一致分数阶微分方程两点边值问题解的存在性

吴玉翠，周文学，豆　静
(兰州交通大学数理学院，兰州 730070)

摘　要：本文运用 Leray-Schauder 非线性择抉理论和 Leray-Schauder 度理论得到了一致分数阶微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha}+\lambda)\, u(t)=f(t,u(t)),\ 0<t<1, \\ u(0)=0,\ D^{\alpha}u(1)=0 \end{cases}$$

解的存在性，其中 $\alpha,\beta\in(0,1]$，λ 是实数，D^{α},D^{β}是一致分数阶导数，$u(t)\in E=C([0,1],\mathbf{R})$，$f(t,u(t))$：$[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是给定的连续函数. 最后本文给出一个例子作为应用.

关键词：一致分数阶微分方程；两点边值问题；Leray-Schauder 非线性择抉理论；Leray-Schauder 度理论
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.011005

Existence of solutions for the two-point boundary value problem of a conformable fractional differential equation

WU Yu-Cui, *ZHOU Wen-Xue*, *DOU Jing*
(College of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, by using the Leray-Schauder's nonlinear alternative theory and Leray-Schauder degree theory, we obtain the existence of solutions for the following two-point boundary value problem of conformable fractional differential equation:

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha}+\lambda)\, u(t)=f(t,u(t)),\ 0<t<1, \\ u(0)=0,\ D^{\alpha}u(1)=0, \end{cases}$$

where $\alpha,\beta\in(0,1]$, λ is a real number, D^{α},D^{β} are conformable fractional derivatives, $u\in E=([0,1],\mathbf{R})$, $f(t,u(t))$: $[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ is a continuous function. An example is given to verify the results.

Keywords: Conformable Fractional differential equation; Two-point boundary value problem; Leray-Schauder's nonlinear alternative theory; Leray-Schauder degree theory
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

分数阶微分方程边值问题是分数阶微分方程理论中的一个重要问题，其绝大部分工作均基于 Riemann-Liouville 或 Caputo 分数阶导数[1-9]. 2014 年，Khalil 等[10]提出了一种与整数阶导数相容的分数阶导数的定义，即一致分数阶导数. 此分数阶导数满足整数阶导数的基本性质，但与其他分数阶导数之间的关联还未完全明确. 由于其在牛顿力学[11]，量子力学[12]，任意时间尺度问题[13]，

收稿日期：2021-01-06
基金项目：国家自然科学基金(11961039，11801243)；兰州交通大学校青年科学基金(2017012)
作者简介：吴玉翠(1997－)，女，山东临沂人，硕士研究生，主要研究方向为分数阶微分方程定性理论. E-mail：ttwu2020@126.com
通讯作者：周文学. E-mail：wxzhou2006@126.com

混沌系统[14]，随机过程[15]，扩散迁移[16-18]等领域的应用，一致分数阶微分方程解的定性性质自然成为应用数学研究的重要课题.

2015 年，Batarfi 等[19]运用压缩映射原理得到了一致分数阶微分方程三点边值问题

$$\begin{cases} D^{\alpha}(D+\lambda)x(t)=f(t,x(t)),\ t\in[0,\ 1], \\ x(0)=0,\ x'(0)=0,\ x(1)=\beta x(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 $\alpha\in(1,2]$，D^{α} 是一致分数阶导数，$D=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$是一阶导数，$f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是已知的连续函数，λ,η 和 β 是实数，$\lambda>0$，$\eta\in(0,\ 1)$. 2017 年，Li 等[20]运用 Leray-Schauder 非线性择抉理论和 Leray-Schauder 度理论讨论了分数阶 Langevin 方程无穷点边值问题

$$\begin{aligned} &{}^{c}D_{0+}^{\gamma}({}^{c}D_{0+}^{\alpha}+\lambda)\ u(t)=f(t,u(t)),\ 0<t<1, \\ &\quad u(0)=0,\ {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(0)=0, \\ &\quad {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\,{}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(\xi_i) \end{aligned} \tag{2}$$

解的存在性，其中 $1<\gamma\leqslant 2$，$0<\alpha\leqslant 1$，${}^{c}D_{0+}^{\alpha}$ 是 Caputo 分数阶导数，λ 是实数. 受以上工作的启发，本文运用 Leray-Schauder 非线性择抉理论和 Leray-Schauder 度理论研究了一致分数阶微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha}+\lambda)u(t)=f(t,u(t)),\ 0<t<1, \\ u(0)=0,\ D^{\alpha}u(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

解的存在性，其中 $0<\alpha\leqslant 1$，$0<\beta\leqslant 1$，D^{α},D^{β}为一致分数阶导数.

2　预备知识

定义 2.1[10]　设 $\alpha\in(0,1]$，函数 $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$. 则 f 的 α 阶一致分数阶导数定义为

$$D^{\alpha}f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}.$$

定理 2.2[10]　设 $\alpha\in(0,1]$，函数 f 和 g 在$(0,\infty)$上 α 次可微. 则

(i) $D^{\alpha}(af+bg)=aD^{\alpha}(f)+bD^{\alpha}(g)$，$\forall\, a,b\in\mathbf{R}$;

(ii) $D^{\alpha}(t^{p})=pt^{p-\alpha}$，$\forall\, p\in\mathbf{R}$;

(iii) $D^{\alpha}(\lambda)=0$，$\forall\,\lambda\in\mathbf{R}$;

(iv) $D^{\alpha}(fg)=fD^{\alpha}(g)+gD^{\alpha}(f)$;

(v) $D^{\alpha}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{gD^{\alpha}(f)-fD^{\alpha}(g)}{g^{2}}$;

(vi) $D^{\alpha}(f)(t)=t^{1-\alpha}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$.

定义 2.3[21]　设 $\alpha\in(0,\ 1]$，函数 $f:[0,\ \infty)\to\mathbf{R}$. 则函数 f 的 α 阶一致分数阶积分定义为

$$(I^{\alpha}f)(t)=\int_0^t x^{\alpha-1}f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2.4[21]　设 $\alpha\in(0,\ 1]$，函数 $f:[0,\ \infty)\to\mathbf{R}$ 连续. 则对任意 $t\in[0,\infty)$有

$$D^{\alpha}I^{\alpha}(f)(t)=f(t).$$

定理 2.5[21]　设 $\alpha\in(0,\ 1]$，函数 $f:[0,\ \infty)\to\mathbf{R}$ 连续且 α 次可微. 则对任意 $t\in[0,\infty)$有

$$I^{\alpha}D^{\alpha}(f)(t)=f(t)+c,$$

其中 c 为常数.

引理 2.6[22]　设 E 是 Banach 空间，$C\subset E$ 为凸闭集，U 是一个相对于 C 的开集且 $0\in U$. 若 $T:\bar{U}\to E$ 是一个全连续算子，且 $T(\bar{U})$有界. 则

(C1) T 在 $\bar{U}$ 中存在一个不动点；

或

(C2) 存在一个 $u\in\partial U$ 和 $\lambda\in(0,\ 1)$，使得 $u=\lambda Tu$.

引理 2.7　设 $h(t)\in C(0,\ 1)\cap L^{1}(0,\ 1)$. 则一致分数阶微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha}+\lambda)u(t)=h(t),\ 0<t<1, \\ u(0)=0,\ D^{\alpha}u(1)=0 \end{cases} \tag{4}$$

存在解 $u(t)$满足

$$u(t)=\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t^{\alpha}-s^{\alpha})s^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t s^{\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\alpha}\left[\lambda u(1)-\int_0^1 s^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s\right]t^{\alpha} \tag{5}$$

证明　因 $0<\beta\leqslant 1$，由定理 2.5 可得

$$(D^{\alpha}+\lambda)u(t)=I^{\beta}h(t)+c_0,$$

其中 $c_0\in\mathbf{R}$. 由边界条件 $D^{\alpha}u(1)=0$ 可得

$$c_0=\lambda u(1)-\int_0^1 s^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s.$$

则

$$(D^{\alpha}+\lambda)u(t)=I^{\beta}h(t)+\lambda u(1)-\int_0^1 s^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s,$$

因而

$$D^{\alpha}u(t)+\lambda u(t)=I^{\beta}h(t)+\lambda u(1)-\int_0^1 s^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s.$$

类似地，由 $\alpha\in(0,\ 1]$可得

$$u(t)=I^{\alpha}I^{\beta}h(t)-\lambda I^{\alpha}u(t)+\frac{1}{\alpha}\left[\lambda u(1)-\int_0^1 s^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s\right]t^{\alpha}+c_1,$$

其中 $c_1\in\mathbf{R}$. 利用边值条件 $u(0)=0$ 可得 $c_1=0$. 因此，$u(t)$满足

$$u(t)=I^{\alpha}I^{\beta}h(t)-\lambda I^{\alpha}u(t)+$$

$$\frac{1}{\alpha}\left[\lambda u(1)-\int_0^1 s^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s\right]t^\alpha,$$

即

$$u(t)=\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t^\alpha-s^\alpha)s^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t s^{\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s+\frac{t^\alpha}{\alpha}c_0+c_1,$$

其中

$$c_0=\lambda u(1)-\int_0^1 s^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s,\ c_1=0.$$

3　主要结果

设 $E=C([0,1],\mathbf{R})$是$[0,1]$上所有连续函数按范数 $\|u\|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$ 构成的 Banach 空间. 定义积分算子 $T:E\to E$ 如下：

$$Tu(t)=\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t^\alpha-s^\alpha)s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t s^{\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\alpha}\left[\lambda u(1)-\int_0^1 s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right]t^\alpha \tag{6}$$

众所周知，u 是边值问题（3）式的一个解当且仅当它是算子 T 的一个不动点.

为了方便，我们记

$$\Lambda_1=\frac{1}{(\alpha+\beta)\beta},\ \Lambda_2=\frac{2}{\alpha},\ \Lambda_3=\frac{1}{\alpha\beta}.$$

定理 3.1　假设以下条件成立：

(H1) $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是给定的连续函数，λ 为正实数；

(H2) 存在正函数 $\omega(t)\in C[0,1]$和非减函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，使得对任意$(t,u)\in[0,1]\times\mathbf{R}$，有

$$|f(t,u)|\leqslant\omega(t)\varphi(\|u\|);$$

(H3) 存在常数 $M>0$，使得

$$\frac{M}{\|\omega\|\varphi(M)(\Lambda_1+\Lambda_3)+\lambda M\Lambda_2}>1;$$

则边值问题(3) 式在$[0,1]$上至少有一个解.

证明　由算子 T 的定义和 $f(t,u(t))$的连续性容易证明 T 是连续的.

首先，T 把 E 中的有界集映为有界集. 对于任意数 $h>0$，设 $B_h=\{u\in E:\|u\|\leqslant h\}$是 E 中的有界闭球. 则对任意 $t\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}|Tu(t)|\leqslant&\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t^\alpha-s^\alpha)s^{\beta-1}|f(s,u(s))|\mathrm{d}s+\lambda\int_0^t s^{\alpha-1}|u(s)|\mathrm{d}s+\frac{1}{\alpha}\left|\lambda u(1)+\int_0^1 s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right|t^\alpha\leqslant\\&\|\omega\|\varphi(\|u\|)\frac{t^{\alpha+\beta}}{\beta(\alpha+\beta)}+\frac{\lambda\|u\|}{\alpha}t^\alpha+\frac{1}{\alpha}\left(\lambda\|u\|+\frac{\|\omega\|\varphi(\|u\|)}{\beta}\right)t^\alpha\leqslant\\&\|\omega\|\varphi(h)\frac{t^{\alpha+\beta}}{\beta(\alpha+\beta)}+\frac{\lambda h}{\alpha}t^\alpha+\frac{1}{\alpha}\left(\lambda h+\frac{\|\omega\|\varphi(h)}{\beta}\right)t^\alpha\leqslant\\&\frac{\|\omega\|\varphi(h)}{\beta(\alpha+\beta)}+\frac{2\lambda h}{\alpha}+\frac{\|\omega\|\varphi(h)}{\alpha\beta}\leqslant\\&\|\omega\|\varphi(h)(\Lambda_1+\Lambda_3)+\lambda h\Lambda_2.\end{aligned}$$

因此，

$$\|Tu\|\leqslant\|\omega\|\varphi(h)\Lambda_1+\lambda h\Lambda_2+h\Lambda_3 \tag{7}$$

下面证明 T 是等度连续的. 对任意的 $u\in B_h$，$t_1,t_2\in[0,1]$，$t_1<t_2$，有

$$\begin{aligned}|Tu(t_2)-Tu(t_1)|\leqslant&\frac{1}{\alpha}\left|\int_0^{t_2}(t_2^\alpha-s^\alpha)s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s-\int_0^{t_1}(t_1^\alpha-s^\alpha)s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right|+\\&\lambda\left|\int_0^{t_2}s^{\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s-\int_0^{t_1}s^{\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s\right|+\\&\frac{1}{\alpha}\left|\left[\lambda u(1)-\int_0^1 s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right](t_2^\alpha-t_1^\alpha)\right|\leqslant\\&\left|\int_0^{t_1}\frac{(t_2^\alpha-t_1^\alpha)}{\alpha}s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2^\alpha-s^\alpha)}{\alpha}s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right|+\\&\lambda\left|\int_{t_1}^{t_2}s^{\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s\right|+\\&\frac{1}{\alpha}\left|\left[\lambda u(1)+\int_0^1 s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right](t_2^\alpha-t_1^\alpha)\right|\leqslant\\&\int_0^{t_1}\frac{(t_2^\alpha-t_1^\alpha)}{\alpha}s^{\beta-1}|f(s,u(s))|\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2^\alpha-s^\alpha)}{\alpha}s^{\beta-1}|f(s,u(s))|\mathrm{d}s+\\&\lambda\int_{t_1}^{t_2}s^{\alpha-1}|u(s)|\mathrm{d}s+\frac{1}{\alpha}\left|\left[\lambda u(1)+\int_0^1 s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\right](t_2^\alpha-t_1^\alpha)\right|\leqslant\\&\frac{\|\omega\|\varphi(\|u\|)}{(\alpha+\beta)\beta}(t_2^{\alpha+\beta}-t_1^{\alpha+\beta})+\frac{2\lambda\|u\|}{\alpha}(t_2^\alpha-t_1^\alpha)+\frac{\|\omega\|\varphi(\|u\|)}{\alpha\beta}(t_2^\alpha-t_1^\alpha)\leqslant\\&\|\omega\|\varphi(h)\Lambda_1(t_2^{\alpha+\beta}-t_1^{\alpha+\beta})+\lambda h\Lambda_2(t_2^\alpha-t_1^\alpha)+\|\omega\|\varphi(h)\Lambda_3(t_2^\alpha-t_1^\alpha),\end{aligned}$$

即当 $t_1\to t_2$ 时 $|Tu(t_2)-Tu(t_1)|\to 0$. 由 Arzela-Ascoli 定理可知，T 是相对紧的，从而 $T:E\to E$ 是一个全连续算子.

设 u 是边值问题（3）式的一个解. 则对 $t\in[0,1]$，类似于前面的方法可得

$$|u(t)|\leqslant\|\omega\|\varphi(h)\Lambda_1+\lambda h\Lambda_2+h\Lambda_3,$$

即

$$\frac{\|u\|}{\|\omega\|\varphi(\|u\|)\Lambda_1+\lambda\|u\|\Lambda_2+\|u\|\Lambda_3}\leqslant 1.$$

由条件(H3) 知，存在常数 M 使得 $\|u\|\neq M$. 设 $B_M=\{u\in E:\|u\|<M\}$. 因为算子 $T:\bar{B}_M\to E$ 是全连续的，从 B_M 的选择来看，对于某个 $v\in(0,1)$，不存在 $u\in\bar{B}_M$使得 $u=vTu$. 由引理 2.6 知算子 T 至少有一个不动点 $u\in\bar{B}_M$，故边值问题 (3) 式至少有一个解. 证毕.

下面我们利用 Leray-Schauder 度理论讨论边值问题 (3) 式的解的存在性.

定理 3.2　假设条件（H1）成立，并且以下条件也成立：

(H4) 存在常数 $\eta\in\left[0,\frac{1-\lambda\Lambda_2}{\Lambda_1+\Lambda_3}\right]$ 和 $L>0$，使得对任意$(t,u)\in[0,1]\times\mathbf{R}$，有

$$|f(t,u)|\leqslant\eta\|u\|+L \tag{8}$$

则边值问题(3) 式在$[0,1]$上至少有一个解.

证明　考虑算子方程 $u=Tu$. 我们只需证明至少存在一个不动点 $u\in E$ 满足 (3) 式. 先证明对于任意 $u\in\partial B_r,\gamma\in[0,1]$，算子 $T:\bar{B}_r\to E$ 满足 $u\neq\gamma Tu$. 设球

$$B_r=\{u\in E:\|u\|<r\}\subset E,$$

其中常数半径 $r>0$. 由定理 3.1 的证明知 T 是全连续的. 则我们可以定义一个连续映射 h_γ，

$$h_\gamma(u)=u-\gamma Tu.$$

由拓扑度的同伦不变性可知：

$$\deg(h_\gamma,B_r,\theta)=\deg(I-\gamma T,B_r,\theta)=\deg(h_1,B_r,\theta)=\deg(h_0,B_r,\theta)=\deg(I,B_r,\theta)=1\neq\theta,$$

其中 $\theta\in B_r$ 为零元素，I 为单位算子. 根据 Leray-Schauder 度的可解性，至少存在一个 $u\in B_r$，使得 $h_1(u)=u-Tu=\theta$. 假设存在 $\gamma\in[0,1]$，对任意 $t\in[0,1]$，有 $u=\gamma Tu$. 则

$$\begin{aligned}|u(t)|&=|\gamma(Tu)(t)|\leqslant\\&\frac{1}{\alpha}\int_0^t(t^\alpha-s^\alpha)s^{\beta-1}|f(s,u(s))|\mathrm{d}s+\\&\lambda\int_0^t s^{\alpha-1}|u(s)|\mathrm{d}s+\frac{1}{\alpha}\Big|\lambda u(1)+\\&\int_0^1 s^{\beta-1}f(s,u(s))\mathrm{d}s\Big|t^\alpha\leqslant\\&(\eta\|u\|+L)\frac{t^{\alpha+\beta}}{\beta(\alpha+\beta)}+\\&\frac{\lambda\|u\|}{\alpha}t^\alpha+\frac{1}{\alpha}\left(\lambda\|u\|+\frac{\eta\|u\|+L}{\beta}\right)t^\alpha\leqslant\\&\frac{\eta\|u\|+L}{\beta(\alpha+\beta)}+\frac{2\lambda\|u\|}{\alpha}+\frac{\eta\|u\|+L}{\alpha\beta}\leqslant\\&(\eta\|u\|+L)(\Lambda_1+\Lambda_3)+\lambda\|u\|\Lambda_2.\end{aligned}$$

所以

$$\|u\|\leqslant(\eta\|u\|+L)(\Lambda_1+\Lambda_3)+\lambda\|u\|\Lambda_2.$$

因此

$$\|u\|\leqslant\frac{L(\Lambda_1+\Lambda_3)}{1-\eta(\Lambda_1+\Lambda_3)-\lambda\Lambda_2} \tag{9}$$

如果 $r=\frac{L(\Lambda_1+\Lambda_3)}{1-\eta(\Lambda_1+\Lambda_3)-\lambda\Lambda_2}+1$，那么对于任意 $u\in\partial B_r,\gamma\in[0,1]$，都有 $u\neq\gamma Tu$. 故边值问题 (3) 式至少有一个解. 证毕.

4　例

设 $E=C([0,1],\mathbf{R})$ 按范数 $\|u\|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$ 构成 Banach 空间. 考虑下面的一致分数阶微分方程两点边值问题解的存在性：

$$\begin{cases}D^{\frac{5}{6}}\left(D^{\frac{4}{5}}+\frac{1}{10}\right)u(t)=\frac{u}{8(1+t^2)^5}+\\ \quad u(t)\left(\frac{\sqrt{30}}{20}-\frac{1}{4}t^{\frac{3}{2}}\right)^2+1,\ 0<t<1,\\ u(0)=0,\ D^\alpha u(1)=0.\end{cases}$$

由题知

$$\Lambda_1=\frac{1}{(\alpha+\beta)\beta}=\frac{36}{49},\ \Lambda_2=\frac{2}{\alpha}=\frac{5}{2},$$

$$\Lambda_3=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{3}{2}.$$

取 $\eta=\frac{1}{5}<\frac{1-\lambda\Lambda_2}{\Lambda_1+\Lambda_3}\approx 0.336$，$L=2$，则

$$\begin{aligned}&\|f(t,u(t))\|=\\&\left\|\frac{u}{8(1+t^2)^5}+u(t)\left(\frac{\sqrt{30}}{20}-\frac{1}{4}t^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\|\leqslant\\&\frac{1}{8}\|u\|+\frac{3\|u\|}{40}+1\leqslant\frac{1}{5}\|u\|+2=\\&\eta\|u\|+L.\end{aligned}$$

故函数 $f(t,u)$满足条件（H1）和（H4）. 由定理 3.2 知边值问题在$[0,1]$上至少有一个解.

参考文献：

[1]　Agarwal R P, Benchohra M, Hamani S. Boundary value problems for fractional differential equations [J]. Georgian Math J, 2009, 16: 401.

[2] Zhao Y, Sun S, Han Z, *et al*. The existence of multiple positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations [J]. Commun Nonlinear Sci, 2011, 16: 2086.
[3] Zhao Y, Sun S, Han Z, *et al*. Positive solutions to boundary value problems of nonlinear fractional differential equations [J]. Abstr Appl Anal, 2011, 2011: 1.
[4] Zhao Y, Sun S, Han Z, *et al*. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations [J]. Appl Math Comput, 2011, 217: 6950.
[5] Feng W, Sun S, Han Z, *et al*. Existence of solutions for a singular system of nonlinear fractional differential equations [J]. Comput Math Appl, 2011, 62: 1370.
[6] Zhang X, Liu L, Wu Y. Multiple positive solutions of a singular fractional differential equation with negatively perturbed term [J]. Math Comput Model, 2011, 55: 1263.
[7] Zhang S. Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations [J]. Electron J Differ Eq, 2006, 2006: 1.
[8] Pan Y, Han Z, Sun S, *et al*. The existence and uniqueness of solutions to boundary value problems of fractional difference equations [J]. Math Sci, 2012, 6: 1.
[9] 禾丁予. 一类高分数阶微分方程边值问题解的存在性 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 443.
[10] Khalil R, Horani M A, Yousef A, *et al*. A new definition of fractional derivative [J]. J Comput Appl Math, 2014, 264: 65.
[11] Chung W S. Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative [J]. J Comput Appl Math, 2015, 290: 150.
[12] Anderson D R, Ulness D J. Properties of the Katugampola fractional derivative with potential application in quantum mechanics [J]. J Math Phys, 2015, 56: 1.
[13] Benkhettou N, Hassani S, Torres D F M. A conformable fractional calculus on arbitrary time scales [J]. J King Saud Univ: Sci, 2016, 28: 93.
[14] He S, Sun K, Mei X, *et al*. Numerical analysis of a fractional-order chaotic system based on conformable fractional-order derivative [J]. Eur Phys J Plus, 2017, 132: 1.
[15] Çenesiz Y, Kurt A, Nane E. Stochastic solutions of conformable fractional Cauchy problems [J]. Stat Probab Lett, 2017, 124: 126.
[16] Zhou H W, Yang S, Zhang S Q. Conformable derivative approach to anomalous diffusion [J]. Physica A, 2018, 491: 1001.
[17] Lyiola O S, Tasbozan O, Kurt A, *et al*. On the analytical solutions of the system of conformable time-fractional Robertson equations with 1-D diffusion [J]. Chaos Soliton Fract, 2017, 94: 1.
[18] Avci D, Iskender B B, Özdemir N. The Dirichlet problem of a conformable advection-diffusion equation [J]. Therm Sci, 2016, 21: 1.
[19] Batarfi H, Jorge L, Nieto J J, *et al*. Three-Point boundary value problems for conformable fractional differential equations [J]. J Funct Space, 2015, 2015: 1.
[20] Li B, Sun S, Sun Y. Existence of solutions for fractional Langevin equation with infinite-point boundary conditions [J]. J Appl Math Comput, 2017, 53: 683.
[21] Abdeljawad T. On conformable fractional calculus [J]. J Comput Appl Math, 2015, 279: 57.
[22] Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications. Part I: Fixed-Point Theorems [J]. Acta Appl Math, 1991, 24: 312.

引用本文格式：
中　文：吴玉翠，周文学，豆静．一致分数阶微分方程两点边值问题解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2022，59：011005.
英　文：Wu Y C, Zhou W X, Dou J. Existence of solutions for the two-point boundary value problem of a conformable fractional differential equation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 011005.