求解 BBM 方程的一个新的高精度线性化差分算法

沙婵娟[1]，张 虹[2]

(1. 山西大学数学科学学院，太原 030006；2. 西南交通大学希望学院，成都 610400)

摘 要：本文对一类带有齐次边界条件的 Benjamin-Bona-Mahony 方程的初边值问题进行了数值研究. 通过先在时间层外推对问题进行线性化离散处理，然后再利用 Richardson 外推的思想在空间层进行外推，本文提出了一个理论精度为 $O(\tau^2+h^4)$ 的三层线性差分格式，证明了差分解的存在唯一性. 在不能得到问题差分解的最大模估计的情况下，本文综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法直接证明了该差分格式的收敛性和稳定性. 数值实验表明该格式的精度明显优于已有的线性层差分格式.

关键词：Benjamin-Bona-Mahony 方程；线性差分格式；收敛性；稳定性

中图分类号：O241.82 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.011006

A new high accuracy linearized difference algorithm for the BBM equation

SHA Chan-Juan[1]，*ZHANG Hong*[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;
2. Hope College, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610400, China)

Abstract: In this paper, an initial boundary value problem of Benjamin-Bona-Mahony equation is studied numerically. Firstly, the problem is discretized and linearized by extrapolating in time layer, and then extrapolated at the space level with Richardson's extrapolation idea, thus a three-layer linear difference scheme with $O(\tau^2+h^4)$ theoretical accuracy is proposed. Secondly, the existence and uniqueness of the discrete solution are proved. Finally, the convergence and stability of the scheme are proved by combining mathematical induction and discrete functional analysis. Numerical experiments show that the accuracy of the scheme is obviously better than the known linear layer difference scheme.

Keywords: Benjamin-Bona-Mahon equation; Linearized difference scheme; Convergence; Stability
(2010 MSC 65M60)

1 引 言

本文考虑如下带有非线性扩散项和耗散项的 Benjamin-Bona-Mahony (BBM) 方程的初边值问题：

$$u_t-u_{xxt}+u_x-u_{xx}+uu_x=0,(x,t)\in(x_L,x_R)\times(0,T] \quad (1)$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in[x_L,x_R] \quad (2)$$

$$u(x_L,t)=u(x_R,t)=0,t\in[0,T] \quad (3)$$

其中 $u_0(x)$是已知光滑的函数. 方程(1)是 Benjamin 等[1]在研究非线性弥散系统中长波的单向传播时为考虑非线性波在传播中的耗散原理而提出的，是对描述浅水波损耗现象的 KdV 方程的修改. 对这类问题的研究有重要的理论和应用价值.

收稿日期：2020-03-25
基金项目：四川应用基础研究项目(2019JY0387)；国家自然科学基金青年基金(11701481)
作者简介：沙婵娟(1983－)，女，山西忻州人，讲师，主要研究方向为计算数学.
通讯作者：张虹. E-mail：1216463413@qq.com

文献[2-4]研究了方程(1)解的存在唯一性及收敛性. 文献[5-12]对 BBM 方程进行了数值方法研究,但一般都只具有二阶理论精度. 文献[13,14]对问题(1)-(3)分别提出理论精度为 $O(\tau^2+h^4)$ 的两层非线性差分格式和三层线性差分格式,但非线性差分格式数值求解时需要非线性迭代,耗时较多. 本文先对方程(1)进行线性化离散处理,仅需在时间层将非线性项 uu_x 部分外推到 $n-1$ 层即可保证时间层具有二阶理论精度. 然后,利用 Richardson 外推[13]的思想在空间层进行外推,本文使空间层具有四阶理论精度,从而对问题(1)-(3)构造一个新的三层线性差分格式. 在不能得到其差分解的最大模估计的情况下,本文综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法[15],直接证明了该格式的收敛性和稳定性. 数值算例表明,相对于文献[14]的三层线性格式,该格式的精度有了大幅度的提高.

2　差分格式及其可解性

对区域 $[x_L,x_R]\times[0,T]$ 作网格剖分,取空间步长 $h=\frac{x_R-x_L}{J}$,时间步长为 τ,$x_j=x_L+jh\ (0\leqslant j\leqslant J)$,$t_n=n\tau\ (n=0,1,2,\cdots,N,\ N=\left[\frac{T}{\tau}\right])$. 记 $u_j^n=u(x_j,t_n)$,$U_j^n\approx u(x_j,t_n)$,$Z_h^0=\{U=(U_j)\mid U_{-1}=U_0=U_J=U_{J+1}=0,\ j=-1,0,\cdots,J,J+1\}$,用 C 表示与 τ 和 h 无关的一般正常数(即在不同地方可以有不同的取值),并定义如下记号:

$$(U_j^n)_x=\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h},\quad (U_j^n)_{\bar{x}}=\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h},$$

$$(U_j^n)_{\hat{x}}=\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h},\quad (U_j^n)_{\ddot{x}}=\frac{U_{j+2}^n-U_{j-2}^n}{4h},$$

$$(U_j^n)_t=\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau},\quad U_j^{n+\frac12}=\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2},$$

$$\langle U^n,V^n\rangle=h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nV_j^n,\quad \|U^n\|^2=\langle U^n,U^n\rangle,$$

$$\|U^n\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant J-1}|U_j^n|.$$

对问题(1)~(3)考虑如下有限差分格式:

$$(U_j^n)_t-\frac43(U_j^n)_{x\bar{x}t}+\frac13(U_j^n)_{\hat{x}\hat{x}t}+\frac43(U_j^{n+\frac12})_{\hat{x}}-\frac13(U_j^{n+\frac12})_{\ddot{x}}-\frac43(U_j^{n+\frac12})_{x\bar{x}}+\frac13(U_j^{n+\frac12})_{\hat{x}\hat{x}}+\left[\frac32U_j^n-\frac12U_j^{n-1}\right]\left[\frac43(U_j^{n+\frac12})_{\hat{x}}-\frac13(U_j^{n+\frac12})_{\ddot{x}}\right]=0,$$
$$(j=1,2,\cdots,J-1;\ n=1,2,\cdots,N-1)\tag{4}$$

$$U_j^0=u_0(x_j),\ j=0,1,2,\cdots,J\tag{5}$$

$$U_j^1-\frac43(U_j^1)_{x\bar{x}}+\frac13(U_j^1)_{\hat{x}\hat{x}}=u_0(x_j)-\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}(x_j)-\tau\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_j)+\tau\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}(x_j)-\tau u_0(x_j)\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_j),\quad j=1,2,\cdots,J-1\tag{6}$$

$$U^n\in Z_h^0,\ n=0,1,2,\cdots,N\tag{7}$$

引理 2.1[15]　对 $n=0,1,2,\cdots,N$,恒有 $\|U_{\ddot{x}}\|\leqslant\|U_{\hat{x}}\|\leqslant\|U_x\|$.

定理 2.2　若时间步长 τ 充分小,则差分格式(4)~(7)是唯一可解的.

证明　用数学归纳法. 显然,U^0 和 U^1 是由(5)式和(6)式唯一确定的. 假设 $U^0,U^1,\cdots,U^{n-1},U^n\ (n\leqslant N-1)$ 是唯一可解的. 现在我们来考虑(4)式中的 U^{n+1},则有

$$\frac1\tau U_j^{n+1}-\frac{4}{3\tau}(U_j^{n+1})_{x\bar{x}}+\frac{1}{3\tau}(U_j^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}}+\frac23(U_j^{n+1})_{\hat{x}}-\frac16(U_j^{n+1})_{\ddot{x}}-\frac23(U_j^{n+1})_{x\bar{x}}+\frac16(U_j^{n+1})_{\hat{x}\hat{x}}+\left[\frac32U_j^n-\frac12U_j^{n-1}\right]\left[\frac23(U_j^{n+1})_{\hat{x}}-\frac16(U_j^{n+1})_{\ddot{x}}\right]=0\tag{8}$$

将(8)式与 U^{n+1} 作内积,由边界条件和分部求和公式[16]有

$$\frac1\tau\|U^{n+1}\|^2+\frac{4}{3\tau}\|U_x^{n+1}\|^2-\frac{1}{3\tau}\|U_{\hat{x}}^{n+1}\|^2+\frac23\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle-\frac16\langle U_{\ddot{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=-\frac23\|U_x^{n+1}\|^2+\frac16\|U_{\hat{x}}^{n+1}\|^2-h\sum_{j=1}^{J-1}\left[\frac32U_j^n-\frac12U_j^{n-1}\right]\left[\frac23(U_j^{n+1})_{\hat{x}}-\frac16(U_j^{n+1})_{\ddot{x}}\right]U_j^{n+1}\tag{9}$$

由引理 2.1 有

$$-h\sum_{j=1}^{J-1}\left[\frac32U_j^n-\frac12U_j^{n-1}\right]\left[\frac23(U_j^{n+1})_{\hat{x}}-\frac16(U_j^{n+1})_{\ddot{x}}\right]U_j^{n+1}=-h\sum_{j=1}^{J-1}\left[\frac32U_j^n-\frac12U_j^{n-1}\right]\left[\frac23(U_j^{n+1})_{\hat{x}}U_j^{n+1}-\frac16(U_j^{n+1})_{\ddot{x}}U_j^{n+1}\right]\leqslant C(\|U_{\ddot{x}}^{n+1}\|^2+\|U_{\hat{x}}^{n+1}\|^2+\|U^{n+1}\|^2)\leqslant C(\|U_x^{n+1}\|^2+\|U^{n+1}\|^2)\tag{10}$$

又

$$\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=0,\ \langle U_{\ddot{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=0\tag{11}$$

将(10)和(11)式代入(9)式,并利用引理 2.1,整

理有

$$(1-C\tau)\|U^{n+1}\|^2+(1-C\tau)\|U_x^{n+1}\|^2\leqslant 0.$$

于是，只要取 τ 足够小，使得当 $1-C\tau>0$ 时，方程组(8)仅有零解. 因而，差分格式(4)～(7)中的 U^{n+1} 是唯一可解的.

3　差分格式的收敛性与稳定性

差分格式(4)～(7)的截断误差定义如下：

$$r_j^n=(u_j^n)_t-\frac{4}{3}(u_j^n)_{x\bar{x}t}+\frac{1}{3}(u_j^n)_{\hat{x}\hat{\bar{x}}t}+\frac{4}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\frac{1}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}-\frac{4}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{\bar{x}}}+\left[\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\right]\left[\frac{4}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\frac{1}{3}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}\right]=0 \tag{12}$$

$$u_j^0=u_0(x_j),\ j=0,1,2,\cdots,J \tag{13}$$

$$u_j^1-\frac{4}{3}(u_j^1)_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(u_j^1)_{\hat{x}\hat{\bar{x}}}=u_0(x_j)-\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}(x_j)-\tau\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_j)+\tau\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}(x_j)-\tau u_0(x_j)\frac{\partial u_0}{\partial x}(x_j)+r_j^0,\ j=0,1,2,\cdots,J-1 \tag{14}$$

$$u^n\in Z_h^0,\ n=0,1,2,\cdots,N \tag{15}$$

由 Taylor 展开可知，当 $h,\tau\to 0$ 时，

$$|r_j^n|=O(\tau^2+h^4) \tag{16}$$

引理 3.1[13]　设 $u_0\in H^2$. 则初边值问题(1)～(3)的解满足

$$\|u\|_{L_2}\leqslant C,\ \ \|u_x\|_{L_2}\leqslant C,\ \ \|u\|_{L_\infty}\leqslant C.$$

定理 3.2　设 $u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 若时间步长 τ 和空间步长 h 充分小则差分格式(4)～(7)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛到初边值问题(1)～(3)的解，收敛阶为 $O(\tau^2+h^4)$.

证明　数学归纳法. 记

$$e_j^n=u_j^n-U_j^n.$$

由(12)～(15)式减去(4)～(7)式得

$$r_j^n=(e_j^n)_t-\frac{4}{3}(e_j^n)_{x\bar{x}t}+\frac{1}{3}(e_j^n)_{\hat{x}\hat{\bar{x}}t}+\frac{4}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\frac{1}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}-\frac{4}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}\hat{\bar{x}}}+P_j+Q_j\ (j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1) \tag{17}$$

$$e_j^0=0,\ j=0,1,\cdots,J \tag{18}$$

$$e_j^1-\frac{4}{3}(e_j^1)_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}(e_j^1)_{\hat{x}\hat{\bar{x}}}=r_j^0,\ j=1,2,\cdots,J-1 \tag{19}$$

$$e^n\in Z_h^0,\ n=0,1,\cdots,N \tag{20}$$

其中

$$P_j=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\right)(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\left(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\right)(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}\right],$$

$$Q_j=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\right)(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}-\left(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\right)(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\ddot{x}}\right].$$

由引理 3.1 以及(16)式知，存在与 τ 和 h 无关的常数 C_u 和 C_r 使得

$$\|u^n\|_\infty\leqslant C_u;\ \|u_x^n\|_\infty\leqslant C_u;\ \ \|r^n\|_\infty\leqslant C_r(\tau^2+h^4)\quad n=1,2,\cdots,N-1 \tag{21}$$

再由初始条件(5)以及(18)式可得以下估计式：

$$\|e^0\|=0,\ \|U^0\|_\infty\leqslant C_u \tag{22}$$

现假设

$$\|e^l\|+\|e_x^l\|\leqslant C_l(\tau^2+h^4),\quad l=1,2,\cdots,n(n\leqslant N-1) \tag{23}$$

其中 $C_l(l=1,2,\cdots,n)$ 为与 τ 和 h 无关的常数. 则由离散 Sobolev 不等式[16]和 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\|e^l\|_\infty\leqslant C_0\sqrt{\|e^l\|}\sqrt{\|e_x^l\|+\|e^l\|}\leqslant\frac{1}{2}C_0(2\|e^l\|+\|e_x^l\|)\leqslant\frac{3}{2}C_0C_l(\tau^2+h^4),l=1,2,\cdots,n \tag{24}$$

$$\|U^l\|_\infty\leqslant\|u^l\|_\infty+\|e^l\|_\infty\leqslant C_u+\frac{3}{2}C_0C_l(\tau^2+h^4),\ l=1,2,\cdots,n \tag{25}$$

将(17)式两端与 $e^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积，注意到

$$\langle e_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0,\ \langle e_{\ddot{x}}^{n+\frac{1}{2}},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0 \tag{26}$$

整理得

$$\frac{1}{2}\|e^n\|_t^2+\frac{2}{3}\|e_x^n\|_t^2-\frac{1}{6}\|e_{\hat{x}}^n\|_t^2=\langle r^n,e_j^{n+\frac{1}{2}}\rangle-\frac{2}{3}\|e_x^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{1}{6}\|e_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2-\langle P,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle-\langle Q,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle \tag{27}$$

由引理 3.2 以及微分中值定理有

$$(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}=\frac{u(x_{j+1},\frac{t_n+t_{n+1}}{2})-u(x_{j-1},\frac{t_n+t_{n+1}}{2})}{2h}=\frac{\partial}{\partial x}u(x_{\xi_j},\frac{t_n+t_{n+1}}{2}),(x_{j-1}\leqslant\xi_j\leqslant x_{j+1}),$$

即

$$\| u_x^{n+\frac{1}{2}} \|_\infty \leqslant C_u \tag{28}$$

同理

$$\| u_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}} \|_\infty \leqslant C_u \tag{29}$$

再取 τ 和 h 充分小,使得

$$\frac{3}{2}C_0 \cdot (\max_{0\leqslant l\leqslant n} C_l)(\tau^2+h^4)\leqslant 1 \tag{30}$$

则由引理 2.1、引理 3.2 以及(28)～(30)式有

$$\begin{aligned}
-\langle P, e^{n+\frac{1}{2}}\rangle =& -\frac{4}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}\Big[\Big(\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\Big)(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\\
&\Big(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\Big)(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}\Big]e_j^{n+\frac{1}{2}}=\\
&-\frac{4}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}\Big[\frac{3}{2}e_j^n-\frac{1}{2}e_j^{n-1}\Big](u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}+\\
&\frac{4}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}\Big(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\Big)(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}\leqslant\\
&\frac{2}{3}C_u h\sum_{j=1}^{J-1}(3|e_j^n|+|e_j^{n-1}|)|e_j^{n+\frac{1}{2}}|+\\
&\frac{2}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}(3|U_j^n|+|U_j^{n-1}|)|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}||e_j^{n+\frac{1}{2}}|\leqslant\\
&\frac{1}{3}C_u(3\|e^n\|^2+2\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\|e^{n-1}\|^2)+\\
&\frac{8}{3}\Big(C_u+\frac{3}{2}C_0\cdot\max(C_n,C_{n-1})(\tau^2+h^4)\Big)\cdot\\
&h\sum_{j=1}^{J-1}|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}||e_j^{n+\frac{1}{2}}|\leqslant\\
&\frac{1}{6}C_u(\|e^{n+1}\|^2+4\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2)+\\
&\frac{2}{3}(C_u+1)(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\\
&\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)
\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}
-\langle Q, e^{n+\frac{1}{2}}\rangle =& \frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}\Big[\Big(\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\Big)(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\bar{x}}-\\
&\Big(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\Big)(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\bar{x}}\Big]e_j^{n+\frac{1}{2}}=\\
&-\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}\Big[\frac{3}{2}e_j^n-\frac{1}{2}e_j^{n-1}\Big](u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x}e_j^{n+\frac{1}{2}}+\\
&\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}\Big(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\Big)(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\bar{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}\leqslant\\
&\frac{1}{6}C_u h\sum_{j=1}^{J-1}(3|e_j^n|+|e_j^{n-1}|)|e_j^{n+\frac{1}{2}}|+\\
&\frac{1}{6}h\sum_{j=1}^{J-1}(3|U_j^n|+|U_j^{n-1}|)|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\bar{x}}||e_j^{n+\frac{1}{2}}|\leqslant\\
&\frac{1}{12}C_u(3\|e^n\|^2+2\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\|e^{n-1}\|^2)+\\
&\frac{2}{3}\Big(C_u+\frac{3}{2}C_0\cdot\max(C_n,C_{n-1})(\tau^2+h^4)\Big)\cdot\\
&h\sum_{j=1}^{J-1}|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}||e_j^{n+\frac{1}{2}}|\leqslant\\
&\frac{1}{24}C_u(\|e^{n+1}\|^2+4\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2)+\\
&\frac{1}{6}(C_u+1)(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\\
&\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)
\end{aligned}\tag{32}$$

$$\langle r^n, e^{n+\frac{1}{2}}\rangle\leqslant\frac{1}{2}\|r^n\|^2+\frac{1}{4}(\|e^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2)\tag{33}$$

将(31)～(33)式代入(27)式整理有

$$\begin{aligned}
&(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2)+\frac{4}{3}(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2)-\\
&\frac{1}{3}(\|e_{\bar{x}}^{n+1}\|^2-\|e_{\bar{x}}^n\|^2)\leqslant\\
&\tau\|r^n\|^2+2(C_u+1)(\|e^{n+1}\|^2+\\
&\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\\
&\|e_x^{n-1}\|^2)
\end{aligned}\tag{34}$$

将(34)式从 1 到 n 递推,由引理 3.1 得

$$\begin{aligned}
&\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2\leqslant\|e^1\|^2+\|e_x^1\|^2+\\
&\tau\sum_{l=1}^{n}\|r^l\|^2+6\tau(C_u+1)\sum_{l=0}^{n+1}(\|e^l\|^2+\\
&\|e_x^l\|^2)
\end{aligned}\tag{35}$$

又

$$\begin{aligned}
&\tau\sum_{l=1}^{n}\|r^l\|^2\leqslant n\tau\max_{1\leqslant l\leqslant n}\|r^l\|^2\leqslant\\
&T\cdot(C_r)^2(\tau^2+h^4)^2
\end{aligned}\tag{36}$$

将(23)、(36)式代入(35)式,利用离散 Gronwall 不等式[16],取时间步长 τ 充分小以满足

$$\tau<\frac{1}{12(C_u+1)},$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2\leqslant\\
&(T(C_r)^2+C_1^2)(\tau^2+h^4)^2e^{2T[6(C_u+1)]}\leqslant\\
&(C_{n+1})^2(\tau^2+h^4)^2,\ n=1,2,\cdots,N-1,
\end{aligned}$$

其中 $C_{n+1}=(\sqrt{T}C_r+C_1)\mathrm{e}^{6T(C_u+1)}$. 显然 C_{n+1} 为与 n 无关的常数. 从而由归纳假设有 $\|e^n\|\leqslant O(\tau^2+h^4)$, $\|e_x^n\|\leqslant O(\tau^2+h^4)$, $n=1,2,\cdots,N$.

最后,由离散 Sobolev 不等式有

$$\|e^n\|_\infty\leqslant O(\tau^2+h^4),\ n=1,2,\cdots,N.$$

定理 3.3　设 $u_0\in H^2$. 若时间步长 τ 和空间步长 h 充分小,则差分格式(4)～(7)的解满足

$$\|U^n\|_\infty\leqslant\widetilde{C}_0,\ n=1,2,\cdots,N,$$

其中 $\widetilde{C}_0$ 是与 τ 和 h 无关的常数.

证明　对于充分小的 τ 和 h，由定理 3.2 有

$\| U^n \|_\infty \leqslant \| u^n \|_\infty + \| e^n \|_\infty \leqslant \widetilde{C}_0.$

注　定理 3.3 表明差分格式(4)～(7)的解 U^n 以 $\| \cdot \|_\infty$ 关于初值无条件稳定.

4　数值算例

当 $t=0$ 时，由于耗散还没有产生，所以在数值实验中，我们把问题(1)～(3)中的初值函数取为 RLW 方程的初值函数[14]($t=0$ 时)

$$u(x,0)=\mathrm{sech}^2(\frac{1}{4}x).$$

由于不知道方程(1)的精确解，我们用类似文献[13-14]中的处理方法将细网格（$\tau=h=1/160$）上的数值解作为精确解来估计误差. 固定 $x_L=-20$，$x_R=40$，$T=10$. 就 τ 和 h 的不同取值，对本文的格式(记为格式 1)和文献[14]的线性格式(记为格式 2)进行了比较，在几个不同时刻的误差及其对理论精度的检验见表 1、2. 其中

$$R_n=\| e^n(h,\tau) \|_\infty / \| e^{4n}\left(\frac{h}{2},\frac{\tau}{4}\right) \|_\infty,$$

$$\mathrm{Order}=\log_2{}^{R_n}.$$

表 1　两个格式在不同时刻的 l_∞ 误差比较

Tab. 1　The error comparison of the two schemes at various time

	格式 1			格式 2		
	$\tau=0.4$ $h=0.2$	$\tau=0.1$ $h=0.1$	$\tau=0.025$ $h=0.05$	$\tau=0.4$ $h=0.2$	$\tau=0.1$ $h=0.1$	$\tau=0.025$ $h=0.05$
$t=2$	2.745 44e-3	1.914 48e-4	1.157 75e-5	7.067 32e-3	5.183 51e-4	3.055 34e-5
$t=4$	3.609 61e-3	2.463 04e-4	1.481 23e-5	1.001 67e-2	6.254 96e-4	3.683 16e-5
$t=6$	3.713 10e-3	2.518 33e-4	1.512 72e-5	9.468 81e-3	6.112 43e-4	3.595 76e-5
$t=8$	3.572 30e-3	2.419 55e-4	1.453 12e-5	9.197 81e-3	5.660 99e-4	3.327 82e-5
$t=10$	3.357 90e-3	2.277 41e-4	1.368 38e-5	8.129 96e-3	5.162 43e-4	3.033 13e-5

表 2　对格式 1 的理论精度 $O(\tau^2+h^4)$ 的数值检验

Tab. 2　The numerical example of scheme 1 on theoretical precision $O(\tau^2+h^4)$

	$\tau=0.4$，$h=0.2$		$\tau=0.1$，$h=0.1$		$\tau=0.025$，$h=0.05$	
	R_n	Order	R_n	Order	R_n	Order
$t=2$	—	—	14.340 4	3.842 0	16.536 1	4.047 5
$t=4$	—	—	14.655 1	3.873 3	16.628 2	4.055 6
$t=6$	—	—	14.744 2	3.882 1	16.647 6	4.057 2
$t=8$	—	—	14.764 2	3.884 0	16.650 7	4.057 5
$t=10$	—	—	14.744 3	3.882 1	16.643 0	4.056 8

从数值算例可以看出，本文的格式是可行的. 由于格式 1 在数值计算时的已知层(第 $n-1$ 层)很少，所以误差传递累积也较少，从而格式 1 比格式 2 具有更高的精度.

参考文献：

[1]　Benjamin T B, Bona J L, Mahony J J. Model equations for long waves nonlinear dispersive system [J]. Phil Trans R Soc London, 1972, A272: 47.

[2]　Amick C J, Bona J L, Schonk M E. Decay of solution of some nonlinear wave equation [J]. J Diff Eq, 1989, 81: 1.

[3]　Bona J L, Dougalis V A. An initial and boundary value problem for a model equation for propagation long waves [J]. J Math Anal Appl, 1980, 75: 503.

[4]　Wang B X. Attractors and approximate inertial manifolds for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation [J]. Math Meth Appl Sci, 1997, 20: 189.

[5]　Achouri T, Khiari N, Omrani K. On the convergence of difference schemes for the Benjamin-Bona-Mahanoy(BBM) equation [J]. Appl Math Comput, 2006, 182: 999.

[6]　Omrani K. The convergence of fully discrete Galerkin approximations for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation [J]. App Math Comput, 2006, 180: 614.

[7]　胡劲松，王玉兰. Benjamin-Bona-Mahony 方程的拟紧致差分算法[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35：64.

[8]　Che H T, Pan X T, Zhang L M, *et al*. Numerical analysis of a linear-implicit average scheme for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation [J]. J Appl Math, 2012, 2012: 308410.

[9]　覃燕梅，孔花，罗丹，等. BBM 方程的全离散混合有限元方法 [J]. 应用数学学报，2015，38：597.

[10]　闫静叶，孙建强，赵鑫. BBM 方程的多辛整体保能量方法[J]. 湖北大学学报：自然科学版，2016，

38：310.
[11] Lyu P，Vong S. A linearized second-order finite difference scheme for time fractional generalized BBM equation [J]. Appl Math Lett，2018，78：16.
[12] Can L. Linearized difference schemes for a BBM equation with a fractional nonlocal viscous term [J]. Appl Math Comput，2017，311：240.
[13] 黄妗彤，胡劲松，贾其涛. 求解 BBM 方程的高精度非线性 CN 差分格式[J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：387.
[14] 张虹，王希，胡劲松. Benjamin-Bona-Mahony 方程的一个高精度线性差分格式 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：813.
[15] Zheng K L，Hu J S. High-order conservative Crank-Nicolson scheme for regularized long wave equation [J]. Adv Diff Equ，2013，2013：1.

引用本文格式：
中　文：沙婵娟，张虹. 求解 BBM 方程的一个新的高精度线性化差分算法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：011006.
英　文：Sha C J，Zhang H. A new high accuracy linearized difference algorithm for the BBM equation [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2021，58：011006.