

反向 II 型 fold-fold 的正则化系统的动力学分析

方之昊, 陈兴武

(四川大学数学学院, 成都 610064)

摘要: Sotomayor 和 Teixeira 提出了一种可以将逐段光滑系统解析化的方法, 即 S-T 正则化, 本文研究具有反向 II 型 fold-fold 的逐段光滑系统的正则系统动力学. 在散度非退化时, 本文证明了正则系统的平衡点要么为结点, 要么为焦点, 进而证明了焦点的阶数与稳定性随着参数变化而改变, 并给出了参数空间中的退化焦点曲线. 最后本文讨论了焦点阶数对正则函数的依赖关系.

关键词: 逐段光滑系统; 切点; 正则化; Hopf 分岔

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2021.051002

Dynamical analysis of a fold-fold regularized system of type-II with reverse direction

FANG Zhi-Hao, CHEN Xing-Wu

(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Sotomayor and Teixeira proposed a method to regularize piecewise smooth systems, namely, S-T regularization. We study dynamical behaviors of a fold-fold regularized system of type-II with reverse direction. With the non-degenerate condition of divergence, we prove that the equilibrium of regularized system is either a node or a focus. Moreover, the order and stability of the focus vary with the parameters, and give the degenerate curve of the focus. Finally, we discuss the dependency of the order of the focus on the regularized function.

Keywords: Piecewise smooth system; Tangent point; Regularization; Hopf bifurcation
(2010 MSC 37G10)

1 引言

平面逐段光滑系统被广泛地应用于建筑、机械、电网等领域^[1-5], 它的研究是微分动力系统研究热点之一. 本文利用 S-T 正则化方法来构造反向 II 型 fold-fold 逐段光滑系统的正则系统. 这类逐段光滑系统有一个焦点, 且在一定条件下会在参数扰动时产生一个极限环, 类似于解析系统中的 Hopf 分岔. 本文给出了正则系统在双参数扰动下

的局部动力学行为, 指出正则系统的平衡点要么为结点, 要么为焦点, 且焦点的稳定性和阶数会随着参数变化而变化. 这就导致 Hopf 分岔的发生.

考虑一个有如下形式的平面系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{cases} X^+(x, y), & y > 0, \\ X^-(x, y), & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\dot{x} := dx/dt$ 且

$$X^\pm(x, y) = (P^\pm(x, y), Q^\pm(x, y))^T$$

为定义在 \mathbf{R}^2 上的光滑向量场. 我们称系统(1)为一

收稿日期: 2020-11-03

基金项目: 国家自然科学基金(11471228)

作者简介: 方之昊, 男, 硕士研究生, 主要研究方向为微分方程与动力系统. E-mail: fangzhihao010@gmail.com

个逐段光滑系统, $y=0$ 为切换流形 Σ , 并且系统

$$\dot{x} = P^+(x, y), \dot{y} = Q^+(x, y) \quad (2)$$

为上子系统, 系统

$$\dot{x} = P^-(x, y), \dot{y} = Q^-(x, y) \quad (3)$$

为下子系统.

Filippov^[6] 针对此类系统做出了大量的研究和总结, 其成果被后人称为 Filippov 约定. 对于切换流形 Σ 上任意一点 $p: (x, 0)$, 定义

$$H(x) := Q^+(x, 0)Q^-(x, 0).$$

如果 $H(x) > 0$, 则上、下子系统在 p 处的向量场垂直分量是同号的. 此时, 若上子系统的轨道趋向(远离) Σ , 那么下子系统的轨道就会远离(趋向) Σ . 逐段光滑系统(1)的轨道会在 p 处穿过切换流形 Σ , 因此我们称集合 $\Sigma_c := \{(x, 0) \mid H(x) > 0\}$ 为穿越区域. 如果 $H(x) < 0$, 则上下子系统在 p 处的向量场垂直分量是异号的. 此时, 若上子系统的轨道趋向(远离) Σ , 那么下子系统的轨道同样是趋近(远离) Σ 的. 我们称

$$X_s(x, 0) := \left(\frac{Q^-(x, 0)P^+(x, 0) - Q^+(x, 0)P^-(x, 0)}{Q^-(x, 0) - Q^+(x, 0)}, 0 \right)^T \quad (4)$$

为定义在 $\Sigma_s := \{(x, 0) \mid H(x) < 0\}$ 上的滑行向量场, 并称 Σ_s 为滑行区域.

如果 $H(x) = 0$, 则 p 要么是某子系统的平衡点, 要么是某个子系统的切点. 若是前者, 我们称 p 是逐段光滑系统(2)的边界平衡点; 若是后者, 我们称 p 为逐段光滑系统(1)的切点. 不失一般性, p 固定为原点 $(0, 0)$. 假设 $(0, 0)$ 是一个切点. 若

$$Q_x^+(0, 0)P^+(0, 0) < 0,$$

$$Q_x^-(0, 0)P^-(0, 0) > 0,$$

则称切点 $(0, 0)$ 是逐段光滑系统(1)的一个 fold-fold. 若进一步有

$$P^+(0, 0) > 0, P^-(0, 0) < 0,$$

则称切点 $(0, 0)$ 是逐段光滑系统(1)的一个反向 II 型 (Invisible-Invisible) 型 fold-fold. 如图 1 所示.

在本文中, 我们假设 $(0, 0)$ 是逐段光滑系统(1)的反向 II 型 fold-fold. 由文献[7]提出的正则化理论, 逐段光滑系统(1)有如下形式的正则系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(1 + \varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right) \right) X^+(x, y) + \frac{1}{2} \left(1 - \varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right) \right) X^-(x, y) \quad (5)$$

其中 $0 < \epsilon \ll 1$,

$$\varphi(s) := \begin{cases} 1, & s \geq 1, \\ -1, & s \leq -1. \end{cases}$$

当 $s \in (-1, 1)$ 时, $\varphi(s) \in (-1, 1), \varphi'(s) > 0$. 我们将 $\varphi(s)$ 称为正则函数. 对于任意的正则函数 $\varphi(s)$, 我们总可以构造 $\{\varphi(s) - \varphi(-s)\}/2$ 为新的正则函数, 因此不妨假设正则函数 $\varphi(s)$ 为一个奇函数. 可以看出, 当 $|y| \geq \epsilon$ 时, 正则系统(5)的向量场与逐段光滑系统(1)的向量场是一样的, 而在带状区域 $R := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ 中正则系统(5)则由上下子系统通过 $\varphi(s)$ 以线性组合的形式而构成. 除此之外, 带状区域 R 会随着 $\epsilon \rightarrow 0$ 不断缩小.

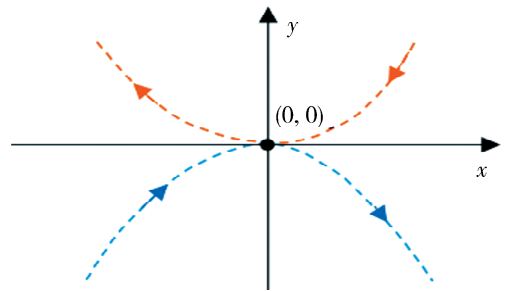


图 1 蓝色(橘色)虚线表示上(下)子系统轨道(线上彩色)
Fig. 1 The blue (orange) dot curve denotes the orbit of upper(lower) subsystem(color online)

文献[8]发现了正则系统的快慢结构, 文献[9]发现了快慢系统的临界流形和慢子系统向量场分别与滑行区域和滑行向量场是微分同胚的. 随后, 文献[10]研究了 Saddle-fold 类型的正则系统并给出分岔图. 文献[11]在某非退化条件下给出了反向 II 型 fold-fold 正则系统的焦点量对正则函数 $\varphi(s)$ 的依赖关系并进一步给出 Hopf 分岔曲线. 文献[12]研究了反向 II 型 fold-fold 为 0.5 阶细焦点时正则系统的动力学. 本文根据散度 $(\text{div}(P^+, Q^+) + \text{div}(P^-, Q^-))|_{(0,0)}$ 的不同情况研究具有反向 II 型 fold-fold 的逐段光滑系统(1)所对应的正则系统(5)及其扰动系统的动力学行为.

我们在第 2 节中给出了一些预备知识及本文的主要结果, 并在第 3 节中给出其证明. 在第 4 节中, 我们结合例子对主要结果给出一些重要注释.

2 预备知识与主要结果

对于任意一点 $p: (x, y) \in \mathbf{R}^2$, 如文献[6]定义集合

$$F(p) := \begin{cases} \{\lambda X^+(p) + (1-\lambda)X^-(p) | \\ \lambda \in [-1, 1]\}, y=0, \\ \{X^+(p)\}, y>0, \\ \{X^-(p)\}, y<0. \end{cases}$$

可知, 当 $p \in \Sigma$ 时, $F(p)$ 是一个闭凸集. 由文献 [6], 一个绝对连续函数 $\psi(t)$ 若几乎处处满足微分包含式 $\psi'(t) \in F(\psi(t))$ 则称为逐段光滑系统 (1) 的解. 从而逐段光滑系统 (1) 有一个解 $\psi(t) = (0, 0)$. 然而, 对任意初值点 $(x_0, 0), x_0 > 0$, 其正向轨道先位于下半平面并且与 Σ 相交于 $(x_1, 0), x_1 < 0$, 随后进入上半平面, 与 Σ 相交于 $(x_2, 0), x_2 > 0$. 为了更精确地描述这一现象并且方便计算, 我们根据文献 [6, 13] 定义庞加莱返回映射 $P(x)$ 的等价形式. 当 $x_1 \in (-\infty, 0)$ 时, 定义两个函数

$$\sigma^+(x_1) := x_2, \sigma^-(x_1) := x_0,$$

并且当 $x_{0,2} \in [0, +\infty)$ 时定义

$$\sigma^+(x_2) := x_1, \sigma^-(x_0) := x_1, \sigma^\pm(0) := 0.$$

那么在 Σ 上, 等价形式被定义为

$$P(x) := \sigma^+(x) - \sigma^-(x).$$

进一步, 由文献 [6] 可知, 当 $P^\pm(x, y), Q^\pm(x, y) \in C^k (k=1, 2, \dots, \infty, \omega)$ 时有 $P(x) \in C^k$. 不妨假设 $P^\pm(x, y), Q^\pm(x, y) \in C^\omega$. 那么可以将 $P(x)$ 写为

$$P(x) = \sum_{j \geq 1} V_j x^j.$$

我们采用文献 [13] 中关于细焦点的阶的定义, 即如果有 $V_1 = V_2 = \dots = V_k = 0$ 但 $V_{k+1} > 0 (< 0)$, 则称点 $(0, 0)$ 为逐段光滑系统 (1) 的一个 $k/2$ 阶不稳定 (稳定) 细焦点. 在此定义下, 虽然逐段光滑系统 (1) 的焦点 $(0, 0)$ 的阶数可能为分数, 但它统一了解析系统和逐段光滑系统对焦点阶数的定义.

除焦点外, 也可能存在一点 $(x_0, 0) \in \Sigma_s$ 使得 $X_s(x_0, 0) = 0$, 那么我们将该点称为一个伪平衡点. 此时, 存在一个解

$$\psi(t; (x_0, 0)) = (x_0, 0).$$

进一步, 如果当 $x \neq x_0$ 时 $(x - x_0)X_s(x, 0)$ 的第一个分量小于 0, 且

$$Q^+(x_0, 0) < 0, Q^-(x_0, 0) > 0,$$

则称 $(x_0, 0)$ 是一个稳定的伪结点. 如果当 $x \neq x_0$ 时 $(x - x_0)X_s(x, 0)$ 的第一个分量大于 0, 且

$$Q^+(x_0, 0) > 0, Q^-(x_0, 0) < 0,$$

则称 $(x_0, 0)$ 是一个不稳定的伪结点. 此时我们考虑逐段光滑系统 (1) 的一个扰动, 即令 $Q^-(x, y) = Q^-(x - \delta, y)$. 那么, 当 $\delta > 0$ 且足够小时, 由文献

[6, 14] 可知, 逐段光滑系统 (1) 的 $(0, 0)$ 会分散为上子系统 (2) 的切点 $(0, 0)$ 和下子系统 (3) 的切点 $(\delta, 0)$, 会产生滑行区域

$$\Sigma_s = \{(x, 0) | x \in (0, \delta)\}$$

和滑行向量场. 若滑行向量场有一个伪结点, 并且伪结点和未扰动逐段光滑系统 (1) 的焦点具有不同稳定性, 穿越极限环就会产生. 当 $\delta < 0$ 且足够小时, 情况是类似的. 这类现象被称为伪 Hopf 分岔或逐段光滑系统的 Hopf 分岔.

在时间尺度变换及此类扰动下, 正则系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = P^+(x, y) + P^-(x, y) + (P^+(x, y) - P^-(x, y))\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right), \\ \dot{y} = Q^+(x, y) + Q^-(x - \delta, y) + (Q^+(x, y) - Q^-(x - \delta, y))\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right) \end{cases} \quad (6)$$

由于正则系统与逐段光滑系统在 $|y| \geq \epsilon$ 的区域具有相同的轨道结构, 我们对正则系统的研究主要考虑带状区域 R . 对未扰正则系统 $(6)_{\delta=0}$, 即正则系统 (5), 我们的得到如下结果.

定理 2.1 当

$$(\operatorname{div}(P^+, Q^+) + \operatorname{div}(P^-, Q^-))|_{(0,0)} \neq 0$$

时存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对任意 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 正则系统 $(6)_{\delta=0}$ 在 $(0, 0)$ 处具有一个粗焦点. 进一步, 当

$$(\operatorname{div}(P^+, Q^+) + \operatorname{div}(P^-, Q^-))|_{(0,0)} > 0 (< 0)$$

时此粗焦点不稳定 (稳定).

对扰动正则系统 (6), 我们有

定理 2.2 如果 $(\operatorname{div}(P^+, Q^+) + \operatorname{div}(P^-, Q^-))|_{(0,0)} > 0$, 则当 $\delta \neq 0$ 足够小时扰动正则系统 (6) 在 $(0, 0)$ 的小邻域内有唯一平衡点且如图 2a 所示.

(i) 当 $\delta > 0$ 时, 存在 (δ, ϵ) 空间中两条曲线 $\epsilon_1(\delta)$ 和 $\epsilon_2(\delta)$ 满足 $\epsilon_2(\delta) > \epsilon_1(\delta)$ 以及: 当 $\epsilon < \epsilon_1(\delta)$ 时此平衡点为一个稳定的正常结点; 当 $\epsilon = \epsilon_1(\delta)$ 时此平衡点为一个稳定的退化结点; 当 $\epsilon_1(\delta) < \epsilon < \epsilon_2(\delta)$ 时此平衡点为一个稳定的粗焦点; 当 $\epsilon = \epsilon_2(\delta)$ 时此平衡点为一个阶数不小于 1 的细焦点; 当 $\epsilon > \epsilon_2(\delta)$ 时此平衡点为一个不稳定的粗焦点.

(ii) 当 $\delta < 0$ 时, 存在 (δ, ϵ) 空间中一条曲线 $\epsilon_3(\delta)$ 满足: 当 $\epsilon > \epsilon_3(\delta)$ 时此平衡点为一个不稳定的粗焦点; 当 $\epsilon = \epsilon_3(\delta)$ 时此平衡点为一个不稳定的退化结点; 当 $\epsilon < \epsilon_3(\delta)$ 时此平衡点为一个不稳定的正常结点.

定理 2.3 如果 $(\operatorname{div}(P^+, Q^+) + \operatorname{div}(P^-, Q^-))|_{(0,0)} < 0$, 则当 $\delta \neq 0$ 足够小时扰动正则系统 (6) 在 $(0, 0)$ 的小邻域内有唯一平衡点且如图 2b 所示.

$Q^-))|_{(0,0)} < 0$, 则当 $\delta \neq 0$ 足够小时扰动正则系统 (6) 在 $(0,0)$ 的小邻域内有唯一平衡点且如图 2b 所示.

(i) 当 $\delta < 0$ 时, 存在 (δ, ϵ) 空间中两条曲线 $\epsilon_4(\delta)$ 和 $\epsilon_5(\delta)$ 满足 $\epsilon_5(\delta) > \epsilon_4(\delta)$ 以及: 当 $\epsilon < \epsilon_4(\delta)$ 时, 此平衡点为一个不稳定的正常结点; 当 $\epsilon = \epsilon_4(\delta)$ 时此平衡点为一个不稳定的退化结点; 当 $\epsilon_4(\delta) < \epsilon < \epsilon_5(\delta)$ 时此平衡点是一个不稳定的粗焦点; 当 $\epsilon = \epsilon_5(\delta)$ 时此平衡点为一个阶数不小于 1 的细焦点; 当 $\epsilon > \epsilon_5(\delta)$ 时此平衡点为一个稳定的粗焦点.

(ii) 当 $\delta > 0$ 时, 存在 (δ, ϵ) 空间中存在一条曲线 $\epsilon_6(\delta)$ 满足: 当 $\epsilon > \epsilon_6(\delta)$ 时此平衡点为一个稳定的粗焦点; 当 $\epsilon = \epsilon_6(\delta)$ 时此平衡点为一个稳定的退化结点; 当 $\epsilon < \epsilon_6(\delta)$ 时此平衡点为一个稳定的正常结点.

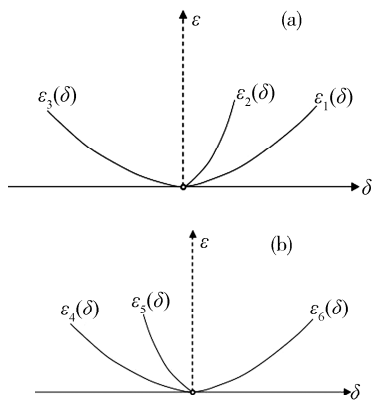


图 2 原点附近的参数空间 (δ, ϵ)

Fig. 2 The neighborhood of origin in parameter space (δ, ϵ)

由于函数 $\varphi(s)$ 有无数种选取方式, 且正则系统的动力学紧密依赖于它, 我们在定理 2.2 和定理 2.3 中给出了细焦点阶数的下界, 但不能确定细焦点的具体阶数. 我们将会在后面的例子中展示对不同的函数 $\varphi(s)$, 细焦点的阶数是可以超过这两个定理给出的下界.

3 主要结果的证明

定理 2.1 的证明 不失一般性, 我们对上子系统作时间尺度变换

$$d\tau = -P^+(0,0)dt/P^-(0,0).$$

此时有

$$\hat{P}^+(x,y) = -\frac{P^+(x,y)P^-(0,0)}{P^+(0,0)},$$

$$\hat{Q}^+(x,y) = -\frac{Q^+(x,y)P^-(0,0)}{P^+(0,0)}.$$

从而

$$\hat{P}^+(0,0) = -P^-(0,0),$$

$$\hat{Q}^+(0,0) = 0,$$

$$\hat{Q}_x^+(0,0) < 0.$$

这样的变换不改变穿越区域、滑行区域以及伪平衡点的类型和稳定性. 因此, 我们对逐段光滑系统 (1) 不妨假设

$$P^+(0,0) = -P^-(0,0) > 0.$$

为简化符号, 对 $A = P, Q$ 我们规定 $A^\pm, A_x^\pm, A_{xx}^\pm, A_y^\pm, \varphi, \varphi'$ 表示相应的函数在 $\delta = x = y = 0$ 的取值.

不难计算出 $(0,0)$ 为正则系统 (6) _{$\delta=0$} 的平衡点. 那么对应的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} P_x^+ + P_x^- & P_y^+ + P_y^- + \frac{2}{\epsilon}P^+\varphi' \\ Q_x^+ + Q_x^- & Q_y^+ + Q_y^- \end{pmatrix},$$

其特征多项式为

$$\lambda^2 - b_1\lambda + b_2 - b_3 = 0, \text{ 这里}$$

$$b_1 := P_x^+ + P_x^- + Q_y^+ + Q_y^-,$$

$$b_2 := (P_x^+ + P_x^-)(Q_y^+ + Q_y^-) - (Q_x^+ + Q_x^-)(P_y^+ + P_y^-),$$

$$b_3 := \frac{2}{\epsilon}P^+(Q_x^+ + Q_x^-)\varphi'.$$

因此, 我们得到特征值:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2 + 4b_3}}{2}.$$

由假设可知, $P^+ > 0, Q_x^- < 0, Q_y^- < 0$. 那么, 当 ϵ 足够小时, $b_3 < 0$ 且 $|b_3|$ 足够大. 因此特征值为一对共轭复数并且实部为

$$(P_x^+ + Q_y^+ + P_x^- + Q_y^-)/2 \neq 0.$$

所以, 若

$$P_x^+ + Q_y^+ + P_x^- + Q_y^- > 0 (< 0),$$

则平衡点是不稳定的粗焦点(稳定). 定理得证.

定理 2.1 表明, 在散度条件约束下, 正则系统 (6) 是局部结构稳定的. 然而, 逐段光滑系统 (1) 却是结构不稳定的, 并且前文已经说明它可能会发生伪 Hopf 分岔. 此时, 一个很自然的问题是扰动正则系统 (6) 会不会发生 Hopf 分岔? 定理 2.2 和定理 2.3 回答了此问题, 我们在下面给出它们的证明.

定理 2.2 的证明 定义函数

$$\kappa_1(x,y,\delta) := P^+(x,y) + P^-(x,y) +$$

$$(P^+(x,y) - P^-(x,y))\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right),$$

$$\kappa_2(x,y,\delta) := Q^+(x,y) + Q^-(x-\delta,y) +$$

$$(Q^+(x,y) - Q^-(x-\delta,y))\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right).$$

由定理 2.1, 当 $\delta=0$ 且 ϵ 足够小时, 在 $(x, y, \delta) = (0, 0, 0)$ 处有初值条件

$$\kappa_1(0, 0, 0) = 0, \kappa_2(0, 0, 0) = 0$$

和行列式

$$\frac{\partial(\kappa_1, \kappa_2)}{\partial(x, y)} = (P_x^+ + P_x^-)(Q_y^+ + Q_y^-) - (Q_x^+ + Q_x^-) \left(P_y^+ + P_y^- + \frac{2}{\epsilon} P^+ \varphi' \right) > 0.$$

根据隐函数定理, 在 $(0, 0, 0)$ 附近可以确定唯一的函数 $x = \hat{x}(\delta), y = \hat{y}(\delta)$, 使得 $\kappa_1(\hat{x}, \hat{y}, \delta) = 0, \kappa_2(\hat{x}, \hat{y}, \delta) = 0$, 并且

$$\hat{x} = (c_1 + O(\epsilon))\delta + O(\delta^2),$$

$$\hat{y} = (c_2\epsilon + O(\epsilon^2))\delta + O(\delta^2),$$

其中

$$c_1 = \frac{Q_x^-}{Q_x^+ + Q_x^-}, c_2 = \frac{(P_x^+ + P_x^-)Q_x^-}{2(Q_x^+ + Q_x^-)P^+ \varphi'}.$$

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, (\hat{x}, \hat{y}) 趋于 $(0, 0)$. 对 $A = P, Q$ 我们规定符号 $\hat{A}^\pm, \hat{A}_x^\pm, \hat{A}_{xx}^\pm, \hat{A}_y^\pm, \hat{\varphi}, \hat{\varphi}'$ 表示相应函数在 $\delta \neq 0, (x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$ 时的取值. 那么, 在平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 处的雅可比矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_1(\delta, \epsilon) & a_2(\delta, \epsilon) \\ a_3(\delta, \epsilon) & a_4(\delta, \epsilon) \end{bmatrix},$$

其中

$$a_1(\delta, \epsilon) := (1 + \hat{\varphi})\hat{P}_x^+ + (1 - \hat{\varphi})\hat{P}_x^-,$$

$$a_2(\delta, \epsilon) := (1 + \hat{\varphi})\hat{P}_y^+ + (1 - \hat{\varphi})\hat{P}_y^- + \frac{1}{\epsilon}(\hat{P}^+ - \hat{P}^-)\hat{\varphi}',$$

$$a_3(\delta, \epsilon) := (1 + \hat{\varphi})\hat{Q}_x^+ + (1 - \hat{\varphi})\hat{Q}_x^-,$$

$$a_4(\delta, \epsilon) := (1 + \hat{\varphi})\hat{Q}_y^+ + (1 - \hat{\varphi})\hat{Q}_y^- + \frac{1}{\epsilon}(\hat{Q}^+ - \hat{Q}^-)\hat{\varphi}'.$$

将 $a_i(\delta, \epsilon)$ 关于 δ 在 $\delta = 0$ 处进行泰勒展开, 得到

$$a_1(\delta, \epsilon) = a_{11}(\epsilon) + a_{12}(\epsilon)\delta + O(\delta^2),$$

$$a_2(\delta, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \{ a_{21}(\epsilon) + a_{22}(\epsilon)\delta + O(\delta^2) \},$$

$$a_3(\delta, \epsilon) = a_{31}(\epsilon) + a_{32}(\epsilon)\delta + O(\delta^2),$$

$$a_4(\delta, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \{ a_{41}(\epsilon) + a_{42}(\epsilon)\delta + O(\delta^2) \}.$$

进而, 再将系数 $a_{ij}(\epsilon)$ 关于 ϵ 在 $\epsilon = 0$ 处进行泰勒展开得到

$$a_1(\delta, \epsilon) = (a_{111} + O(\epsilon)) + (a_{121} + O(\epsilon))\delta + O(\delta^2),$$

$$a_2(\delta, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \{ (a_{211} + O(\epsilon)) + (a_{221} + O(\epsilon))\delta + O(\delta^2) \},$$

$$a_3(\delta, \epsilon) = (a_{311} + O(\epsilon)) + (a_{321} + O(\epsilon))\delta + O(\delta^2),$$

$$a_4(\delta, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \{ (a_{411}\epsilon + O(\epsilon^2)) + (a_{421} + O(\epsilon))\delta + O(\delta^2) \},$$

其中

$$a_{111} := P_x^+ + P_x^-,$$

$$a_{121} := c_1(P_{xx}^+ + P_{xx}^-) + c_2(P_x^+ - P_x^-)\varphi',$$

$$a_{211} := 2P^+\varphi',$$

$$a_{221} := c_1(P_x^+ - P_x^-)\varphi',$$

$$a_{311} := Q_x^+ + Q_x^-,$$

$$a_{321} := c_1(Q_{xx}^+ + Q_{xx}^-) - Q_{xx}^-,$$

$$a_{411} := Q_y^+ + Q_y^-,$$

$$a_{421} := (c_1(Q_x^+ - Q_x^-) + Q_x^-)\varphi'.$$

从而在 δ 与 ϵ 足够小时我们得到 $a_2(\delta, \epsilon) > 0, a_3(\delta, \epsilon) < 0$, 其特征多项式为

$$\lambda^2 - (a_1(\delta, \epsilon) + a_4(\delta, \epsilon))\lambda + a_1(\delta, \epsilon)a_4(\delta, \epsilon) - a_2(\delta, \epsilon)a_3(\delta, \epsilon) = 0.$$

定义函数

$$G(\delta, \epsilon) := (a_1(\delta, \epsilon) + a_4(\delta, \epsilon))^2 - 4a_1(\delta, \epsilon)a_4(\delta, \epsilon) + 4a_2(\delta, \epsilon)a_3(\delta, \epsilon).$$

将前面的展开式代入后可得

$$G(\delta, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}\hat{G}(\delta, \epsilon), \hat{G}(\delta, \epsilon) = 4a_{211}a_{311}\epsilon + a_{421}^2\delta^2 + O(\epsilon^2, \delta^3, \epsilon\delta).$$

由于

$$4a_{211}a_{311} = 8P^+\varphi'(Q_x^+ + Q_x^-) < 0,$$

当 ϵ 和 δ 都足够小时偏导 $\hat{G}_\epsilon(\delta, \epsilon)$ 的符号为负. 另一方面, 根据定理 2.1 可知, 当 $\delta = 0$ 且固定 ϵ 足够小时, 正则系统 (6) 的平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个不稳定的粗焦点. 那么对任意足够小的 $\delta > 0$, 我们有 $\hat{G}(\delta, \epsilon) < 0$. 此时保持 δ 不变, 可以取一个足够小的 $\epsilon > 0$, 使得函数 $\hat{G}(\delta, \epsilon)$ 与项 $a_{421}^2\delta^2$ 同号, 即 $\hat{G}(\delta, \epsilon) > 0$. 由介值定理和单调性可知, 对于任意给定的足够小 $\delta > 0$, 存在唯一的 $\epsilon_1(\delta)$, 使得 $\hat{G}(\delta, \epsilon_1(\delta)) = 0$. 这里也可以对 $\hat{G}(\delta, \epsilon)$ 使用隐函数定理来得到 $\epsilon_1(\delta)$ 的存在性. 类似地, 我们定义函数

$$H(\delta, \epsilon) := a_1(\delta, \epsilon) + a_4(\delta, \epsilon).$$

那么

$$H(\delta, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\hat{H}(\delta, \epsilon), \hat{H}(\delta, \epsilon) = (a_{111} + a_{411})\epsilon + a_{421}\delta + O(\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta).$$

因此在 δ 和 ϵ 足够小时, 偏导数 $\hat{H}_\epsilon(\delta, \epsilon)$ 与项 $a_{111} + a_{411} = P_x^+ + P_x^- + Q_y^+ + Q_y^-$ 同号. 因此 $\hat{H}_\epsilon(\delta, \epsilon) > 0$.

另一方面, 根据定理 2.1 可知, 当 $\delta=0$ 且 ϵ 足够小时, 正则系统(6)的平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个不稳定的粗焦点. 那么对任意足够小的 $\delta > 0$, 有 $\hat{H}(\delta, \epsilon) > 0$. 此时, 保持 δ 不变, 可以取一个足够小的 $\epsilon > 0$, 使得函数 $\hat{H}(\delta, \epsilon)$ 与项 $(2Q_x^+ Q_x^- / Q_x^+ + Q_x^-) \cdot \varphi' \delta$ 同号, 即 $\hat{H}(\delta, \epsilon) < 0$. 由介值定理和单调性可知, 对于任意给定的足够小 $\delta > 0$, 存在唯一的 $\epsilon_2(\delta)$ 使得

$$\hat{H}(\delta, \epsilon_2(\delta)) = 0.$$

这里也可以对 $\hat{H}(\delta, \epsilon)$ 使用隐函数定理来得到了函数 $\epsilon_2(\delta)$ 的存在性.

下证 $\epsilon_2(\delta) > \epsilon_1(\delta)$, 即对任意的满足 $H(\delta, \epsilon) \geq 0$ 的 (δ, ϵ) 有 $G(\delta, \epsilon) < 0$. 我们采用反证法. 假设 $\epsilon_2(\delta) \leq \epsilon_1(\delta)$. 根据定理 2.1 可知, 可以选取某一 (δ, ϵ) , 使得 $H(\delta, \epsilon) > 0$ 而 $G(\delta, \epsilon) < 0$. 此时, 保持 $\delta > 0$ 不变而令 ϵ 变小, 那么根据前文的讨论和假设可知, 必然存在点 (δ, ϵ) 使得

$$H(\delta, \epsilon) = G(\delta, \epsilon) = 0$$

或

$$H(\delta, \epsilon) > 0 \text{ 且 } G(\delta, \epsilon) > 0.$$

前一种情况对应 $\epsilon_2(\delta) = \epsilon_1(\delta)$ 而后一种情况对应 $\epsilon_2(\delta) < \epsilon_1(\delta)$. 下面我们分别讨论.

对于前一种情况, 函数

$$G(\delta, \epsilon) - 4(a_1(\delta, \epsilon)a_4(\delta, \epsilon) - a_2(\delta, \epsilon)a_3(\delta, \epsilon)) = 0.$$

但是, 将前文中的 $a_i, i=1, 2, 3, 4$ 的展开式代入后可得

$$G(\delta, \epsilon) = \frac{4}{\epsilon}(a_{211}a_{311} + O(\delta, \epsilon)) = \frac{4}{\epsilon}(2P^+(Q^+ + Q^-)\varphi' + O(\delta, \epsilon)) < 0.$$

这与假设是矛盾的.

对于后一种情况, 我们可以取 (δ, ϵ) 足够靠近 $(\delta, \epsilon_2(\delta))$ 并且 $G(\delta, \epsilon) > 0$, 使得 $H(\delta, \epsilon) > 0$ 且足够小. 此时

$$G(\delta, \epsilon) = H^2(\delta, \epsilon) + \frac{4}{\epsilon}(a_{211}a_{311} + O(\delta, \epsilon)) = H^2(\delta, \epsilon) + \frac{4}{\epsilon}(2P^+(Q^+ + Q^-)\varphi' + O(\delta, \epsilon)) < 0.$$

这与假设矛盾. 命题得证.

下面我们考虑平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 的类型和退化程度. 当 $\epsilon < \epsilon_1(\delta)$ 时, 有

$$G(\delta, \epsilon) > 0, H(\delta, \epsilon) < 0.$$

因此特征值为两个不同的负实数. 从而 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个稳定的正常结点. 当 $\epsilon = \epsilon_1(\delta)$ 时, 有

$$G(\delta, \epsilon) = 0, H(\delta, \epsilon) < 0.$$

因此特征值为一对相同的负实数. 又因为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_4(\delta, \epsilon) - a_1(\delta, \epsilon)) & -a_2(\delta, \epsilon) \\ -a_3(\delta, \epsilon) & \frac{1}{2}(a_1(\delta, \epsilon) - a_4(\delta, \epsilon)) \end{pmatrix}$$

经过初等行变换后变为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2a_2(\delta, \epsilon)}{a_1(\delta, \epsilon) - a_4(\delta, \epsilon)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则相应的特征子空间为 1 维, 即几何重数为 1. 所以 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个稳定的退化结点.

当 $\epsilon > \epsilon_1(\delta)$ 且 $\epsilon < \epsilon_2(\delta)$ 时, 有

$$G(\delta, \epsilon) < 0, H(\delta, \epsilon) < 0.$$

因此两个特征值为一对共轭复数并且实部为负, 从而 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个稳定的粗焦点. 当 $\epsilon = \epsilon_2(\delta)$ 时, 有

$$G(\delta, \epsilon) < 0, H(\delta, \epsilon) = 0.$$

因此两个特征值为一对共轭纯虚数, 从而 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个细焦点, 并且阶数不小于 1. 当 $\epsilon > \epsilon_2(\delta)$ 时, 有

$$G(\delta, \epsilon) < 0, H(\delta, \epsilon) > 0.$$

因此两个特征值为一对共轭复数并且实部为正, 从而 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个不稳定的粗焦点.

当 $\delta < 0$ 时, 曲线 $\epsilon_3(\delta)$ 的存在性和平衡点类型以及退化程度的证明是类似的. 这里我们省略其证明. 证毕.

定理 2.2 表明, 在散度条件下, 在参数空间中确定了平衡点类型变化的临界曲线和焦点阶数变高的曲线. 通过对比, 我们发现, 逐段光滑系统(1)在 δ 的扰动下伪平衡点的类型直接从焦点转化为结点. 其主要原因是 δ 只会影响下子系统. 因而我们可以认为这是参数对逐段光滑系统(1)的部分扰动. 然而, 在正则系统(6)中, δ 的变化是对整个系统产生影响的, 且 ϵ 也会带来影响.

定理 2.3 的证明 与定理 2.2 中类似, 在 δ 与 ϵ 足够小时, 可以通过隐函数定理得到正则系统(6)的平衡点

$$(\hat{x}, \hat{y}) = ((c_1 + O(\epsilon))\delta + O(\delta^2), (c_2\epsilon + O(\epsilon^2))\delta + O(\delta^2)),$$

其中 c_1 和 c_2 与前文相同. 进一步, 可以得到在 (\hat{x}, \hat{y}) 处的雅可比矩阵. 通过将其元素写为关于 δ 与 ϵ 的泰勒展开式, 我们不难得出 $a_2(\delta, \epsilon) > 0$ 和 $a_3(\delta,$

$\epsilon) < 0$ 恒成立. 类似地, 定义相应的函数

$$G(\delta, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \widehat{G}(\delta, \epsilon), \quad H(\delta, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \widehat{H}(\delta, \epsilon).$$

进而我们可以得到它们关于 δ 与 ϵ 的表达式. 由介值定理与函数 $\widehat{G}(\delta, \epsilon)$ 和 $\widehat{H}(\delta, \epsilon)$ 关于 ϵ 的单调性, 我们可以得到函数 $\epsilon_{4,6}(\delta)$ 和 $\epsilon_5(\delta)$ 的存在性. 同样, 也可以通过对 $\widehat{G}(\delta, \epsilon)$ 与 $\widehat{H}(\delta, \epsilon)$ 分别使用隐函数定理来证明 $\epsilon_{4,6}(\delta)$ 和 $\epsilon_5(\delta)$ 的存在性.

需要说明的是, 由于散度条件为 $(\operatorname{div}(P^+, Q^+) + \operatorname{div}(P^-, Q^-))|_{(0,0)} < 0$, 只有当 $\delta < 0$ 时我们才可以确定函数 $\epsilon_5(\delta)$. 同理, 可以证明 $\epsilon_5(\delta) > \epsilon_4(\delta)$. 在不同参数条件下, 平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 的稳定性、类型和退化程度可以全部确定. 定理得证.

4 例

考虑如下平面逐段光滑系统:

$$\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \end{cases} = \begin{cases} X^+(x, y) = (1+x, -x)^T, & y > 0, \\ X^-(x, y) = (-1, -(x-\delta))^T, & y < 0. \end{cases}$$

直接计算可得

$$(\operatorname{div}(P^+, Q^+) + \operatorname{div}(P^-, Q^-))|_{(0,0)} = 1.$$

通过时间尺度变换 $t \rightarrow 2t$, 其正则系统可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = x + (2+x)\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right), \\ \dot{y} = -(2x-\delta) - \delta\varphi\left(\frac{y}{\epsilon}\right). \end{cases}$$

沿用第 3 节中的符号, 再规定 $\widehat{\varphi}'', \widehat{\varphi}'''$ 表示正则函数在平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 处的 2 阶和 3 阶导数值. 当 $\delta = 0$ 且 ϵ 足够小时, 正则系统有一个平衡点 $(0, 0)$, 对应的特征多项式为

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{4}{\epsilon} \widehat{\varphi}' = 0,$$

特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{\epsilon} \widehat{\varphi}'}}{2}.$$

因此, $(0, 0)$ 是一个不稳定的粗焦点. 这与定理 2.1 的结果相吻合. 当 $\delta > 0$ 时, 平衡点位于

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{8} + O(\delta^4), \left(-\frac{\delta}{4\widehat{\varphi}} + O(\delta^3) \right) \epsilon \right).$$

此时在 (\hat{x}, \hat{y}) 处的雅可比矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 + \widehat{\varphi} & \frac{2 + \hat{x}}{\epsilon} \widehat{\varphi}' \\ -2 & -\frac{\delta}{\epsilon} \widehat{\varphi}' \end{bmatrix}.$$

从而可得特征多项式

$$\lambda^2 - \left(1 + \widehat{\varphi} - \frac{\delta}{\epsilon} \widehat{\varphi}' \right) \lambda + \frac{(4 + 2\hat{x} - \delta - \delta\widehat{\varphi}) \widehat{\varphi}'}{\epsilon} = 0$$

以及相应的特征值

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left(1 + \widehat{\varphi} - \frac{\delta}{\epsilon} \widehat{\varphi}' \right) \pm \sqrt{\left(1 + \widehat{\varphi} - \frac{\delta}{\epsilon} \widehat{\varphi}' \right)^2 - 4 \frac{(4 + 2\hat{x} - \delta - \delta\widehat{\varphi}) \widehat{\varphi}'}{\epsilon}}}{2}.$$

定义函数

$$H(\delta, \epsilon) = \left(1 + \widehat{\varphi} - \frac{\delta}{\epsilon} \widehat{\varphi}' \right) = \frac{1}{\epsilon} \widehat{H}(\delta, \epsilon).$$

根据 $\widehat{H}(\delta, \epsilon) = 0$ 可得函数

$$\epsilon_2(\delta) = \widehat{\varphi}' \delta + O(\delta^2).$$

另一方面, 定义函数

$$G(\delta, \epsilon) = \left(1 + \widehat{\varphi} - \frac{\delta}{\epsilon} \widehat{\varphi}' \right)^2 - 4 \frac{(4 + 2\hat{x} - \delta - \delta\widehat{\varphi}) \widehat{\varphi}'}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2} \widehat{G}(\delta, \epsilon).$$

根据 $\widehat{G}(\delta, \epsilon) = 0$, 当 $\delta > 0$ 时可得函数

$$\epsilon_1(\delta) = \frac{\widehat{\varphi}'}{16} \delta^2 + O(\delta^3).$$

同理, 当 $\delta < 0$ 足够小时, 得

$$\epsilon_3(\delta) = \frac{\widehat{\varphi}'}{16} \delta^2 + O(\delta^3).$$

当 $\widehat{G}(\delta, \epsilon) = 0$ 时, 矩阵 $\lambda I - E$ 经初等行变换后为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{(4 + 2\hat{x}) \widehat{\varphi}'}{(\epsilon + \epsilon \widehat{\varphi} - \delta \widehat{\varphi}')}. \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

故特征子空间为 1 维. 这些 $\epsilon_i(\delta)$ 的位置关系均与定理 2.2 中的结果相吻合. 因此, 当 $\delta > 0$ 时, 若 $\epsilon > \epsilon_2(\delta)$ 则 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个不稳定的粗焦点; 若 $\epsilon = \epsilon_2(\delta)$ 则 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个阶数不小于 1 的细焦点; 若 $\epsilon_2(\delta) > \epsilon > \epsilon_1(\delta)$ 则 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个稳定的粗焦点; 若 $\epsilon = \epsilon_1(\delta)$ 则 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个稳定的退化结点; 若 $\epsilon < \epsilon_1(\delta)$ 则 (\hat{x}, \hat{y}) 为一个稳定的正常结点.

在参数曲线 $\epsilon_2(\delta)$ 上, 平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 为阶数不小于 1 的细焦点. 为了确定其阶数, 我们需要计算其焦点量 g_3 . 此时, 雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{2+\hat{x}} & \frac{2}{\delta} \\ -2 & -\frac{2}{2+\hat{x}} \end{pmatrix},$$

其特征值为

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4}{(2+\hat{x})^2} - \frac{4}{\delta}} = \pm \beta_0(\delta)i.$$

为计算其焦点量 g_3 , 先假设正则函数 $\varphi(s)$ 在 $s=0$ 附近形式为

$$\varphi(s) = \varphi_1 s + \varphi_3 s^3 + h. o. t.,$$

其中 φ_j 表示 s^j 的系数. 由文献[15], 计算可得

$$g_3 = \frac{2C(\delta)}{(2+\hat{x})^2 \varepsilon_2(\delta) \beta_0^3(\delta)},$$

其中

$$C(\delta) := C_1(\delta) + C_2(\delta) + C_3(\delta) + C_4(\delta) + C_5(\delta),$$

$$C_1(\delta) = \frac{4(2+\hat{x})^2 \delta - 2\delta^2}{\varepsilon_2^2(\delta) \beta_0(\delta)} (\tilde{\varphi}'')^2,$$

$$C_2(\delta) = \frac{4(2+\hat{x})^2 + 6\delta}{\varepsilon_2(\delta) \beta_0(\delta)} \tilde{\varphi}' \tilde{\varphi}',$$

$$C_3(\delta) = \frac{8}{\beta_0(\delta)} (\tilde{\varphi}')^2,$$

$$C_4(\delta) = -\frac{2\delta}{\varepsilon_2(\delta)} \tilde{\varphi}''',$$

$$C_5(\delta) = \frac{2}{\varepsilon_2(\delta)} \tilde{\varphi}''.$$

考察函数 $C(\delta)$ 的符号. 由于 ε 限制在 $\varepsilon_2(\delta)$ 上, 根据前文中对平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 的讨论可知在 $\delta > 0$ 且足够小时有

$$\varepsilon_2(\delta) \beta_0(\delta) = 2\varphi_1 \sqrt{\delta} + O(\delta),$$

$$\frac{\hat{y}}{\varepsilon_2(\delta)} = -\frac{1}{4} \delta + O(\delta^2),$$

$$\frac{\delta}{\varepsilon_2(\delta)} = \frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{4} \delta + O(\delta^2),$$

$$\beta_0(\delta) = \frac{2}{\sqrt{\delta}} - \frac{\sqrt{\delta}}{8} + O(\delta).$$

根据正则函数 φ 的假设又有

$$\tilde{\varphi}' = \varphi_1 + \frac{3\varphi_3}{32\varphi_1^2} \delta^2 + O(\delta^3),$$

$$\tilde{\varphi}'' = -\frac{3\varphi_3}{2\varphi_1} \delta + O(\delta^2),$$

$$\tilde{\varphi}''' = 6\varphi_3 + \frac{15\varphi_3}{8\varphi_1^2} \delta^2 + O(\delta^3).$$

因此, 可以将 $C(\delta)$ 写为关于 $\sqrt{\delta}$ 的级数形式

$$C(\delta) = -\frac{(24\varphi_1 + 3)\varphi_3}{2\varphi_1^2} + \frac{4\varphi_1^3 - 12\varphi_3}{\varphi_1} \sqrt{\delta} + O(\delta)$$

并将其视为一个自变量为 φ_3 和 δ 的函数 $C(\delta, \varphi_3)$.

因此, 在 $\delta=0$ 且 $\varphi_3 > 0 (< 0)$ 时, 有 $C(0, \varphi_3) < 0 (> 0)$. 对于任意的 $\bar{\varphi}_3 > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $\delta \in (0, \delta_0)$ 时有 $C(\delta, \bar{\varphi}_3) < 0$ 与 $C(\delta, -\bar{\varphi}_3) > 0$. 另一方面, 偏导数为

$$C_{\varphi_3}(\delta, \varphi_3) = -\frac{24\varphi_1 + 3}{2\varphi_1^2} - \frac{12}{\varphi_1} \sqrt{\delta} + O(\delta).$$

因此在 δ 足够小时函数 $C_{\varphi_3}(\delta, \varphi_3) < 0$. 根据介值定理与单调性可知, 对于任意给定的 $\delta > 0$ 足够小, 存在唯一的 $\varphi_3(\delta) \in (-\bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_3)$, 使得函数 $C(\delta, \varphi_3(\delta)) = 0$, 即平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 的 1 阶焦点量为 0. 因此, 它可能为一个阶数大于 1 的细焦点, 即阶数超过定理 2.2 和定理 2.3 中给出的下界. 进而, 若 $\varphi_3 \neq \varphi_3(\delta)$, 平衡点 (\hat{x}, \hat{y}) 就是 1 阶细焦点.

参考文献:

- [1] Doole S H, Hogan S J. A piecewise linear suspension bridge model: nonlinear dynamics and orbit continuation [J]. *Dyns Stab Syst*, 1996, 11: 19.
- [2] Oestreich M, Hinrichs N, Budd C J, et al. Analytical and experimental investigation of an impact oscillator [EB/OL]. [2020-11-01]. <http://www.maths.bath.ac.uk/preprints/math9712.ps.gz>.
- [3] Bernardo M, Budd C, Champneys A. Grazing, skipping and sliding: analysis of the non-smooth dynamics of the DC/DC buck converter [J]. *Nonlinearity*, 1998, 11: 859.
- [4] Bernardo M, Garofalo F, Glielmo L, et al. Switchings, bifurcations, and chaos in DC/DC converters [J]. *IEEE T Circuits I*, 1998, 45: 133.
- [5] Galvanetto U, Bishop S R, Briseghella L. Mechanical stick-slip vibration [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 1995, 5: 637.
- [6] Filippov A F. *Differential equations with discontinuous right-hand sides* [M]. Netherlands: New York: Kluwer Academic, 1988.
- [7] Sotomayor J, Teixeira M A. Regularization of discontinuous vector fields [C]//Magalhaes L, Rocha C, Sanchez L. *Equadiff 95-Proceedings of the International Conference on Differential Equations*. Singapore: World Science Publishing Company, 1996.
- [8] Buzzi C A, Silva P R, Teixeira M A. A singular approach to discontinuous vector fields on the plane [J]. *J Differ Equat*, 2006, 231: 633.
- [9] Teixeira M A, da Silva P R. Regularization and singular perturbation techniques for non-smooth systems [J]. *Physica D*, 2012, 241: 1948.
- [10] Buzzi C A, Santos R A T. Regularization of saddle-

- fold singularity for nonsmooth differential systems [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, 474: 1036.
- [11] Kristiansen K U, Hogan S J. Regularizations of two-fold bifurcations in planar piecewise smooth systems using blowup [J]. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2015, 14: 1731.
- [12] Bonet-Reves C, Larrosa J, M-Seara T. Regularization around a generic codimension one fold-fold singularity [J]. *J Differ Equat*, 2018, 265: 1761.
- [13] Chen X, Zhang W. Isochronicity of centers in a switching Bautin system [J]. *J Differ Equat*, 2012, 252: 2877.
- [14] Kuznetsov Y A, Rinaldi S, Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2003, 13: 2157.
- [15] 张芷芬, 李承治, 郑志明, 李伟固. 向量场的分岔理论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.

引用本文格式:

中文: 方之昊, 陈兴武. 反向 II 型 fold-fold 的正则化系统的动力学分析[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2021, 58: 051002.

英文: Fang Z, Chen X W. Dynamical analysis of a fold-fold regularized system of type-II with reverse direction [J]. *J Sichuan Univ: Nat Sci Ed*, 2021, 58: 051002.