

定常 Navier-Stokes 方程的三个梯度-散度 稳定化 Taylor-Hood 有限元

王炆霖, 敬璐如, 冯民富
(四川大学数学学院, 成都 610064)

摘要: 本文针对定常 Navier-Stokes 方程给出了三种梯度-散度稳定化 Taylor-Hood 元. 为了克服 Taylor-Hood 混合有限元离散迭代解不满足质量守恒律的问题, 本文在已有的三种迭代格式上增加了梯度-散度稳定项, 以便在得到连续离散速度和压力解的同时使离散速度解满足质量守恒律. 在强唯一性条件下, 本文证明了这三种梯度-散度稳定化 Taylor-Hood 元迭代格式的离散解在一定迭代次数下逼近 Scott-Vogelius 混合有限元离散解. 数值实验验证了本文的结果.

关键词: 定常 Navier-Stokes 方程; Taylor-Hood 有限元; 质量守恒

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2021.041003

Three Grad-Div stabilized Taylor-Hood finite elements for steady Navier-Stokes equation

WANG Zhu-Lin, JING Lu-Ru, FENG Min-Fu
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: We propose three Grad-Div stabilized Taylor-Hood finite elements for steady Navier-Stokes equation. To avoid the problem of the solutions obtained with Taylor-Hood finite elements, a grad-div stabilized term is added to the iterative formats proposed by He, *et al*, such that we can get continuous velocity and pressure, as well as the velocity solutions obeying mass conservation. Under the strong uniqueness conditions we show that the grad-div stabilized Taylor-Hood finite element iterative solutions converge to Scott-Vogelius solutions. Finally, numerical examples verify the efficiency of the finite elements.

Keywords: Steady Navier-Stokes equation; Taylor-Hood finite element; Mass conservation
(2010 MSC 65M60)

1 引言

Navier-Stokes 方程(简称 NS 方程)是描述不可压缩流体运动的非线性偏微分方程. 解 NS 方程的有限元法一直是计算数学领域的重要课题之一.

作为一个比较常用的有限元空间, Taylor-

Hood 有限元空间(简称 TH 元)采用连续的分片 k 次多项式空间作为速度逼近空间, 连续的分片 $k-1$ 次多项式空间作为压力逼近空间. 文献[1-3]介绍了 Scott-Vogelius 有限元空间(简称 SV 元), 其速度逼近空间也采用连续的分片 k 次多项式空间, 压力逼近空间则采用非连续的分片 $k-1$ 次多项式

收稿日期: 2020-05-06

基金项目: 国家自然科学基金(11271273, 11971337)

作者简介: 王炆霖(1994), 女, 贵州黔西南州人, 硕士研究生, 主要研究领域为计算数学. E-mail: 1831569334@qq.com

空间.

为保证解的存在唯一性,有限元空间需满足离散 LBB 条件^[4]. 研究表明,在某些特定条件下,SV 元 $((P_k)^2, P_{k-1}^{disc})$ 是 LBB 稳定的. 例如,当 $k \geq d$ 时,SV 元在重心细分后的正规三角形($d=2$)或四面体($d=3$)网格剖分下是 LBB 稳定的^[5-7]. 又如,当 $k=2, d=3$ 时,采用 Powell-Sabin 四面体网格剖分亦能够得到 LBB 稳定的 SV 有限元空间^[8]. SV 元有一个自然的优势,即由于 $\nabla \cdot (P_k)^d \subset P_{k-1}^{disc}$ 用 Galekin 有限元方法求解 Stokes 或 NS 方程时利用 SV 元能够得到严格质量守恒的离散速度解,不过得到的离散压力解是不连续的.

在解不可压缩流问题时,TH 元有比较广泛的应用. 利用 TH 元虽能得到连续的速度及压力,但其离散速度解往往不满足质量守恒性质. 文献[9-12]讨论了 NS 方程的带梯度-散度稳定项的有限元法,表明梯度-散度稳定项可以有效降低离散速度解的散度. 此外,文献[13-14]证实当梯度-散度稳定项系数 $\gamma \rightarrow \infty$ 时,梯度-散度稳定化 TH 元离散解逼近 SV 混合有限元离散解.

有限元法求解偏微分方程最终归结于解线性方程组. 许多研究致力于发展有效求解非线性 NS 方程有限元离散解的算法. 其中,文献[15]介绍了求定常 NS 方程有限元离散解的迭代方法,并证明了在一定的强唯一性条件下某些迭代格式能够得到收敛到真解的离散解. 文献[16-17]分别对比了三种求齐次和非齐次定常 NS 方程有限元离散解的迭代格式. 受文献[13-14, 16]启发,我们将文献[16]中求 NS 方程有限元离散解的迭代格式推广到梯度-散度稳定化迭代格式,用梯度-散度稳定项克服 TH 元解不满足质量守恒性质的问题. 在强唯一性条件下,我们证明了这些梯度-散度稳定化 TH 元迭代格式的解在一定的迭代次数下逼近 SV 混合有限元离散解,且当梯度-散度稳定项系数 $\gamma \rightarrow \infty$ 时 TH 元离散迭代解的散度趋于零. 利用 TH 元求 NS 方程离散解时,相较于文献[16]中的三种迭代格式,本文提出的三种稳定化迭代格式的解能够更好的满足质量守恒性质. 数值模拟验证了这一结论.

2 预备知识

考虑二维多边形区域 Ω 上的定常 NS 方程

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \text{ in } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0, \text{ in } \Omega, \\ u = 0, \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

这里 $u = (u_1(x), u_2(x))^T$ 为速度, $p = p(x)$ 为压力, $f = (f_1(x), f_2(x))$ 为外力, $\nu > 0$ 为粘度系数. 分别用 $\|\cdot\|$ 和 (\cdot, \cdot) 记 $L^2(\Omega)$ 或 $(L^2(\Omega))^2$ 上的范数和内积,用 $\|\cdot\|_r$ 记标准索伯列夫空间 $H^r(\Omega)$ 或 $(H^r(\Omega))^2$ 上的范数, $|\cdot|_r$ 记半范数. 定义 $X = (H_0^1(\Omega))^2$,

$$Q = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0\}.$$

对 X 赋予范数 $\|v\|_X = \|\nabla v\|$. 一般地, $f \in X'$ 的范数

$$\|f\|_{-1} = \sup_{v \in X} \frac{(f, v)}{\|v\|_X}.$$

众所周知,TH 元取 Ω 上连续的分片 k 次多项式空间作为速度逼近空间,压力逼近空间则是取 Ω 上连续的分片 $k-1$ 次分片多项式空间. SV 元同样以 Ω 上连续的分片 k 次多项式空间作为速度逼近空间,其压力逼近空间也采用 $k-1$ 次多项式空间,与 TH 元不同的地方仅在于 SV 元的压力逼近空间不要求在 Ω 上连续. 当取特定网格剖分且选择合适的多项式次数时 SV 元是 LBB 稳定的,而 TH 元在以上情况下都是 LBB 稳定的. 以下假设 SV 元与 TH 元是在特定网格剖分 Δ_h 下建立的 LBB 稳定的有限元空间.

定义 TH 元和 SV 元的速度有限元逼近空间为

$$X_h = \{v_h \in (C(\bar{\Omega}))^2 : v_h|_T \in (P_k)^2 \quad \forall T \in \Delta_h, \\ v_h = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

对 TH 元,定义其压力有限元逼近空间

$$Q_h^{TH} = \{q_h \in C(\bar{\Omega}) : q_h|_T \in P_{k-1} \quad \forall T \in \Delta_h, \\ \int_{\Omega} q_h d\Omega = 0\}.$$

定义 SV 元的压力有限元逼近空间

$$Q_h^{SV} = \{q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_T \in P_{k-1} \quad \forall T \in \Delta_h, \\ \int_{\Omega} q_h d\Omega = 0\}.$$

尽管 TH 元和 SV 元有相同的速度有限元逼近空间,但是它们的弱无散有限元子空间是不同的. 定义

$$V_h^{TH} = \{v_h \in X_h : (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h^{TH}\}, \\ V_h^{SV} = \{v_h \in X_h : (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h^{SV}\}.$$

由于 $\nabla \cdot X_h \subset Q_h^{SV}$, 因此

$$V_h^{SV} = \{v_h \in X_h : \nabla \cdot v_h = 0\} \subset V_h^{TH}.$$

定义 R_h 为 V_h^{TH} 上与 V_h^{SV} 的正交补,即

$$V_h^{TH} = V_h^{SV} \oplus R_h.$$

分别定义 $X \times X, X \times Q$ 上的双线性形式

$$a_\gamma(u, v) = (\nabla u, \nabla v) + \gamma(\nabla \cdot u, \nabla \cdot v),$$

$$\forall (u, v) \in X \times X,$$

$$b(v, q) = -(\nabla \cdot v, q), \forall (v, q) \in X \times Q.$$

对 TH 元和 SV 元, 都存在 $\beta > 0$, 使得

$$\beta \leq \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X \|q_h\|} \quad (2)$$

其中 Q_h 表示 Q_h^{SV} 或 Q_h^{TH} . 定义三线性形式

$$b^*(u, v, w) = \frac{1}{2}((u \cdot \nabla v), w) - \frac{1}{2}((u \cdot \nabla w), v).$$

定义 $F(v) = (f, v), \forall v \in X$.

在后面的分析中需要用到以下引理.

引理 2.1^[16] 存在只与 Ω, h 有关的常数 C_S , 使得对 $u_h, v_h, w_h \in X_h$ 有

$$|b^*(u_h, v_h, w_h)| \leq C_S \|\nabla u_h\| \cdot \|\nabla v_h\| \cdot \|\nabla w_h\| \quad (3)$$

引理 2.2^[14] $\exists M < \infty$, 使得对任意 $r_h \in R_h$, $\|\nabla r_h\| \leq M \|\nabla \cdot r_h\|$ (4)

3 梯度-散度稳定化 TH 元与 SV 混合有限元

下面我们研究四种求解定常 NS 方程的有限元. SV 混合有限元法:

求 $(u_h, p_h) \in X_h \times Q_h^{SV}$, 使得对任何 $(v_h, q_h) \in X_h \times Q_h^{SV}$,

$$a_0(u_h, v_h) + b^*(u_h, u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = F(v_h), b(u_h, q_h) = 0 \quad (5)$$

梯度-散度稳定化 TH 元 1:

求 $(u_h^n, p_h) \in X_h \times Q_h^{TH}$, 使得对任何 $(v_h, q_h) \in X_h \times Q_h^{TH}$,

$$a_\gamma(u_h^n, v_h) + b^*(u_h^{n-1}, u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = F(v_h), b(u_h^n, q_h) = 0 \quad (6)$$

梯度-散度稳定化 TH 元 2:

求 $(u_h^n, p_h^n) \in X_h \times Q_h^{TH}$, 使得对任何 $(v_h, q_h) \in X_h \times Q_h^{TH}$,

$$a_\gamma(u_h^n, v_h) + b^*(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, v_h) + b(v_h, p_h^n) = F(v_h), b(u_h^n, q_h) = 0 \quad (7)$$

梯度-散度稳定化 TH 元 3:

求 $(u_h^n, p_h^n) \in X_h \times Q_h^{TH}$, 使得对任意 $(v_h, q_h) \in X_h \times Q_h^{TH}$,

$$a_\gamma(u_h^n, v_h) + b^*(u_h^n, u_h^{n-1}, v_h) + b^*(u_h^{n-1}, u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = F(v_h) + b^*(u_h^{n-1}, u_h^{n-1}, v_h), b(u_h^n, q_h) = 0 \quad (8)$$

其中梯度-散度稳定化 TH 元 1~3 的初值 $(u_h^0, p_h^0) \in X_h \times Q_h^{TH}$ 取为 Stokes 方程的 TH 混合有限元, 即对任意 $(v_h, q_h) \in X_h \times Q_h^{TH}$,

$$\begin{cases} a_0(u_h^0, v_h) + b(v_h, p_h^0) = F(v_h), \\ b(u_h^0, q_h) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

在唯一性条件

$$C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1} < 1 \quad (10)$$

下, 式(5)是适定的. 由文献[16], $\gamma = 0$ 时式(6)在唯一性条件下收敛且具稳定性, 式(7)的迭代格式在强唯一性条件 $4C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1} < 1$ 下收敛且具稳定性, 式(8)在强唯一性条件 $\frac{25C_S \|f\|_{-1}}{3\nu^2} < 1$ 收敛且具稳定性.

利用 SV 元, 我们可以得到无散的离散速度解, 但得到的离散压力解是不连续的. 另一方面, 利用 TH 元虽得到了连续的离散压力解, 但离散速度解不是无散的. 本节中我们将证明在 $\gamma \rightarrow +\infty$ 时梯度-散度稳定化 TH 元 1~3 可以得到散度趋于零的离散速度解和连续的离散压力解, 且梯度-散度稳定化 TH 元在强唯一性条件下随迭代次数增加逼近 SV 元解.

引理 3.1 设唯一性条件(10)成立. 则对问题(5)的解 u_h 有

$$\|\nabla u_h\| \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1}, \forall n \geq 1 \quad (11)$$

对问题(6)的解 u_h^n 有

$$\|\nabla u_h^n\| \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1}, \forall n \geq 1 \quad (12)$$

问题(7)的解 u_h^n 在强唯一性条件

$$4C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1} < 1 \quad (13)$$

下有

$$\|\nabla u_h^n\| \leq 2\nu^{-1} \|f\|_{-1}, \forall n \geq 1 \quad (14)$$

问题(8)的解 u_h^n 在强唯一性条件

$$\frac{25C_S \|f\|_{-1}}{3\nu^2} < 1 \quad (15)$$

下有

$$\|\nabla u_h^n\| \leq \frac{5}{3} \nu^{-1} \|f\|_{-1} \quad (16)$$

证明 在问题(5)中取 $v_h = u_h$ 有

$$\nu \|\nabla u_h\|^2 = (f, u_h) \leq \|f\|_{-1} \|\nabla u_h\|.$$

由 Young 不等式得

$$\|f\|_{-1} \|\nabla u_h\| \leq \frac{\nu}{2} \|\nabla u_h\|^2 + \frac{1}{2\nu} \|f\|_{-1}^2.$$

故

$$\|\nabla u_h\| \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1}.$$

同理可证式(12).

下证式(14). 显然,对 u_h^0 有

$$\|\nabla u_h^0\| \leq 2\nu^{-1} \|f\|_{-1}.$$

假设当 $n=J$ 时(14)式成立,则当 $n=J+1$ 时在式(7)中取 $(v_h, q_h) = (u_h^{J+1}, p_h^{J+1})$ 有

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla u_h^{J+1}\|^2 + \gamma \|\nabla \cdot u_h^{J+1}\|^2 &\leq \\ \|f\|_{-1} \|u_h^{J+1}\| + 4\nu^{-2} C_s \|f\|_{-1}^2 \|u_h^{J+1}\| &\leq \\ 2 \|f\|_{-1} \|u_h^{J+1}\|. \end{aligned}$$

即式(14)成立. 同理可证(16). 证毕.

定理 3.2 设 (u_h, p_h) 为问题(5)的解, (u_h^n, p_h^n) 为问题(6)(7)或(8)的解. 则

$$\|\nabla \cdot u_h^n\| \leq \frac{C}{\gamma} \quad (17)$$

证明 对问题(6)的解 (u_h^n, p_h^n) , 存在 $e_h^n \in V_h^{TH}$, 使得 $u_h^n = u_h + e_h^n$. 现正交分解 $e_h^n = r_h^n + w_h^n$, 其中 $r_h^n \in R_h, w_h^n \in V_h^{SV}$. 在式(5)(6)中取 $v_h = r_h^n$. 由 $(\nabla u_h, \nabla r_h^n) = 0, (\nabla \cdot r_h^n, p_h) = (\nabla \cdot u_h^n, p_h) = 0, \forall p_h \in Q_h^{TH}, (\nabla u_h^n, \nabla r_h^n) = (\nabla r_h^n, \nabla r_h^n)$, 以及引理 2.1, 引理 2.2 及引理 3.1 知

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla r_h^n\|^2 + \gamma \|\nabla \cdot r_h^n\|^2 &= \\ -b^*(e_h^{n-1}, u_h^n, r_h^n) - b^*(u_h, e_h^n, r_h^n) + & \\ b(r_h^n, p_h) &\leq C \|\nabla \cdot r_h^n\|, \end{aligned}$$

即 $\|\nabla \cdot u_h^n\| \leq \frac{C}{\gamma}$. 同理可证问题(7)(8)的解 (u_h^n, p_h^n) 满足式(15). 证毕.

定理 3.3 假设问题(5)(6)满足唯一性条件(10), 问题(7)(8)满足强唯一性条件(13)(15), SV 元 LBB 稳定. (u_h, p_h) 为问题(5)的解, $(u_h^n, p_h^n), (\overline{u}_h^n, \overline{p}_h^n), (\overline{\overline{u}}_h^n, \overline{\overline{p}}_h^n)$ 问题为(6)(7)(8)的解.

记 $e_h^n = u_h^n - u_h, \overline{e}_h^n = \overline{u}_h^n - u_h, \overline{\overline{e}}_h^n = \overline{\overline{u}}_h^n - u_h$. 则

$$\|\nabla e_h^n\| \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1} (C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1})^n \quad (18)$$

$$\|\nabla \overline{e}_h^n\| \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1} (3C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1})^n \quad (19)$$

$$\|\nabla \overline{\overline{e}}_h^n\| \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1} \left(\frac{5}{4} C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1}\right)^{2^n - 1} \quad (20)$$

证明 由问题(5)(6)有

$$\begin{aligned} \nu(\nabla e_h^n, \nabla v_h) + \gamma(\nabla \cdot e_h^n, \nabla \cdot v_h) + b(v_h, p_h^n - & \\ p_h) &= -b^*(e_h^{n-1}, u_h^n, v_h) - b^*(u_h, e_h^n, v_h). \end{aligned}$$

取 $v_h = e_h^n$. 由式(2)(3)(12)有

$$\|\nabla e_h^n\| \leq C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1} \|\nabla e_h^{n-1}\|.$$

又由式(5)(9)知

$$\|\nabla e_h^0\| \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1}.$$

故式(18)成立. 同理可得式(19).

下证式(20)成立. 取 $v_h = \overline{\overline{e}}_h^n$. 由式(5)(8)有

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla \overline{\overline{e}}_h^n\|^2 + \gamma \|\nabla \cdot \overline{\overline{e}}_h^n\|^2 + b(\overline{\overline{e}}_h^n, \overline{\overline{p}}_h^n - p_h) + & \\ b^*(\overline{\overline{e}}_h^n, \overline{\overline{u}}_h^{n-1}, \overline{\overline{e}}_h^n) &= b^*(\overline{\overline{e}}_h^{n-1}, \overline{\overline{e}}_h^{n-1}, \overline{\overline{e}}_h^n). \end{aligned}$$

又由式(16)知

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla \overline{\overline{e}}_h^n\|^2 - \frac{\nu}{5} \left(\frac{25}{3} \nu^{-2} \|f\|_{-1}\right) \|\nabla \overline{\overline{e}}_h^n\|^2 &\leq \\ C_s \|\nabla \overline{\overline{e}}_h^{n-1}\|^2 \|\nabla \overline{\overline{e}}_h^n\|, \end{aligned}$$

即

$$\frac{4\nu}{5} \|\nabla \overline{\overline{e}}_h^n\| \leq C_s \|\nabla \overline{\overline{e}}_h^{n-1}\|^2.$$

显然, 当 $n=0$ 时(20)式成立. 假设 $n=J$ 时(20)式成立. 则由上式可得当 $n=J+1$ 时(20)式成立. 证毕.

定理 3.4 设定理 3.3 的假设均成立. 沿用定理 3.3 的记号. 则对 $p_h^n, \overline{p}_h^n, \overline{\overline{p}}_h^n$ 有

$$\|p_h - (p_h^n - \gamma \nabla \cdot u_h^n)\| \leq C \|f\|_{-1} (C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1})^n \quad (21)$$

$$\|p_h - (\overline{p}_h^n - \gamma \nabla \cdot \overline{u}_h^n)\| \leq C \|f\|_{-1} (3C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1})^n \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \|p_h - (\overline{\overline{p}}_h^n - \gamma \nabla \cdot \overline{\overline{u}}_h^n)\| &\leq \\ C \|f\|_{-1} \left(\frac{5}{4} C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1}\right)^{2^n - 1} & \quad (23) \end{aligned}$$

证明 由问题(5)(6)有

$$\begin{aligned} b(v_h, p_h - (p_h^n - \gamma \nabla \cdot u_h^n)) &= \\ b^*(e_h^{n-1}, u_h^n, v_h) + b^*(u_h, e_h^n, v_h) + \nu(\nabla e_h^n, \nabla v_h). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \beta \|p_h - (p_h^n - \gamma \nabla \cdot u_h^n)\| &\leq \nu \|\nabla e_h^n\| + \\ \nu(C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1}) \|\nabla e_h^n\| + & \\ \nu(C_{SV} \nu^{-2} \|f\|_{-1}) \|\nabla e_h^{n-1}\| &\leq \\ 3\|f\|_{-1} (\zeta \nu^{-2} \|f\|_{-1})^n. \end{aligned}$$

即(21)式成立. 同理可证(22)(23)式成立. 证毕.

4 数值算例

例 4.1 在问题(1)中取 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, f 及边界条件由二维定常 NS 方程的精确解确定. 设精确解为

$$\begin{aligned} u_1 &= 10(x^4 - 2x^3 + x^2)(2y^3 - 3y^2 + y), \\ u_2 &= -10(y^4 - y^3 + y^2)(2x^3 - 3x^2 + x), \\ p &= 10(2x - 1)(2y - 1). \end{aligned}$$

取 $k=2$. 采用图 1 所示 10×10 重心细分网格剖分.

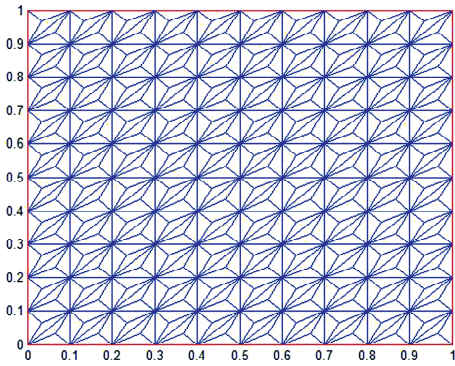


图 1 Ω 上 10×10 重心细分的三角形划分

Fig. 1 10×10 barycenter refined triangulation of the unit square

设 (u_h, p_h) 为问题(5)的解. 表 1, 2 给出了不同参数下梯度-散度稳定化迭代法 1 的计算结果, 表 3, 4 分别给出了 $\nu=0.5$ 时梯度-散度稳定化迭代法 2 及梯度-散度稳定化迭代法 3 的计算结果.

表 1 $\nu=0.5$ 时迭代法 1 的计算结果

Tab. 1 Numerical results of iterative method 1 for $\nu=0.5$

γ	$\ \nabla \cdot u_h^k\ $	$\frac{\ u_h^k - u_h\ }{\ u\ }$	$\frac{\ \nabla(u_h^k - u_h)\ }{\ \nabla u\ }$	$\frac{\ (\rho_h^k - \gamma \nabla \cdot u_h^k) - p_h\ }{\ p\ }$
0	3.74196e-02	1.33906e-02	1.53620e-01	1.15813e-02
1	1.42861e-02	7.22828e-03	7.59629e-02	8.54931e-03
10	2.86372e-03	2.47925e-03	2.52934e-02	3.57210e-03
10^2	3.69883e-04	3.60695e-04	3.70848e-03	5.39022e-04
10^3	3.83564e-05	3.78660e-05	3.89867e-04	5.68341e-05
10^4	3.85021e-06	3.80566e-06	3.91887e-05	5.72058e-06
10^5	3.85168e-07	3.80896e-07	3.92090e-06	6.29900e-07

表 2 $\nu=0.25$ 时迭代法 1 的计算结果

Tab. 2 Numerical results of iterative method 1 for $\nu=0.25$

γ	$\ \nabla \cdot u_h^k\ $	$\frac{\ u_h^k - u_h\ }{\ u\ }$	$\frac{\ \nabla(u_h^k - u_h)\ }{\ \nabla u\ }$	$\frac{\ (\rho_h^k - \gamma \nabla \cdot u_h^k) - p_h\ }{\ p\ }$
0	7.41420e-02	2.41368e-02	2.86311e-01	8.31488e-03
1	1.71090e-02	7.68932e-03	8.29797e-02	4.15620e-03
10	2.48786e-03	1.70291e-03	1.78424e-02	1.17409e-03
10^2	2.72930e-04	2.05619e-04	2.15592e-03	1.47026e-04
10^3	2.76069e-05	2.10212e-05	2.20459e-04	1.50911e-05
10^4	2.76392e-06	2.10686e-06	2.20961e-05	1.52996e-06
10^5	2.76425e-07	2.11043e-07	2.21012e-06	2.73390e-07

表 3 $\nu=0.5$ 时迭代法 2 的计算结果

Tab. 3 Numerical results of iterative method 2 for $\nu=0.5$

γ	$\ \nabla \cdot u_h^k\ $	$\frac{\ u_h^k - u_h\ }{\ u\ }$	$\frac{\ \nabla(u_h^k - u_h)\ }{\ \nabla u\ }$	$\frac{\ (\rho_h^k - \gamma \nabla \cdot u_h^k) - p_h\ }{\ p\ }$
0	3.74196e-02	1.33906e-02	1.53620e-01	1.1581e-02
1	1.42861e-02	7.22828e-03	7.59629e-02	8.54931e-03
10	2.86372e-03	2.47925e-03	2.52934e-02	3.57210e-03
10^2	3.69883e-04	3.60695e-04	3.70848e-03	5.39022e-04
10^3	3.83564e-05	3.78660e-05	3.89867e-04	5.68341e-05
10^4	3.85021e-06	3.80562e-06	3.91887e-05	5.72058e-06
10^5	3.85168e-07	3.80797e-07	3.92090e-06	6.29901e-07

表 4 $\nu=0.5$ 时迭代法 3 的计算结果

Tab. 4 Numerical results of iterative method 3 for $\nu=0.5$

γ	$\ \nabla \cdot u_h^k\ $	$\frac{\ u_h^k - u_h\ }{\ u\ }$	$\frac{\ \nabla(u_h^k - u_h)\ }{\ \nabla u\ }$	$\frac{\ (\rho_h^k - \gamma \nabla \cdot u_h^k) - p_h\ }{\ p\ }$
0	3.74191e-02	1.33912e-02	1.53614e-01	1.15857e-02
1	1.42858e-02	7.23008e-03	7.59604e-02	8.55549e-03
10	2.86364e-03	2.48546e-03	2.52964e-02	3.58647e-03
10^2	3.69876e-04	4.01405e-04	3.73193e-03	6.25537e-04
10^3	3.83557e-05	1.80183e-04	5.71562e-04	3.22015e-04
10^4	3.85014e-06	1.76203e-04	4.19788e-04	3.16965e-04
10^5	3.85160e-07	1.76162e-04	4.17973e-04	3.16908e-04

计算结果显示, 经过一定的迭代次数后, 三种梯度-散度稳定化 TH 元迭代方法的解都可以很好的逼近 SV 混合有限元的离散解. 通过增大梯度-散度稳定项系数, 我们可以得到散度趋于零的离散速度解, 且系数增大并不会造成 TH 元离散解与 SV 有限元离散解的误差增大. 换句话说, 通过在文献[16]中的三种迭代格式上加梯度-散度稳定项, 利用 TH 元我们可以得到散度趋于零的离散速度解和连续的离散压力解.

参考文献:

[1] Scott L R, Vogelius M. Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials [J]. ESAIM-Math Model Num, 1985, 19: 111.

[2] Vogelius M. An analysis of the p -version of the finite element method for nearly incompressible materials [J]. Numer Math, 1983, 41: 39.

[3] Vogelius M. A right-inverse for the divergence operator in spaces of piecewise polynomials [J]. Numer Math, 1983, 41: 19.

- [4] 张敏, 罗颀, 张世全. 三维 Stokes 问题的一种非协调-协调有限元方法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 37.
- [5] Qin J. On the convergence of some low order mixed finite elements for incompressible fluids [D]. Philadelphia; Pennsylvania State University, 1994.
- [6] Zhang S. A new family of stable mixed finite elements for the 3D Stokes equations [J]. Math Comput, 2005, 74: 543.
- [7] Zhang S. A family of $Q^{k+1,k} \times Q^{k,k+1}$ divergence-free finite elements on rectangular grids [J]. SIAM J Num Anal, 2009, 47: 2090.
- [8] Zhang S. Quadratic divergence-free finite elements on Powell-Sabin tetrahedral grids [J]. Calcolo, 2011, 48: 211.
- [9] Olshanskii M A, Reusken A. Grad-Div stabilization for Stokes equations [J]. Math Comput, 2003, 73: 1699.
- [10] Gelhard T, Lube G, Olshanskii M A, *et al.* Stabilized finite element schemes with LBB-stable elements for incompressible flows [J]. J Comput Appl Math, 2005, 177: 243.
- [11] De Frutos J, Garciaarchilla B, John V, *et al.* Analysis of the grad-div stabilization for the time-dependent Navier-Stokes equations with inf-sup stable finite elements [J]. Adv Comput Math, 2018, 44: 195.
- [12] Rong Y, Fiordilino J A. Numerical analysis of a BDF2 modular grad-div stabilization method for the Navier-Stokes equations [J]. J Sci Comput, 2020, 82: 1.
- [13] Case M A, Ervin V J, Linke A, *et al.* A connection between Scott-Vogelius and Grad-Div stabilized Taylor-Hood FE approximations of the Navier-Stokes equations [J]. SIAM J Numer Anal, 2011, 49: 1461.
- [14] Linke A, Rebholz L G, Wilson N E. On the convergence rate of grad-div stabilized Taylor-Hood to Scott-Vogelius solutions for incompressible flow problems [J]. J Math Anal Appl, 2011, 381: 612.
- [15] 李开泰, 黄艾香, 黄庆怀. 有限元方法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [16] He Y, Li J. Convergence of three iterative methods based on the finite element discretization for the stationary Navier-Stokes equations [J]. Comput Methods Appl M, 2009, 198: 1351.
- [17] Wang K. Iterative schemes for the non-homogeneous Navier-Stokes equations based on the finite element approximation [J]. Comput Math Appl, 2016, 71: 120.

引用本文格式:

中文: 王炷霖, 敬璐如, 冯民富. 定常 Navier-Stokes 方程的三个梯度-散度稳定化 Taylor-Hood 有限元[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2021, 58: 041003.

英文: Wang Z L, Jing L R, Feng M F. Three Grad-Div stabilized Taylor-Hood finite elements for steady Navier-Stokes equation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 041003.