关于 Toeplitz 算子与复合算子在 Fock-Sobolev 空间上的乘积

秦 杰，王晓峰
(广州大学数学与信息科学学院，广州 510006)

摘 要：本文刻画了 Fock-Sobolev 空间$F^{2,m}$上以多项式为符号的 Toepliz 算子与复合算子的乘积的有界性,讨论了 Toepliz 算子与复合算子的交换性，得到了一些充分必要条件.

关键词：Fock-Sobolev 空间；复合算子；Toeplitz 算子
中图分类号：O177.1 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.031005

On the product of Toeplitz and composition operators on Fock-Sobolev spaces

QIN Jie, *WANG Xiao-Feng*
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: We characterize bounded ness of the product of Toeplitz and composition operators for two polynomials symbols on Fock-Sobolev spaces $F^{2,m}$. We also consider the commutativity of Toeplitz and composition operator and obtain several necessary and sufficient conditions.

Keywords: Fock-Sobolev space; Composition operator; Toeplitz operator
(2010 MSC 47B35; 475B32)

1 引 言

在本文中，**C** 表示复平面，dA 表示面积测度. Fock 空间F^2 的定义为

$$F^2=\{f\in H(\mathbf{C}):\|f\|_2^2=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{C}}|f(z)|^2\mathrm{e}^{-|z|^2}dA(z)<\infty\},$$

其中 $H(\mathbf{C})$为 **C** 上的整函数. 对任意的非负整数 m，定义 Fock-Sobolev 空间$F^{2,m}$为

$$F^{2,m}=\left\{f\in F^2:\sum_{k=0}^{m}\|f^{(k)}(z)\|_2^2<\infty\right\}.$$

Cho 和 Zhu[1] 证明了 $f\in F^{2,m}$ 当且仅当$z^m f\in F^2$. 由此，我们可以重新定义$F^{2,m}$. 定义L_m^2 是 **C** 上满足$z^m f\in L^2(\mathbf{C},\mathrm{e}^{-|z|^2}dA)$的所有可测函数 f 构成. 易知，L_m^2 是 Hilbert 空间，其内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathrm{C}}f(z)\overline{f(z)}\,|z|^{m}\mathrm{e}^{-|z|^2}dA(z),$$

其中 $f,g\in L_m^2$. 显然，$F^{2,m}$是L_m^2 的一个闭子空间. 因此，存在一个从L_m^2 到$F^{2,m}$上的正交投影 P，对任意 $f\in L_m^2$,其定义为

$$(Pf)(z)=\int_{\mathbf{C}}f(w)K_m(z,w)\,|w|^m\mathrm{e}^{-|w|^2}dA(w),$$

其中

$$K_m(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m!}{(k+m)!}(z\overline{w})^k$$

是$F^{2,m}$的再生核函数. $F^{2,m}$的一组标准正交基为

$$e_k(z)=\frac{m!}{(k+m)!}z^k,k=1,2,3,\cdots.$$

若 f 是 **C** 上的可测函数且满足

收稿日期：2020-09-08
基金项目：国家自然科学基金(11971125)
作者简介：秦杰(1992—)，男，重庆丰都人，博士，主要研究方向为算子理论. E-mail：qinjie24520@163.com
通讯作者：王晓峰. E-mail：wxf@gzhu.edu.cn

$$\int_{\mathbf{C}} |f(w)| \cdot |K_m(z,w)| \cdot |w|^m e^{-|w|^2} dA(w) < \infty,$$

则稠定义$F^{2,m}$上以 f 为符号的 Toeplitz 算子T_f 为

$$(T_f g)(z) = P(fg)(z), g \in F^{2,m}.$$

对任意整函数 φ 和h，复合算子C_φ 定义为

$$C_\varphi h(z) = h \circ \varphi.$$

我们定义$F^{2,m}$上的 Toeplitz 算子与复合算子的乘积为

$$T_f C_\varphi h = P(f \cdot h \circ \varphi),\ C_\varphi T_f h = P(fh) \circ \varphi.$$

若 f 是整函数，则$T_f C_\varphi$ 为加权复合算子. 许多数学家研究了 Fock 空间上的复合算子与加权复合算子，如 Carswell 等[2]第一次完全刻画了 Fock 空间上复合算子的紧性与有界性. Cho 等[3]将其结论推广了 Fock-Sobolev 空间上，并刻画复合算子的有限线性组合的紧性与有界性. Le[4] 和 Ueki[5] 研究了 Fock 空间上加权复合算子的有界性和紧性. Tien 和 Khoi[6]刻画了作用在两个不同的 Fock 空间上的复合算子的有界性. 关于加权 Fock 空间上的正 Toepliz、复合算子及 Volterra 积分算子，可参见文献[7-9].

关于两个 Toeplitz 算子在 Fock 空间上可交换的问题，Bauer 和 Lee[10]刻画了以径向函数为符号的 Toeplitz 算子在 Fock 空间上的交换性. 随后，Bauer 等[11]讨论了以多重调和函数为符号的 Toeplitz 算子在 Fock 空间上的交换性. 此外，Appuhamy 等[12]刻画了以可分离的径向多项式为符号的 Toeplitz 算子的换位子.

另外，算子乘积的有界性问题也已经被很多数学家讨论过，如 Mengestie[13]刻画了 Volterra 型积分算子与复合算子乘积的有界性和紧性，文献[14]研究了 Toeplitz 算子的乘积在 Bergman 空间上的有界性. 然而，Toeplitz 乘积在 Bergman 空间上的有界性问题直至现在仍未解决. 特别地，关于 Fock 空间上 Toeplitz 算子和复合算子乘积的有界性及 Toeplitz 算子与复合算子可交换的刻画，至今仍是空白.

定义

$$D = \{(f,\varphi): f(z) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_{ij} z^i \bar{z}^j, \varphi(z) = \sum_{k=1}^{K} b_k z^k, b_K \neq 0, N, M \geqslant 0, K \geqslant 1\},$$

$$D' = \{(f,\varphi): f(z) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_{ij} z^i \bar{z}^j, \varphi(z) = \sum_{k=1}^{K} b_k z^k, |b_K| \geqslant 1, N, M \geqslant 0, K \geqslant 1\}.$$

受上述研究的启发，我们首先讨论了以 D 中元素为符号的 Toeplitz 算子和复合算子乘积$C_\varphi T_f$ 与$T_f C_\varphi$ 在$F^{2,m}$上的有界性，进而给出了以 D'中元素为符号的乘积与在$F^{2,m}$上有界的充分必要条件. 然后我们刻画了以 D 中元素为符号的 Toeplitz 算子和复合算子可交换的充分必要条件.

2　Toeplitz 算子与复合算子的乘积

在本节中，我们讨论 Toeplitz 算子与复合算子的乘积的有界性.

引理 2.1　若 i 和 j 是两个非负整数，则

$$T_{z^i \bar{z}^j} e_k = \begin{cases} \dfrac{(k+i+m)!}{(k+i-j+m)!}\sqrt{\dfrac{(k+i-j+m)1}{(k+m)!}}\, e_{k+i-j}, \\ \qquad k \geqslant j-i, \\ 0, \quad 0 \leqslant k < j-i. \end{cases}$$

证明　直接计算可知

$$T_{z^i \bar{z}^j} e_k = \sqrt{\frac{m!}{(k+m)!}} \langle w^{i+k}\bar{w}^j, K_m(z,w)\rangle = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m!}{(k+m)!}} z^n \sqrt{\dfrac{m!}{(n+m)!}} \langle w^{i+k}\bar{w}^j, w^{j+n}\rangle, \\ \qquad i+k=n+j; \\ 0, \quad i+k \neq n+j. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(k+i+m)!}{(k+i-j+m)!}\sqrt{\dfrac{(k+i-j+m)1}{(k+m)!}}\, e_{k+i-j}, \\ \qquad k \geqslant j-i; \\ 0, \quad 0 \leqslant k < j-i. \end{cases}$$

证毕.

若 f 是关于 z 和 $\bar{z}$ 的多项式，则存在非负整数 M 和 N，使得

$$f(z) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_{ij} z^i \bar{z}^j,$$

其中$\{a_{ij}\}$是一个常值序列. 令

$$n_0 = \min\{n = i-j : a_{ij} \neq 0, 0 \leqslant i \leqslant N, 0 \leqslant j \leqslant M\},$$

$$n_1 = \max\{n = i-j : a_{ij} \neq 0, 0 \leqslant i \leqslant N, 0 \leqslant j \leqslant M\}.$$

f 有拟齐次展式

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{n_1} f_n(z,\bar{z}),$$

其中

$$f_n(z,\bar{z}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{M} c_j z^{j+n} \bar{z}^j, & n \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{N} d_i z^i \bar{z}^{i-n}, & n < 0, \end{cases}$$

这里$\{c_j\}$和$\{d_i\}$为常值序列. 显然，当 f 中所有满足 $i-j=n$ 的项之和为 0 时，$f_n = 0$. 由f_n 的定

义，当 $n\geqslant 0$ 时 f_n 和 $\sum\limits_{j=0}^{M} c_j z^{j+n}\bar{z}^j$ 有相似的结构；当 $n<0$ 时 f_n 与 $\overline{\sum\limits_{i=0}^{N} d_i z^i \bar{z}^{i-n}}$ 有相似的结构. 因此，在后文中我们总假设 $n\geqslant 0$.

引理 2.2　设 n,k,N 是有限非负整数. 令

$$f(z)=\sum_{j=0}^{N} a_j z^{i+n}\bar{z}^i,\quad \varphi(z)=\sum_{k=0}^{K} b_k z^k,$$

其中 $a_N\neq 0, b_K\neq 0$. 若 $T_f C_\varphi$ 或 $T_{\bar f} C_\varphi$ 有界，则 $k\geqslant 1$. 此外，若 $k=1$，则 $|b_1|\leqslant 1$；若 $k=|b_1|=1$，则 $N=n=0$.

证明　若 $k=0$，则 φ 为常值函数. 令 $\varphi=c$，其中 $\mathbf{C}$ 为常值. 易知 $T_f C_\varphi g=g(c)\cdot P(f)$. 由于全纯多项式全体在 $F^{2,m}$ 中稠密，$T_f C_\varphi$ 有界. 同理，当 $k=0$ 时 $T_{\bar f} C_\varphi$ 有界. 故我们假设 $k\geqslant 1$.

若 $T_f C_\varphi$ 有界，则由引理 2.1，对任意非负整数 l 有

$$T_f C_\varphi e_l=\sum_{i=0}^{N} a_i\sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}\,T_{z^{i+n}\bar{z}^i}\Big(\sum_{k=0}^{K} b_k z^k\Big)^l=$$
$$\sum_{i=0}^{N} a_i b_k{}^l\sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}\,T_{z^{i+n}\bar{z}^i}z^{Kl}+Q=$$
$$\sum_{i=0}^{N} a_i b_k{}^l\sqrt{\frac{(Kl+n+m)!}{(l+m)!}}\cdot$$
$$\frac{(Kl+i+n+m)!}{(Kl+n+m)!}e_{Kl+n}+Q,$$

这里

$$Q=T_f C_\varphi e_l-\sum_{i=0}^{N} a_i b_k^l\sqrt{\frac{(Kl+n+m)!}{(l+m)!}}\cdot$$
$$\frac{(Kl+i+n+m)!}{(Kl+n+m)!}e_{Kl+n}.$$

利用单项的正交性，Q 与 $\sum\limits_{i=0}^{N} a_i b_k^l\cdot\sqrt{\dfrac{(Kl+n+m)!}{(l+m)!}}\dfrac{(Kl+i+n+m)!}{(Kl+n+m)!}e_{Kl+n}$ 正交. 则

$$\|T_f C_\varphi e_l\|_{2,m}^2\geqslant\Big\|\sum_{i=0}^{N} a_i b_k^l\sqrt{\frac{(Kl+n+m)!}{(l+m)!}}\cdot$$
$$\frac{(Kl+i+n+m)!}{(Kl+n+m)!}e_{Kl+n}\Big\|_2^2.$$

记

$$g(z)=\sum_{i=0}^{N} a_i b_k^l\sqrt{\frac{(Kl+n+m)!}{(l+m)!}}\cdot$$
$$\frac{(Kl+i+n+m)!}{(Kl+n+m)!}e_{Kl+n}.$$

利用 Stirling 公式有

$$\sqrt{\frac{(Kl+n+m)!}{(l+m)!}}\frac{(Kl+i+n+m)!}{(Kl+n+m)!}\sim$$
$$\frac{K^{\frac{Kl}{2}}l^{\frac{(K-1)l+n}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{(K-1)l}{2}}}\frac{(Kl+i+n+m)!}{(Kl+n+m)!}\sim$$
$$\frac{K^{\frac{Kl}{2}}l^{\frac{(K-1)l++2i+n}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{(K-1)l}{2}}}K^{\frac{Kl}{2}}e^{\frac{(K-1)l+2i+n}{2}\ln l-\frac{(K-1)l}{2}},$$

这里 $\sim$ 表示当 $l\to\infty$ 时两项之商有有限正极限. 由 $a_N\neq 0, b_K\neq 0$，我们有

$$\|T_f C_\varphi e_l\|_{2,m}^2\geqslant\|g\|_{2,m}^2\sim$$
$$|a_N b_K^l|\sqrt{\frac{(Kl+n+m)!}{(l+m)!}}\frac{(Kl+i+n+m)!}{(Kl+n+m)!}\sim$$
$$|a_N b_K^l|K^{\frac{Kl}{2}}e^{\frac{(K-1)l+2i+n}{2}\ln l-\frac{(K-1)l}{2}}=$$
$$|a_N b_K^l|K^{\frac{Kl}{2}}e^{\frac{(K-1)l}{2}(\ln l-1)+\frac{2N+n}{2}\ln l+l\ln|b_K|}=$$
$$|a_N b_K^l|K^{\frac{Kl}{2}}e^{l(\frac{(K-1)}{2}(\ln l-1)+\ln|b_K|)+\frac{2N+n}{2}\ln l}.$$

易知当 $K\geqslant 1$ 时，$\dfrac{(K-1)}{2}(\ln l-1)+\ln|b_K|\to\infty$，$l\to\infty$. 因此 $K\leqslant 1$. 若 $K=1$，则有

$$\|T_f C_\varphi e_l\|_{2,m}^2\geqslant$$
$$\|g\|_{2,m}^2\sim|a_N|\mathrm{e}^{l\ln|b_K|+\frac{2N+n}{2}\ln l}.$$

进而 $|b_1|\leqslant 1$. 如果 $k=|b_1|=1$. 则 $N=n=0$.

另一方面，假设 $T_{\bar f} C_\varphi$ 有界，当 $l\geqslant n$ 时，我们有

$$T_{\bar f} C_\varphi e_1=\sum_{i=0}^{N}\overline{a_i}\sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}\,T_{\bar{z}^{i+n}z^i}\Big(\sum_{k=0}^{K} b_k z^k\Big)^l=$$
$$\sum_{i=0}^{N}\overline{a_i}b_k^l\sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}\,T_{\bar{z}^{i+n}z^i}z^{Kl}+E=$$
$$\sum_{i=0}^{N}\overline{a_i}b_k^l\sqrt{\frac{(Kl-n+m)!}{(l+m)!}}\cdot$$
$$\frac{(Kl+i+m)!}{(Kl-n+m)!}e_{Kl-n}+E,$$

其中

$$E=T_f C_\varphi e_l-$$
$$\sum_{i=0}^{N}\overline{a_i}b_k^l\sqrt{\frac{(Kl-n+m)!}{(l+m)!}}$$
$$\frac{(Kl+i+m)!}{(Kl-n+m)!}e_{Kl-n}.$$

显然，E 与 $\sum\limits_{i=0}^{N}\overline{a_i}\;b_k^l\sqrt{\dfrac{(Kl-n+m)!}{(l+m)!}}\cdot\dfrac{(Kl+i+m)!}{(Kl-n+m)!}e_{Kl-n}$ 正交. 由 Stirling 公式，

$$\sqrt{\frac{(Kl-n+m)!}{(l+m)!}}\frac{(Kl+i+m)!}{(Kl-n+m)!}\sim$$
$$\frac{K^{\frac{Kl}{2}}l^{\frac{(K-1)l-n}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{(K-1)l-n}{2}}}\frac{(Kl+i+m)!}{(Kl-n+m)!}\sim$$

$$K^{\frac{Kl}{2}}e^{\frac{(K-1)l-n}{2}(\ln l-1)+(n+i)\ln l}.$$

因此,

$$\| T_{\bar{f}}C_{\varphi}e_l \|_{2,m} \geqslant$$

$$\left| \sum_{i=0}^{N} \overline{a_i}\, b_k^l \sqrt{\frac{(Kl-n+m)!}{(l+m)!}}\, \frac{(Kl+i+m)!}{(Kl-n+m)!} \right| \sim$$

$$|a_N b_K^l| K^{\frac{Kl}{2}}\ e^{\frac{(K-1)l-n}{2}(\ln l-1)+-(n+i)\ln l} =$$

$$|a_N b_K^l| K^{\frac{Kl}{2}}\ e^{\frac{(K-1)l-n}{2}(\ln l-1)+(n+N)\ln l+l\ln|b_k|} \sim$$

$$|a_N b_K^l| K^{\frac{Kl}{2}}\ e^{l(\frac{(K-1)}{2}(\ln l-1)+\ln|b_K|)+\frac{2N+n}{2}\ln l}.$$

若$T_{\bar{f}}C_{\varphi}$有界, 则 $k\leqslant 1$. 同时,由第一部分的证明可知: 若 $k=1$, 则 $|b_1|\leqslant 1$; 若 $k=|b_1|=1$, 则 $N=n=0$. 证毕.

命题 2.3　设$(f,\varphi)\in D$且 f 为一个不恒为 0 的函数. 若 $T_f C_{\varphi}$ 有界, 则 $\varphi(z)=b_1 z$, 其中 $|b_1|\leqslant 1$.

证明　因为$(f,\varphi)\in D$ 且 f 是一个不恒为 0 的函数,我们有

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{K} b_k z^k,\ f(z)=\sum_{n=n_0}^{n_1} f_n(z,\bar{z}),$$

其中b_K, f_{n_0}, f_{n_1}均不为 0. 对任意非负正整数 l, 由引理 2.1 得

$$T_f C_{\varphi}e_l=\sum_{n=n_0}^{n_1} T_{f_n(z,\bar{z})}C_{\varphi}e_l=$$

$$\sum_{n=n_0}^{n_1}\sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}\ T_{f_n}\left(\sum_{k=1}^{K} b_k z^k\right)^l=$$

$$\sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}\ T_{f_1}\ b_K^l z^{Kl}+G,$$

其中

$$G=T_f C_{\varphi}e_l-\sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}T_{f_1}b_K^l z^{Kl}=$$

$$T_f C_{\varphi}e_l-b_K^l\sqrt{\frac{(Kl+m)!}{(l+m)!}}T_{f_1}e_{Kl}.$$

若$n_0=n_1$, 则 $f=f_{n_1}$. 由于单项的正交性, G 与 $b_K^l\sqrt{\frac{(Kl+m)!}{(l+m)!}}T_{f_1}e_{Kl}$正交. 因而

$$\| T_{\bar{f}}C_{\varphi}e_l \|_{2,m}\geqslant \| b_K^l\sqrt{\frac{(Kl+m)!}{(l+m)!}}T_{f_1}e_{Kl} \|_{2,m}.$$

不失一般性, 令

$$f_{n_1}(z,\bar{z})=\sum_{i=0}^{N} a_i z^{i+n_1}\bar{z}^i,\ a_N\neq 0.$$

简单计算可得

$$\sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}\ T_{f_1}\ b_K^l z^{Kl}=$$

$$b_K^l\sum_{i=0}^{N} a_i\sqrt{\frac{(Kl+n_1+m)!}{(l+m)!}}\cdot$$

$$\frac{(Kl+i+n_1+m)!}{(Kl+n_1+m)!}e_{Kl+n_1}.$$

由引理 2.2,若 $k=1$, 则$|b_1|\leqslant 1$;若 $k=|b_1|=1$, 则 $N=n=0$.

若$n_0\neq n_1$, 则对任意的$n\neq n_1$有 $T_{f_1}b_K^l z^{Kl}$与 $T_{f_n}b_K^l z^{Kl}$正交,故

$$\| T_{\bar{f}}C_{\varphi}e_l \|_{2,m}\geqslant \| b_K^l\sqrt{\frac{(Kl+m)!}{(l+m)!}}T_{f_1}e_{Kl} \|_{2,m}.$$

同理,由引理 2.2,若 $k=1$, 则 $|b_1|\leqslant 1$; 若 $k=|b_1|=1$, 则$n_1=0$ 且f_0 为常值函数. 证毕.

定理 2.4　设$(f,\varphi)\in D'$,则$T_f C_{\varphi}$ 在$F^{2,m}$上有界当且仅当下列条件之一成立:

(i) $f\equiv 0$;

(ii) f 为非零常数函数且 $\varphi(z)=b_1 z$, 其中 $|b_1|=1$.

证明　充分性显然,下证必要性. 若 $f\equiv 0$,则 $T_f C_{\varphi}\equiv 0$. 在此情形下,$T_f C_{\varphi}$ 显然有界. 故假设 f 是一个不恒为 0 的常数. 由命题 2.3 可得: $\varphi(z)=b_1 z$, $|b_1|\leqslant 1$. 由于$(f,\varphi)\in D'$,则$|b_1|=1$. 令

$$f(z)=\sum_{n=n_0}^{n_1} f_n(z,\bar{z}),$$

其中$f_{n_0} f_{n_1}$ 均不为 0. 利用命题 2.3 第一部分的证明得当$n_0=n_1$ 时 $f(z)=f(0)$.

若$n_0\neq n_1$,由命题 2.3 第一部分的证明可知$n_1=0$且f_0 为常值函数. 则

$$\varphi(z)=b_1 z,\ f(z)=\sum_{n=n_0}^{0} f_n(z,\bar{z}).$$

由引理 2.1 有

$$T_{f_n}C_{b_1 z}z^l\in \mathrm{Span}\{e_{l+n}\},n_0\leqslant n<0.$$

则$T_{f_n}C_{b_1 z}e_l$ 与$T_{f_n}C_{b_1 z}e_l-T_{f_0}C_{b_1 z}e_l$ 正交. 因此, 我们有

$$\| T_f C_{\varphi}e_l \|_{2,m}^2\geqslant \| b_K^l\sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}T_{f_0}z^l \|_{2,m}^2.$$

由引理 2.2 知f_{n_0}为常值函数. 即 f 为常值函数. 证毕.

接下来我们讨论$C_{\varphi}T_f$ 的有界性. 我们有以下引理.

引理 2.5　设 K 是正整数, n 与 N 是有限非负整数. 令

$$f(z)=\sum_{i=0}^{N} a_i z^{i+n}\bar{z}^i,\quad \varphi(z)=\sum_{k=0}^{K} b_k z^k,$$

其中$a_N\neq 0$, $|b_K|\geqslant 1$. 则$C_{\varphi}T_f$ 或$C_{\varphi}T_{\bar{f}}$有界当且仅当 f 是非零常值函数, $\varphi(z)=b_1 z$, 其中 $|b_1|=1$.

证明　充分性显然，下证必要性. 假设$C_\varphi T_f$有界. 对任意的非负正整数 l,我们有

$$C_\varphi T_f e_l = C_\varphi\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i T_{z^{i+n}\bar{z}^i} e_l\Big) =$$

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \sqrt{\frac{m!}{(l+m)!}}\,\frac{(l+n+i+m)!}{(l+n+m)!} C_\varphi z^{l+n} =$$

$$\sum_{i=0}^{N} a_i b_K^{l+n} \sqrt{\frac{(K(l+n)+m)!}{(l+m)!}}\cdot$$

$$\frac{(l+n+i+m)!}{(l+n+m)!} e_{K(l+n)} + Q.$$

易知 Q 与$(C_\varphi T_f e_l - Q)$正交. 由 Stirling 公式，

$$\sqrt{\frac{(K(l+n)+m)!}{(l+m)!}}\,\frac{(l+n+i+m)!}{(l+n+m)!} \sim$$

$$K^{\frac{Kl}{2}} \mathrm{e}^{\frac{(K-1)l+Kn}{2}(\ln l - 1) + i\ln l}.$$

故

$$\| C_\varphi T_f e_l \|_{2,m} \geqslant \| C_\varphi T_f e_l - Q \|_{2,m} \sim$$

$$a_N b_K^{l+n} K^{\frac{Kl}{2}} \mathrm{e}^{\frac{(K-1)l+Kn}{2}(\ln l - 1) + N\ln l}.$$

因为 $\| C_\varphi T_f e_l \|_{2,m}$ 有限，所以 $k = |b_1| = 1$ 且 $N = n = 0$. 由于$a_N \neq 0$,则 f 是非零常值函数且 $\varphi(z) = b_1 z$，其中$|b_1| = 1$.

假设$C_\varphi T_{\bar f}$有界. 同样可得 f 是非零常值函数且 $\varphi(z) = b_1 z$，其中$|b_1| = 1$. 证毕.

定理 2.6　设 $C_\varphi T_f$ 在 $F^{2,m}$上有界当且仅当下列条件之一成立：

(i) $f \equiv 0$；

(ii) f 为非零常数函数且 $\varphi(z) = b_1 z$，其中$|b_1| = 1$.

证明　证明与定理 2.4 的证明类似，略.

3　复合算子与 Toeplitz 算子的交换性

在本节中,我们将讨论以 D 中元素为符号的复合算子与 Toeplitz 算子的交换性.

引理 3.1　设$(f,\varphi) \in D$. 若$C_\varphi T_f = T_f C_\varphi$,则 $\varphi(z) = z$ 或$\bar f$ 是全纯多项式.

证明　由$C_\varphi T_f = T_f C_\varphi$ 易知$C_\varphi T_f 1 = T_f C_\varphi 1 = T_f 1$. 则

$$(I - C_\varphi) T_f 1 = 0 \tag{1}$$

不失一般性，

$$T_f 1 = \sum_{i=0}^{M} a_i z^i, \varphi(z) = \sum_{k=1}^{K} b_k z^k,$$

其中 N 和 K 都是非负整数. 由(1)式得

$$\sum_{i=0}^{M} a_i z^i = \sum_{i=0}^{M} a_i \Big(\sum_{i=0}^{M} b_k z^k\Big)^i.$$

故$a_M z^M = a_M b_K^M z^M$. 因为$b_K \neq 0$,则$b_K = K = 1$ 或 $a_M = 0$. 若$a_M \neq 0$,则 $\varphi(z) = z$. 若$a_M = 0$,则

$$\sum_{i=0}^{M-1} a_i z^i = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \Big(\sum_{i=0}^{M} b_k z^k\Big)^i.$$

比较 z^{M-1} 和 $z^{K(M-1)}$ 的系数可知 $a_{M-1} z^{M-1} = a_{M-1} b^{M-1}{}_K z^{M-1}$. 进而 $K = b_K = 1$ 或$a_{M-1} = 0$. 从而当 $K \neq 1$ 时,$a_1 = a_2 = \cdots = a_M = 0$. 这表明 $\varphi(z) = z$ 或 f 是全纯多项式.

证明本节的主要结论需要以下引理.

引理 3.2　设 K 是一个正整数. 令

$$f(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i \bar{z}^i, \varphi(z) = \sum_{k=1}^{K} b_k z^k,$$

其中 $N > K \geqslant 1$. 则$C_\varphi T_f = T_f C_\varphi$ 当且仅当下列条件之一成立：

(i) f 为常值函数；

(ii) $\varphi(z) = z$.

证明　充分性显然，下证必要性. 假设$C_\varphi T_f = T_f C_\varphi$. 则对任意的非负整数 l 有

$$C_\varphi T_f z^l = T_f C_\varphi z^l.$$

故

$$\sum_{i=0}^{l} a_i \frac{(l+m)!}{(l-i+m)!} \Big(\sum_{i=0}^{M} b_k z^k\Big)^{l-i} =$$

$$\sum_{i=0}^{M} a_i \Big(\sum_{i=0}^{M} b_k z^k\Big)^l \tag{2}$$

当 $l = 1$ 时，

$$\sum_{k=0}^{K} a_0 b_k z^k + a_1(m+1) =$$

$$\sum_{k=0}^{K} \sum_{i=0}^{k} a_i b_k \frac{(k+m)!}{(k-i+m)!} z^{k-i}.$$

化简可得

$$a_1(m+1)(1-b_1) =$$

$$\sum_{k=2}^{K} \sum_{i=1}^{k} a_i b_k \frac{(k+m)!}{(k-i+m)!} z^{k-i} \tag{3}$$

对照系数可知

$$a_1 b_K z^{K-1} = 0,$$

$$\Big(a_2 b_K \frac{(K+m)!}{(K-2+m)!} +$$

$$a_1 b_{K-1} \frac{(K-1+m)!}{(K-2+m)!}\Big) z^{K-2} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{K-1} a_{K-i} b_{K-i+1} \frac{(K-i+1+m)!}{(1+m)!} z = 0 \tag{4}$$

故$a_1 b_K = 0$. 考虑以下 3 种情况.

情形 1　$a_1 \neq 0$. 由(3)和(4)式可得 $b_2 = b_3 = \cdots = b_K = 0, b_1 = 1$.

即 $\varphi(z)=z$.

情形 2 $a_1=0, b_K\neq 0$. 由(3)和(4)式可得

$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_K=0.$$

因此

$$f(z)=a_0+\sum_{i=K+1}^{N} a_i\bar{z}^i.$$

令 $l=N$ 并代入(2)式有

$$\sum_{i=K+1}^{N} a_i\frac{(N+m)!}{(N-i+m)!}\left(\sum_{k=0}^{K} b_k z^k\right)^{N-i}=\sum_{i=K+1}^{N} a_i T_{\bar{z}^i}\left(\sum_{i=0}^{K} b_k z^k\right)^{N}.$$

考虑两边的最高次数得

$$a_{K+1}b_K^{K(N+K-1)}z^{K(N+K-1)}=a_{K+1}b_K^{KN}\frac{(KN+m)!}{(KN-K-1+m)!}z^{KN-K-1}.$$

由上述等式可知 $K=1$ 或 $a_{K+1}=0$. 如果 $K\neq 1$，我们考虑 $z^{K(N+K-2)}$ 与 z^{KN-K-1} 的系数. 同理可得 $a_{K+2}=0$. 类似可得当 $K\neq 1$ 时，

$$a_1=a_2=\cdots=a_N=0.$$

如果 $K=1$ 且 $a_{K+1}\neq 0$，则 $b_1=1$，即 $\varphi(z)=z$. 如果 $K=1, a_{K+1}=0$ 且 $N=2$，结论得证. 若 $N\geqslant 2$，我们考虑 z^{N-3} 的系数，类似可得 $a_3 b_1^{N-3}=a_3 b_1^N$. 上式蕴涵 $a_3=0$ 或者 $b_1=1$，即 $a_3=0$ 或 $\varphi(z)=z$. 类似可知 f 为常值函数或 $\varphi(z)=z$.

情形 3 $a_1=b_K=0$. (4)式可化简为

$$\sum_{k=2}^{K}\sum_{i=2}^{k} a_i b_k\frac{(k+m)!}{(k-i+m)!}z^{k-i}=0.$$

故 $a_2 b_{K-1}z^{K-3}=0$. 由情形 $a_1 b_K=0$ 的证明可知 f 为常值函数或 $\varphi(z)=z$. 证毕.

引理 3.3 设 K 是一个正整数. 令

$$f(z)=\sum_{i=0}^{N} a_i\bar{z}^i,\quad \varphi(z)=\sum_{k=1}^{K} b_k z^k,$$

其中 $N\leqslant K$. 则 $C_\varphi T_f=T_f C_\varphi$ 当且仅当下列条件之一成立：

(i) f 为常值函数；

(ii) $\varphi(z)=z$.

证明 假设 $C_\varphi T_f=T_f C_\varphi$. 则当 $l=1$ 时有

$$a_1(m+1)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{\min\{k,N\}} a_i b_k\frac{(k+m)!}{(k-i+m)!}z^{k-i},\quad l=1.$$

若 $N=0$，则结论成立. 下设 $1\leqslant N\leqslant K$. 对照系数可知

$$a_1 b_K z^{K-1}=0,$$

$$\left(a_2 b_K\frac{(K+m)!}{(K-2+m)!}+a_1 b_{K-1}\frac{(K-1+m)!}{(K-2+m)!}\right)z^{K-2}=0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} a_{N-i} b_{K-i+1}\frac{(K-i+1+m)!}{(K-N+1+m)!}z^{K-N+1}=0.$$

由引理 3.2 的证明可知 f 为常值函数或 $\varphi(z)=z$.

引理 3.4 设 $(f,\varphi)\in D$. 则 $C_\varphi T_f=T_f C_\varphi$ 当且仅当下列条件之一成立：

(i) f 为常值函数；

(ii) $\varphi(z)=z$.

证明 充分性显然. 利用引理 3.1，3.2 及 3.3，必要性得证.

参考文献：

[1] Cho H R, Zhu K. Fock-Sobolev spaces and their Carleson measures [J]. J Funct Anal, 2012, 263: 2483.

[2] Carswell B J, MacCluer B D, Schuster A. Composition operators on the Fock space [J]. Acta Sci Math, 2003, 69: 871.

[3] Cho H R, Choe B R, Koo H. Linear combinations of composition operators on the Fock-Sobolev spaces [J]. Potential Anal, 2014, 41: 1223.

[4] Le T. Normal and isometric weighted composition operators on the Fock space [J]. B London Math Soc, 2014, 46: 847.

[5] Ueki S. weighted composition operators on the Fock space [J]. Proc Amer Math Soc, 2007, 135: 1405.

[6] Tien P T, Khoi L H. Weighted composition operators between different Fock spaces [J]. Potential Anal, 2019, 50: 171.

[7] 简舒曼，王晓峰，夏锦. Doubling Fock 空间之间的正 Toeplitz 算子[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：225.

[8] 罗小娟，王晓峰，夏锦. 广义 Fock 空间之间的 Volterra 型积分算子与复合算子的乘积[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：32.

[9] Tan P L, Kho L H. Bounded composition operators on general weighted hardy spaces [J]. Complex Anal Oper Theory, 2020, 14: 54.

[10] Bauer W, Lee Y J. Commuting Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space [J]. J Funct Anal, 2011, 260: 460.

[11] Bauer W, Choe B R, Koo H. Commuting Toeplitz operators with pluriharmonic symbols on the Fock space [J]. J Funct Anal, 2015, 268: 3017.

[12] Appuhamy A, Le T. Commutants of Toeplitz oper-

ators with separately radial polynomial symbols [J]，Complex Anal Oper Theory，2016，10：1.

[13] Mengestie T. Product of Volterra type integral and composition operators on weighted fock spaces [J]. J Geom Anal，2014，24：740.

[14] Aleman A，Pott S，Reguer，C. Sarason conjecture on the Bergman space [J]. Int Math Res Not IMRN，2017，14：4320.

引用本文格式：

中　文：秦杰，王晓峰. 关于 Toeplitz 算子与复合算子在 Fock-Sobolev 空间上的乘积[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：031005.

英　文：Qin J，Wang X F. On the product of Toeplitz and composition operators on Fock-Sobolev spaces [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2021，58：031005.