一类二阶非线性常微分方程组边值问题解的存在唯一性

王　丹，李永祥
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文讨论如下二阶非线性常微分方程组边值问题

$$\begin{cases} -u''(t)=f(t,u(t),v(t)),t\in[0,1], \\ -v''(t)=g(t,u(t),v(t)),t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=0,v(0)=v(1)=0 \end{cases}$$

解的存在唯一性，其中 $f,g:[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续. 当非线性项 $f(t,x,y)$ 与 $g(t,x,y)$ 满足相应的不等式时,本文运用 Leray-Schauder 不动点定理获得了该问题解的存在唯一性.

关键词：非线性常微分系统；边值问题；存在唯一性；Leray-Schauder 不动点定理
中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.041001

Existence and uniqueness of solutions for boundary value problem of second-order nonlinear ordinary differential systems

WANG Dan, *LI Yong-Xiang*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: This paper discusses the existence and uniqueness of solutions for the following second-order nonlinear ordinary differential equations boundary value problems:

$$\begin{cases} -u''(t)=f(t,u(t),v(t)),t\in[0,1], \\ -v''(t)=g(t,u(t),v(t)),t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=0,v(0)=v(1)=0, \end{cases}$$

where $f,g:[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ are continuous. By applying the Leray-Schauder fixed point theorem, we obtain the existence and uniqueness of solutions under an inequality condition on the nonlinear term $f(t,x,y)$ and $g(t,x,y)$.

Keywords: Nonlinear ordinary differential system; Boundary value problem; Existence and uniqueness; Leray-Schauder fixed point theorem

1 引　言

本文讨论二阶非线性常微分方程组边值问题

$$\begin{cases} -u''(t)=f(t,u(t),v(t)),t\in[0,1], \\ -v''(t)=g(t,u(t),v(t)),t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=0,v(0)=v(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在唯一性，其中非线性函数 $f,g:[0,1]\times\mathbf{R}\times$

收稿日期：2020-12-01
基金项目：国家自然科学基金(11661071，12061062)
作者简介：王丹(1997－)，女，硕士研究生，主要研究方向为非线性泛函分析. E-mail:1593274650@qq.com
通讯作者：李永祥. E-mail:liyx@nwnu.edu.cn

$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续. 作为生物种群的常用数学模型，该问题在生物数学等领域有重要应用，不少作者对该问题正解的存在性进行过研究[1-10]. 常用研究方法主要有文献[1,5,7-10]中的锥上的不动点指数理论，文献[2-3]中的锥上不动点定理，以及文献[4,6]中的单调迭代求解方法，等.

1993 年，Fink 和 Gatica[1] 运用锥上的不动点指数理论，在 f 与 g 严格单调条件下获得了边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda a(t)f(x(t),y(t))=0, t\in[0,1], \\ y''(t)+\lambda b(t)g(x(t),y(t))=0, t\in[0,1], \\ x(0)=x(1)=0, y(0)=y(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

非负解的存在性. 后来，Ma[2] 将上述条件弱化为单调条件，通过举例得到了问题(2)新的非负解的存在性结论. 文献[3]研究了边值问题

$$\begin{cases} -u''(t)=f(t,v(t)), t\in[0,1], \\ -v''(t)=g(t,u(t)), t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=0, v(0)=v(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

(该问题的非线性项都是非负的)，在超线性或次线性的条件下获得了正解的存在性. 在上述文献中，系统正解的存在性均被转化为乘积空间中单锥上相应全连续映射的不动点的存在性. 此外，Cheng 等[7-10]建立了乘积锥上不动点指数的乘积公式(见文献[7]中定理 2.1)，运用不动点指数的乘积公式在一些超(次)线性假设下获得了几类不同形式的边值问题正解的存在性，推广了以上结论.

鉴于以上文献都在非线性项 f 与 g 各自独立的条件下讨论方程组非负解或正解的存在性，本文则不假设 f 与 g 非负，在 $f(t,x,y)$ 与 $g(t,x,y)$ 相关联的不等式条件下运用 Leray-Schauder 不动点定理获得问题(1)解的存在唯一性. 本文的主要结果如下：

定理 1.1　设 $f,g:[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续. 若 f,g 满足下列条件：

(H1) 存在常数 $a,b\geqslant 0$ 使得 $a+b<\pi^2$ 及 $c>0$，使得

$$f(t,x,y)x+g(t,x,y)y\leqslant ax^2+by^2+c, (t,x,y)\in[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \tag{4}$$

则问题(1)至少存在一个解.

加强定理 1.1 的条件(H1)后，则有如下存在唯一性结果：

定理 1.2　设 $f,g:[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续. 若 f,g 满足下列条件：

(H2) 存在常数 $a,b\geqslant 0$ 使得 $a+b<\pi^2$，

$$\begin{aligned} &(f(t,x_2,y_2)-f(t,x_1,y_1))(x_2-x_1)+ \\ &\quad (g(t,x_2,y_2)-g(t,x_1,y_1))(y_2-y_1)\leqslant \\ &\quad a(x_2-x_1)^2+b(y_2-y_1)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

其中$(t,x_i,y_i)\in[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}, i=1,2$, 则问题(1)的存在唯一解.

2　主要结果的证明

记 $I=[0,1]$. 以 $C(I)$表示定义在 I 上的全体连续函数按范数 $\|u\|_c=\max\limits_{t\in I}|u(t)|$ 构成的 Banach 空间，$C^2(I)$表示定义在 I 上的全体二阶连续可微函数按范数 $\|u\|_{C^2}=\max\limits_{t\in I}\{\|u\|_c, \|u'\|_c, \|u''\|_c\}$构成的 Banach 空间，$L^2(I)$表示 I 上的全体 Lebesgue 平方可积函数按内积 $(u,v)=\int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t$ 构成的 Hilbert 空间，其内积范数为

$$\|u\|_2=\left(\int_0^1|u(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

记$H^1(I)=\{u\in C(I)\,|\,u$ 在 I 上绝对连续，且 $u'\in L^2(I)\}$.

设 X,Y 分别为范数是 $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ 的 Banach 空间. 以 $X\times Y$ 表示 X 与 Y 的乘积空间按范数 $\|(x,y)\|=\max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$构成的 Banach 空间.

引理 2.1　设 $u\in H^1(I)$满足边界条件 $u(0)=u(1)=0$，则 $\|u_2\|\leqslant\dfrac{1}{\pi}\|u_2'\|$.

证明　因正弦函数系$\{\sin k\pi t\,|\,k=1,2\cdots\}$为$L^2(I)$中的完备直交系，故 u 可展为正弦级数

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\pi t,$$

其中

$$b_k=2\int_0^1 u(t)\sin k\pi t\mathrm{d}t, k=1,2,\cdots,$$

且有 Parseval 等式

$$\|u\|_2^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2.$$

另一方面，余弦函数系$\{\cos k\pi t\,|\,k=1,2\cdots\}$也为$L^2(I)$中的完备直交系，故 u'可展为余弦级数

$$u'(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\pi t,$$

其中

$$a_0=2\int_0^1 u'(t)\mathrm{d}t=0,$$

$$a_k=2\int_0^1 u'(t)\cos k\pi t\mathrm{d}t=k\pi b_k, k=1,2,\cdots,$$

且有 Parseval 等式

$$\|u'\|_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\pi^2b_k^2\geqslant\frac{\pi^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2=\pi^2\|u\|_2^2.$$

因而引理 2.1 成立.

定理 1.1 的证明　熟知，$\forall h\in C(I)$，线性二阶边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)=h(t),t\in I,\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}\tag{6}$$

存在唯一解

$$u=\int_0^1G(t,s)h(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ s(1-t),0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

为相应的 Green 函数. 作积分算子 $A:C(I)\times C(I)\to C(I)\times C(I)$为

$$A(u,v)=\left(\int_0^1G(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,\int_0^1G(t,s)g(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\right).$$

则 $A:C(I)\times C(I)\to C(I)\times C(I)$为全连续算子，且问题(1)的解$(u,v)$等价于算子 A 的不动点. 我们对 A 应用 Leray-Schauder 不动点定理,以证明 A 有不动点. 为此,考查方程簇

$$(u,v)=\lambda A(u,v),0<\lambda<1\tag{7}$$

设$(u,v)\in C(I)\times C(I)$为方程簇(7)中某个 $\lambda\in(0,1)$对应的方程的解. 则

$$\begin{cases}u=\lambda\int_0^1G(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,\\ v=\lambda\int_0^1G(t,s)g(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\end{cases}\tag{8}$$

按线性方程解的 Green 函数表示，$(u,v)\in C^2(I)\times C^2(I)$满足方程

$$\begin{cases}-u''(t)=\lambda f(t,u(t),v(t)),t\in I,\\ -v''(t)=\lambda g(t,u(t),v(t)),t\in I,\\ u(0)=u(1)=0,v(0)=v(1)=0\end{cases}\tag{9}$$

将方程(9)的第一式和第二式的两边分别同乘以 $u(t)$和 $v(t)$，两式相加，由条件(H1)可得

$$-u''(t)u(t)-v''(t)v(t)=\lambda f(t,u(t),v(t))u(t)+\lambda g(t,u(t),v(t))v(t)\leqslant\lambda(au^2(t)+bv^2(t)+c)\leqslant au^2(t)+bv^2(t)+c,t\in I.$$

上式在 I 上积分，左边利用分部积分和方程(9)的边界条件得

$$\|u'\|_2^2+\|v'\|_2^2\leqslant a\|u\|_2^2+b\|v\|_2^2+c\leqslant(a+b)(\|u\|_2^2+\|v\|_2^2)+c.$$

由引理 2.1,

$$\|u\|_2\leqslant\frac{1}{\pi}\|u'\|_2,\|v\|_2\leqslant\frac{1}{\pi}\|v'\|_2,$$

从而有

$$\|u'\|_2^2+\|v'\|_2^2\leqslant\frac{c}{1-\frac{a+b}{\pi^2}}:=M.$$

所以

$$\|u'\|_2\leqslant\sqrt{\frac{c}{1-\frac{a+b}{\pi^2}}}=\sqrt{M},$$

$$\|v'\|_2\leqslant\sqrt{\frac{c}{1-\frac{a+b}{\pi^2}}}=\sqrt{M}.$$

因此，$\forall t\in I$，有

$$|u(t)|=\left|\int_0^tu'(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^1|u'(s)|\mathrm{d}s\leqslant\|u'\|_2\leqslant\sqrt{M}.$$

$$|v(t)|=\left|\int_0^tv'(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^1|v'(s)|\mathrm{d}s\leqslant\|v'\|_2\leqslant\sqrt{M}.$$

所以

$$\|u\|_c\leqslant\sqrt{M},\|v\|_c\leqslant\sqrt{M}.$$

故

$$\|(u,v)\|=\max\{\|u\|_c,\|v\|_c\}\leqslant\sqrt{M},$$

即方程簇(7)的解集在 $C(I)\times C(I)$中有界. 由 Leray-Schauder 不动点定理，A 在 $C(I)\times C(I)$中有不动点，该不动点为问题(1)的解.

定理 1.2 的证明　先证(H2)⇒(H1). $\forall(t,x,y)\in I\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，在(H2)中取$x_1=y_1=0,x_2=x,y_2=y$并令$C_0=\max\limits_{t\in I}\{|f(t,0,0)|,|g(t,0,0)|\}+1$. 则由条件(H2)有

$$\begin{aligned}&f(t,x,y)x+g(t,x,y)y=(f(t,x,y)-f(t,0,0))x+(g(t,x,y)-g(t,0,0))y+f(t,0,0)x+g(t,0,0)y\leqslant ax^2+by^2+\\&|f(t,0,0)x|+|g(t,0,0)y|\leqslant ax^2+by^2+C_0|x|+C_0|y|=ax^2+by^2+\\&2\cdot\frac{\sqrt{\pi^2-(a+b)}}{2}|x|\cdot\frac{C_0}{\sqrt{\pi^2-(a+b)}}+2\cdot\frac{\sqrt{\pi^2-(a+b)}}{2}|y|\cdot\frac{C_0}{\sqrt{\pi^2-(a+b)}}\leqslant\\&ax^2+by^2+\frac{\pi^2-(a+b)}{4}x^2+\frac{C_0^2}{\pi^2-(a+b)}+\frac{\pi^2-(a+b)}{4}y^2+\frac{C_0^2}{\pi^2-(a+b)}=\end{aligned}$$

$$\left(a+\frac{\pi^2-(a+b)}{4}\right)x^2+\left(b+\frac{\pi^2-(a+b)}{4}\right)y^2+\frac{2C_0^2}{\pi^2-(a+b)}.$$

令$a_1=a+\frac{\pi^2-(a+b)}{4}$, $b_1=b+\frac{\pi^2-(a+b)}{4}$, $c_1=\frac{2C_0^2}{\pi^2-(a+b)}$，则由上式得

$$f(t,x,y)x+g(t,x,y)y\leqslant a_1x^2+b_1y^2+c_1,(t,x,y)\in I\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}.$$

因为$a_1+b_1=a+b+\frac{\pi^2-(a+b)}{2}=\frac{\pi^2+a+b}{2}<\pi^2$，所以 f 与 g 满足条件(H1). 由定理 1.1 可知，问题(1)至少存在一个解.

再证解的唯一性. 设$(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in C^2(I)\times C^2(I)$为问题(1)的两个解. 则有方程

$$\begin{cases}-u''_1(t)=f(t,u_1(t),v_1(t)),t\in I,\\ -v''_1(t)=g(t,u_1(t),v_1(t)),t\in I,\\ u_1(0)=u_1(1)=0,v_1(0)=v_1(1)=0\end{cases}\tag{10}$$

及

$$\begin{cases}-u''_2(t)=f(t,u_2(t),v_2(t)),t\in I,\\ -v''_2(t)=g(t,u_2(t),v_2(t)),t\in I,\\ u_2(0)=u_2(1)=0,v_2(0)=v_2(1)=0\end{cases}\tag{11}$$

将方程(11)第一式与方程(10)第一式相减，方程(11)第二式与方程(10)第二式相减，得

$$-(u''_2(t)-u''_1(t))=f(t,u_2(t),v_2(t))-f(t,u_1(t),v_1(t)),t\in I\tag{12}$$

$$-(v''_2(t)-v''_1(t))=g(t,u_2(t),v_2(t))-g(t,u_1(t),v_1(t)),t\in I\tag{13}$$

将方程(12)两边同乘$u_2(t)-u_1(t)$，方程(13)两边同乘$v_2(t)-v_1(t)$，两式相加，由条件(H2)得

$$-(u''_2(t)-u''_1(t))(u_2(t)-u_1(t))-(v''_2(t)-v''_1(t))(v_2(t)-v_1(t))=(f(t,u_2(t),v_2(t))-f(t,u_1(t),v_1(t)))(u_2(t)-u_1(t))+(g(t,u_2(t),v_2(t))-g(t,u_1(t),v_1(t)))(v_2(t)-v_1(t))\leqslant a\,(u_2(t)-u_1(t))^2+b\,(v_2(t)-v_1(t))^2,t\in I.$$

上式在 I 上积分，左边利用分部积分和方程(10)(11)的边界条件得

$$\|u_2'-u_1'\|_2^2+\|v_2'-v_1'\|_2^2\leqslant a\,\|u_2-u_1\|_2^2+b\,\|v_2-v_1\|_2^2\leqslant(a+b)(\|u_2-u_1\|_2^2+\|v_2-v_1\|_2^2)\leqslant\frac{a+b}{\pi^2}(\|u_2'-u_1'\|_2^2+\|v_2'-v_1'\|_2^2),$$

即

$$\left(1-\frac{a+b}{\pi^2}\right)(\|u_2'-u_1'\|_2^2+\|v_2'-v_1'\|_2^2)\leqslant 0.$$

又因为$\|u_2'-u_1'\|_2^2+\|v_2'-v_1'\|_2^2\geqslant 0$，故

$$\|u_2'-u_1'\|_2^2+\|v_2'-v_1'\|_2^2=0.$$

从而$u_2'-u_1'=0$, $v_2'-v_1'=0$，即$u_2-u_1=C_1$, $v_2-v_1=C_2$，其中C_1, C_2为常数. 由边界条件得$C_1=C_2=0$. 因此$u_2=u_1$, $v_2=v_1$. 即问题(1)存在唯一解.

3　例

例 3.1　考虑如下二阶微分方程组

$$\begin{cases}-u''(t)=3u(t)-u^3(t)v^2(t)+\sin\pi t,t\in[0,1],\\ -v''(t)=-u^2(t)v(t)+6v(t)-2\,v^3(t)+2\sin\pi t,t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=0,v(0)=v(1)=0\end{cases}\tag{14}$$

方程(14)相应的非线性项为

$$f(t,x,y)=3x-x^3y^2+\sin\pi t,g(t,x,y)=-x^2y+6y-2\,y^3+2\sin\pi t\tag{15}$$

因为 f 与 g 不是非负的，文献[1-10]的结果对问题(14)不适用.

下面我们验证 $f(t,x,y)$与 $g(t,x,y)$满足条件(H1). 取 $a=3+\frac{\pi^2-9}{4}$, $b=6+\frac{\pi^2-9}{4}$, $c=\frac{5}{\pi^2-9}$，则 $a+b=9+\frac{\pi^2-9}{2}=\frac{\pi^2+9}{2}<\pi^2$. 由(15)式可得

$$f(t,x,y)x+g(t,x,y)y=3\,x^2-x^4y^2+x\sin\pi t-x^2y^2+6\,y^2-2\,y^4+2y\sin\pi t\leqslant 3\,x^2+6\,y^2+x\sin\pi t+2y\sin\pi t\leqslant 3\,x^2+6\,y^2+|x|+2|y|=3\,x^2+6\,y^2+2\cdot\frac{\sqrt{\pi^2-9}}{2}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi^2-9}}+2\cdot\frac{\sqrt{\pi^2-9}}{2}|y|\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi^2-9}}\leqslant 3\,x^2+6\,y^2+\frac{\pi^2-9}{4}x^2+\frac{1}{\pi^2-9}+\frac{\pi^2-9}{4}y^2+\frac{4}{\pi^2-9}=\left(3+\frac{\pi^2-9}{4}\right)x^2+\left(6+\frac{\pi^2-9}{4}\right)y^2+\frac{5}{\pi^2-9}=a\,x^2+b\,y^2+c.$$

因而 $f(t,x,y)$与 $g(t,x,y)$满足条件(H1). 由定理 1.1 知方程(14)有解.

例 3.2　考虑如下二阶微分方程组

$$\begin{cases}-u''(t)=5u(t)-u^3(t)-v(t)+1,t\in[0,1],\\ -v''(t)=u(t)+4v(t)-v^5(t)+t,t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=0,v(0)=v(1)=0\end{cases}\tag{16}$$

方程(16)相应的非线性项为

$$f(t,x,y)=5x-x^3-y+1,g(t,x,y)=x+4y-y^5+t \tag{17}$$

下面验证 $f(t,x,y)$ 与 $g(t,x,y)$ 满足条件(H2). $\forall(t,x_i,y_i)\in[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}, i=1,2$. 由(17)式可得

$$\begin{aligned}&(f(t,x_2,y_2)-f(t,x_1,y_1))(x_2-x_1)+\\&(g(t,x_2,y_2)-g(t,x_1,y_1))(y_2-y_1)=\\&(5(x_2-x_1)-(x_2^3-x_1^3)-(y_2-y_1))\\&(x_2-x_1)+((x_2-x_1)+4(y_2-y_1)-\\&(y_2^5-y_1^5))(y_2-y_1).\end{aligned}$$

对函数 $-x^3$ 在 x_1 与 x_2 之间应用微分中值定理得

$$-(x_2^3-x_1^3)=-3\xi^2(x_2-x_1).$$

对函数 $-y^5$ 在 y_1 与 y_2 之间也应用微分中值定理得

$$-(y_2^5-y_1^5)=-5\eta^4(y_2-y_1).$$

结合以上诸式有

$$\begin{aligned}&(f(t,x_2,y_2)-f(t,x_1,y_1))(x_2-x_1)+\\&(g(t,x_2,y_2)-g(t,x_1,y_1))(y_2-y_1)=\\&5(x_2-x_1)^2-3\xi^2(x_2-x_1)^2+\\&4(y_2-y_1)^2-5\eta^4(y_2-y_1)^2\leqslant\\&5(x_2-x_1)^2+4(y_2-y_1)^2.\end{aligned}$$

因而 $f(t,x,y)$ 与 $g(t,x,y)$ 满足条件(H2). 由定理 1.2 知方程(16)有唯一解.

参考文献：

[1] Fink A M, Gatica J A. Positive solutions of second order systems of boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1993, 180: 93.

[2] Ma R Y. Multiple nonnegative solutions of second-order systems of boundary value problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2000, 42: 1003.

[3] 杨志林，孙经先. 非线性二阶常微分方程组边值问题的正解[J]. 数学学报，2004，47：111.

[4] 刘炳妹，刘立山. 二阶方程组解的存在唯一性 [J]. 工程数学学报，2007，24：757.

[5] Zhou Y M, Xu Y. Positive solutions of three-point boundary value problems for systems of nonlinear second order ordinary differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 320: 578.

[6] Li B Wu, Tao S, He X. The existence and uniqueness of solutions to systems of second-order ordinary differential equations boundary value problem in abstract space [J]. Chin Quart J of Math, 2011, 26: 573.

[7] Cheng X Y. Existence of positive solutions for a second-order ordinary differential system [J]. J Math Anal Appl, 2005, 312: 14.

[8] Cheng X Y, Zhang Z T. Positive solutions for a multi-parameter system of second-order ordinary differential equations [J]. Sci China Math, 2011, 54: 959.

[9] 程锡友. 超-次线性二阶椭圆型方程组的正解[J]. 兰州大学学报，2008，44：113.

[10] Cheng X Y. Existence of positive solutions for a class of second-order ordinary differential systems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2008, 69: 3042.

引用本文格式：

中　文：王丹，李永祥. 一类二阶非线性常微分方程组边值问题解的存在性与唯一性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：041001.

英　文：Wang D, Li Y X. Existence and uniqueness of solutions for boundary value problems of second-order nonlinear ordinary differential systems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 041001.