_2=\mu_2$. 所以

$$M_{f,\Lambda}(x,y)=M_{g,\Lambda}(x,y)=\frac{x+y}{2} \tag{37}$$

故对任意 $x,y\in I$,(27)式成立. 由(30)式,此时

$$\varphi(\frac{x+y}{2})=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} \tag{38}$$

为 Jensen 方程. 又因为 φ 连续且严格单调,由文献[9]可知，存在 $k,l\in\mathbf{R}$ 且 $k\neq 0$,使得(28)式成立.

当 $\lambda_2+\mu_2=0$ 时,由引理 2.1 的(ii)可知(10)式成立. 所以此时 $M_{f,\Lambda}(x,y)=M_{g,\Lambda}(x,y)=M_f(x,y)$. 由(30)式,

$$\varphi(\frac{\lambda_1^2+\lambda_1\mu_1+\lambda_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}x+\frac{\mu_1^2+\lambda_1\mu_1+\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}y)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} \tag{39}$$

此时一定有$(\lambda_1^2+\lambda_1\mu_1+\lambda_2)(\mu_1^2+\lambda_1\mu_1+\mu_2)\neq 0$. 否则,若 $\lambda_1^2+\lambda_1\mu_1+\lambda_2=0$,则(39)式变为

$$\varphi(\frac{\mu_1^2+\lambda_1\mu_1+\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}y)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} \tag{40}$$

同时对(40)式左右两边 x 求导可得 $\varphi'(x)=0$. 这与 φ 严格单调矛盾. 由文献[9]知

$$\frac{\lambda_1^2+\lambda_1\mu_1+\lambda_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}=\frac{1}{2},\frac{\mu_1^2+\lambda_1\mu_1+\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)^2}=\frac{1}{2}.$$

因此(37)式成立. 从而对任意 $x,y\in I$,(27)式成立. 再由(39)式知(38)式成立. 所以存在 $k,l\in\mathbf{R}$ 且 $k\neq 0$,使得(28)式成立. 证毕.

参考文献：

[1] Cauchy A L. Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, I. partie: Analyse Algébrique [M]. Paris: Debure, 1821.

[2] Kolmogoroff A N. Sur la notion de la moyenne [J]. Atti R Accad Naz Lincei, 1930, 6: 388.

[3] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[4] Matkowski J. Invariant and complementary quasi-arithmetic means [J]. Aequationes Math, 1999, 57: 87.

[5] Daróczy Z. Mean values and functional equations [J]. Differ Equ Dyn Syst, 2009, 17: 105.

[6] Jarczyk J. Invariance of quasi-arithmetic means with function weights [J]. J Math Anal Appl, 2009, 353: 134.

[7] Draga S, Morawiec J. Means of iterates [J]. Aequationes Math, 2019, 93: 21.

[8] Liu L, Matkowski J. Iterative functional equations and means [J]. J Differ Equ Appl, 2018, 24: 797.

[9] Aczél J. Lectures on functional equations and their applications [M]. New York: Academic Press, 1966.

引用本文格式：

中　文：陈荔靖. 一类含迭代的二元均值函数[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：1033.

英　文：Chen L J. On a class of two-variable means with iteration [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2020，57：1033.