态射范畴的极大 rigid 对象

李伟宇
(四川大学数学学院, 成都 610064)

摘　要: 对任意数域 k 上的有限维代数 Λ, 记 M 为 Λ 的有限生成投射模态射范畴. 本文利用 Λ 的支撑 τ-倾斜模给出了 M 的极大 rigid 对象的分类. 特别地, M 的极大 rigid 对象与 Λ 的支撑 τ-倾斜模之间存在一一对应关系. 作为结果, M 中的任意 rigid 对象都可以扩充为极大 rigid 对象, 且任意的基本极大 rigid 对象的不可分解直和项个数恰好为 $2|\Lambda|$.

关键词: 态射范畴; 极大 rigid 对象; 支撑 τ-倾斜模
中图分类号: O154.2　　**文献标识码**: A　　DOI: 10.19907/j.0490-6756.2021.051005

On maximal rigid objects of morphism category

LI Wei-Yu
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: For a finite-dimensional algebra Λ over a field k, let M be the morphism category of finitely generated projective Λ-modules. We classify the maximal rigid objects of M by support τ-tilting Λ-modules. In particular, there is a bijection between the set of maximal rigid objects of M and the set of support τ-tilting Λ-modules. As a result, every rigid object of M can be expanded into a maximal rigid object and each basic maximal rigid object of M has precisely $2|\Lambda|$ indecomposable direct summands.

Keywords: Morphism category; Maximal rigid object; Support τ-tilting module
(2010 MSC 18E10; 18E35)

1　引　言

代数的模范畴以代数的(有限生成)模为对象, 以模同态为态射集合. 对于一个给定的有限维结合代数, 研究其模范畴的结构是代数学的一个重要课题[1]. 代数的模范畴的态射范畴以模同态为对象, 其态射集为满足交换条件的模同态对, 模范畴是其态射范畴的一个满子范畴. 因此, 模范畴的态射范畴蕴含了比模范畴更加丰富的结论, 但这也为研究态射范畴的结构带来了巨大的困难. 在文献[2]中, Bautista 系统地研究了模范畴的态射范畴的一个正合满子范畴-有限生成投射模的态射范畴. 与整个模范畴的态射范畴相比较, 有限生成投射模的态射范畴具有更好的结构. 特别地, 有限生成投射模的态射范畴是 Krull-Schmidt 范畴且其整体维数小于或者等于 1, Bautista 对该范畴的不可分解对象进行了分类并证明了此范畴具有几乎可裂序列.

量子丛代数[3]的范畴化是近年来的一个研究热点. 设 Q 为有限的无环箭图, $\Lambda=kQ$ 为路代数. Ding 等[4]通过 Λ 的有限生成投射模的态射范畴 M 的 Hall 代数给出了与 Q 相关的量子丛代数的实现[5]. 特别地, 他们建立了从范畴 M 的 Hall 代数到相应量子丛代数的代数同态. 在此代数同态下, M 的极大 rigid 对象与相应的量子丛代数的丛一一对应. 对于一般的没有长度小于或者等于 2 的

收稿日期: 2021-01-06
基金项目: 国家自然科学基金(11971326)
作者简介: 李伟宇(1996－), 男, 福建莆田人, 硕士研究生, 主要研究方向为代数表示论. E-mail: 1741162902@qq.com

有限箭图 Q,我们总是可以构造一个与 Q 相关的(量子)丛代数 A_Q. 一个自然的问题是,A_Q 是否有类似的 Hall 代数实现?

受文献[4-5]的启发,本文主要从范畴的层面上研究一般代数的有限生成投射模的态射范畴中的极大 rigid 对象. 我们的结果表明,对于某些非无环的(量子)丛代数,存在有限维代数使得其有限生成投射模的态射范畴中的极大 rigid 对象与该量子丛代数的丛有好的对应关系.

在本文中,我们总是记 k 表示一个域,Λ 为域 k 上的有限维结合代数. 记 $\mathrm{mod}\Lambda$ 表示有限生成右 Λ-模范畴. 记 P_Λ 表示由有限生成的投射模构成的 $\mathrm{mod}\Lambda$ 的满子范畴. 设 T 是一个 Krull-Schmidt 范畴,对任意的 $t\in T$,记 $|t|$ 表示 t 的不同构的不可分解直和项个数,记 add t 表示由 t 的有限直和的直和项构成的 T 的满子范畴.

2 预备知识

2.1 支撑 τ-倾斜理论

记 τ 为 $\mathrm{mod}\Lambda$ 的 Auslander-Reiten 平移函子. 设 $m\in\mathrm{mod}\Lambda$,如果 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\tau M)=0$,那么称 M 为 τ-rigid 模. 设 (M,P),其中 $M\in\mathrm{mod}\ \Lambda$,$P\in P_\Lambda$. 若 M 是 τ-rigid 且 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,M)=0$,那么称 (M,P) 为 τ-rigid 对.

引理 2.1[1] 设 (M, P) 为 Λ 的一个 τ-rigid 对,则 $|M|+|P|\leqslant|\Lambda|$. 进一步,存在 τ-rigid 对 (N, Q) 使得 $|M\oplus N|+|P\oplus Q|=|\Lambda|$,且 $(M\oplus N,P\oplus Q)$ 还是 τ-rigid 对.

对于 τ-rigid 对 (M,P),若 $|M|+|P|=|\Lambda|$,那么我们称 (M, P) 为一个支撑 τ-倾斜对,M 为支撑 τ-倾斜模. 此时在不计 P 中不可分解直和项的重数下,P 由 M 唯一确定.

记 $s\tau\text{-}tilt\Lambda$ 为 Λ 的基本的支撑 τ-倾斜对的同构类集合. 代数 Λ 的支撑 τ-倾斜图以 Λ 的基本的支撑 τ-倾斜对的同构类为顶点,两个顶点 (M, P) 和 (N, Q) 之间存在一条边当且仅当 (M, P) 和 (N, Q) 只差一个不可分解直和项. 由文献[6]知 Λ 的支撑 τ-倾斜图是 $|\Lambda|$-正则的. 特别地,每个顶点恰有 $|\Lambda|$ 边与之相连.

2.2 态射范畴

代数 Λ 的投射模态射范畴 $M\overset{\triangle}{=\!=}\mathrm{Mor}(P_\Lambda)$ 以 P_Λ 中的态射为对象. 特别地,$f:P\to Q$,其中 $P,Q\in P_\Lambda$,$f\in\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$. 设 $f_1:P_1\to Q_1$,$f_2:P_2\to Q_2\in M$,态射集 $\mathrm{Hom}_\Lambda(f_1,f_2)$ 定义为

$$\mathrm{Hom}_M(f_1,f_2)\coloneqq\{(u,v)\mid u\in\mathrm{Hon}_\Lambda(P_1,P_2),\ v\in\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1,Q_2),\text{使得 } vf_1=f_2u\},$$

即 (u,v) 为 f_1 到 f_2 的态射当且仅当有下述交换图:

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{u} & P_2 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ Q_1 & \xrightarrow{v} & Q_2 \end{array}$$

设 $P_i\xrightarrow{f_i}Q_i\in M$,$i=1,2,3$,$(u_1,v_1)\in\mathrm{Hom}_M(f_1,f_2)$,$(u_2,v_2)\in\mathrm{Hom}_M(f_2,f_3)$. 如果 $P_1\rightarrowtail P_2\twoheadrightarrow P_3$ 和 $Q_1\rightarrowtail Q_2\twoheadrightarrow Q_3$ 是 $\mathrm{mod}\Lambda$ 的短正合列,那么我们称序列

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{u1} & P_2 & \xrightarrow{u2} & P_3 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ Q_1 & \xrightarrow{v1} & Q_2 & \xrightarrow{v2} & Q_3 \end{array}$$

为态射范畴 M 的一个短正合序列. 记 E 表示 M 的所有短正合序列的类,则 (M,E) 为正合范畴,范畴 M 为 Krull-Schmidt 范畴,其对象可以分解为不可分解对象的直和且该分解在同构意义下唯一. Bautista 系统地研究了 M 的范畴结构,刻画了 M 的不可分解对象,证明了 M 具有几乎可裂序列.

对任意的 $M\in\mathrm{mod}\Lambda$,令 $P_1^M\xrightarrow{f_M}P_0^M\longrightarrow M$ 为 M 的一个极小投射预解. 令 $C_M\coloneqq P_1^M\xrightarrow{f_M}P_0^M\in M$. 显然,$C_M$ 在同构的意义下由 M 唯一确定. 对任意的 $P\in P_\Lambda$,记 $K_P\coloneqq P\xrightarrow{1_P}P$,$Z_P\coloneqq P\xrightarrow{0}0\in P$.

命题 2.2 (i) 范畴 M 的不可分解对象在同构意义下恰好为 C_M,K_P,Z_P,其中 $M\in\mathrm{mod}\Lambda$ 为不可分解模,$P\in P_\Lambda$ 为不可分解投射模.

(ii) 若 $Y\in M$ 为不可分解投射对象,则 $Y\cong C_P$ 或者 $Y\cong K_P$,其中 $P\in P_\Lambda$ 为不可分解投射模.

(iii) 若 $Z\in M$ 为不可分解入射对象,则 $Z\cong Z_P$ 或 $\mathrm{Z}\cong K_P$,其中 $P\in P_\Lambda$ 为不可分解投射模. 特别地,K_P 为范畴 M 的投射入射对象.

引理 2.3[2] 设 $M,N\in\mathrm{mod}\Lambda$. 我们有

$$\mathrm{Ext}^1(C_M,C_N)\cong D\mathrm{Hom}_\Lambda(N,\tau M).$$

记 $C^b(P_\Lambda)$ 表示 P_Λ 的有界复形范畴,$K^b(P_\Lambda)$ 为 P_Λ 的有界同伦范畴,Σ 为平移函子. 下述结果是众所周知的,参见文献[7,引理 3.1].

引理 2.4 对任意的 $X,Y\in M$,

$$\mathrm{Ext}_M^1(X,Y)\cong\mathrm{Hom}_{K^b(P_\Lambda)}(X,\Sigma Y).$$

证明 注意到 M 是 $C^b(P_\Lambda)$ 的扩张闭满子范畴,因此

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(X,Y)=\mathrm{Ext}^1_{C^b(P_\Lambda)}(X,Y)\cong \mathrm{Hom}_{K^b(P_\Lambda)}(X,\Sigma Y).$$

3　投射态射范畴中的极大 rigid 对象

定义 3.1　设 $x\in\mathcal{M}$，如果 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(X,X)=0$，那么称 X 为 rigid 的. 设 X 为 $\mathcal{M}$ 的 rigid 对象，如果对任意满足 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(X\oplus Y,X\oplus Y)=0$ 的对象 $Y\in\mathcal{M}$，总有 $Y\in\mathrm{add}\ X$，那么称 X 为范畴 $\mathcal{M}$ 的极大 rigid 对象.

由定义知 $\mathcal{M}$ 中的任意极大 rigid 对象一定包含 K_Λ 作为直和项. 我们记 max r-$\mathcal{M}$ 表示 $\mathcal{M}$ 中的极大 rigid 对象的同构类集合.

引理 3.2　设 $M\in\mathrm{mod}\ \Lambda$，则 M 是 τ-rigid 模当且仅当 C_M 是 M 中的 rigid 对象.

证明　由引理 2.3 可得 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\tau M)=0$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(C_M,C_M)=0$.

引理 3.3　设 $M\in\mathrm{mod}\ \Lambda$，$P\in P_\Lambda$，则 (M,P) 是 τ-rigid 对当且仅当 $C_M\oplus Z_P$ 是 M 中的 rigid 对象.

证明　设 $P\in P_\Lambda$，$M\in\mathrm{mod}\ \Lambda$，由引理 2.4 知

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(Z_P,C_M)\cong \mathrm{Hom}_{K^b(P_\Lambda)}(Z_P,\Sigma C_M)\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(P,M) \tag{1}$$

因此，(M,P) 是 τ-rigid 对 $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M,\tau M)=0$ 且 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,M)=0$（由定义）$\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(C_M,C_M)=0$ 且 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(Z_P,C_M)=0$（由引理 2.3 及(1)）$\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(Z_P\oplus C_M,Z_P\oplus C_M)=0$（由命题 2.2,(iii).

定理 3.4　对任意的 $(M,P)\in s\tau\text{-}tilt\Lambda$，记 $\Phi(M,P):=C_M\oplus Z_P\oplus K_\Lambda$，则 Φ 为集合 $s\tau\text{-}tilt\Lambda$ 到 max r-$\mathcal{M}$ 的双射.

证明　我们首先证明 Φ 的良定性，即 $\Phi(M,P)$ 为 $\mathcal{M}$ 的极大 rigid 对象.

设 (M,P) 为支撑 τ-倾斜对. 由引理 3.3 知 $C_M\oplus Z_P$ 为 $\mathcal{M}$ 中的 rigid 对象. 又由命题 2.2 知 K_Λ 为 $\mathcal{M}$ 的投射入射对象. 因此 $C_M\oplus Z_P\oplus K_\Lambda$ 为 $\mathcal{M}$ 的 rigid 对象. 设 $X\in\mathcal{M}$ 为不可分解对象且满足

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(C_M\oplus Z_P\oplus K_\Lambda\oplus X,C_M\oplus Z_P\oplus K_\Lambda\oplus X)=0.$$

我们需要证明 $X\in\mathrm{add}\ C_M\oplus Z_P\oplus K_\Lambda$. 根据命题 2.2，$X$ 同构于 K_Q，Z_Q 或 C_N，其中 $Q\in P_\Lambda$ 为不可分解投射模，$N\in\mathrm{mod}\Lambda$ 为不可分解 Λ-模. 若 $X\cong K_Q$，则 $X\in\mathrm{add}\ K_\Lambda$，结论显然成立. 若 $X\cong Z_Q$，由引理 3.3 知 $(M,P\oplus Q)$ 为 τ-rigid 对. 由 (M,P) 是支撑 τ-倾斜对及引理 2.1 可知 $Q\in\mathrm{add}\ P$，从而 $X\in\mathrm{add}\ Z_P$. 若 $X\cong C_N$，再次由引理 3.3 知 $(M\oplus N,P)$ 为 τ-rigid 对. 由 (M,P) 是支撑 τ-倾斜对及引理 2.1 可知 $N\in\mathrm{add}\ M$，即 $X\in\mathrm{add}\ C_M$.

由 Φ 的定义显然可知 Φ 为单射. 下面我们证明 Φ 为满射. 设 X 是 $\mathcal{M}$ 的一个极大 rigid 对象. 由 K_Λ 是 $\mathcal{M}$ 中的投射-入射对象可知 Λ 的任意极大 rigid 对象都包含 K_Λ 为直和项. 因此，$K_\Lambda\in\mathrm{add}X$. 进一步，由命题 2.2 可设 $X\cong C_M\oplus Z_P\oplus K_\Lambda$，其中 $M\in\mathrm{add}\ \Lambda$，$P\in P_\Lambda$. 由 X 是 rigid 的可得

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(C_M\oplus Z_P,C_M\oplus Z_P)=0,$$

从而由引理 3.3 知 (M,P) 为 Λ 的一个 τ-rigid 对. 我们断言 (M,P) 为 Λ 的支撑 τ-倾斜对. 否则，根据引理 2.1，存在非零的 τ-rigid 对 (N,Q) 使得 $(M\oplus N,P\oplus Q)$ 为支撑 τ-倾斜对，且 $N\notin\mathrm{add}\ M$ 或 $Q\notin\mathrm{add}\ P$. 再次利用引理 3.3 可得 $C_M\oplus C_N\oplus Z_P\oplus Z_Q\oplus K_\Lambda$ 是 $\mathcal{M}$ 中的 rigid 对象. 这与 $K_\Lambda\oplus C_M\oplus Z_P$ 的极大性矛盾. 因此 (M,P) 为支撑 τ-倾斜对，即 $\Phi(M,P)=X$.

推论 3.5　(i) 设 $X\in\mathcal{M}$ 为 rigid 对象，则存在 $Y\in\mathcal{M}$ 使得 $X\oplus Y$ 为 $\mathcal{M}$ 中的极大 rigid 对象.

(ii) 态射范畴 M 中的极大 rigid 对象具有相同个数的不可分解直和项. 特别地，若 $X\in\mathcal{M}$ 为极大 rigid 对象，则 $|X|=2|\Lambda|$.

证明　我们先证明(i). 由命题 2.2 可设 $X\cong K_P\oplus C_M\oplus Z_Q$，其中 $P,Q\in P_\Lambda$，$M\in\mathrm{mod}\ \Lambda$. 由 X rigid 可得

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(C_M\oplus Z_Q,C_M\oplus Z_Q)=0.$$

由引理 3.3 知 (M,Q) 为 Λ 的一个 τ-rigid 对. 根据引理 2.1，存在 τ-rigid 对 (N,Q') 使得 $M\oplus N,Q\oplus Q'$ 为支撑 τ-倾斜对. 由定理 3.4 的证明知 $K_\Lambda\oplus C_M\oplus C_N\oplus Z_Q\oplus Z_Q$ 为 $\mathcal{M}$ 的一个极大 rigid 对象. 显然 X 是 $K_\Lambda\oplus C_M\oplus C_N\oplus Z_Q\oplus Z_Q$ 的一个直和项.

对于(ii)，由定理 3.4 知 $\mathcal{M}$ 的任意的极大 rigid 对象一定为 $\Phi(M,P)$ 的形式，其中 (M,P) 为 Λ 的支撑 τ-倾斜对，由支撑 τ-倾斜对的定义和 Φ 的构造可知 $|\Phi(M,P)|=2|\Lambda|$.

类似于有限维代数的支撑 τ-倾斜图，我们可以定义范畴 $\mathcal{M}$ 的极大 rigid 对象的交换图.

定义 3.6　范畴 $\mathcal{M}$ 的极大 rigid 对象的交换图以 $\mathcal{M}$ 的基本的极大 rigid 对象的同构类为顶点，两个顶点 M 和 N 之间存在一条边当且仅当 M 和 N 只相差一个不可分解直和项，此时我们称 M 和 N 具有突变关系.

作为定理 3.4 的直接推论，我们有

推论 3.7　代数 Λ 的支撑 τ-倾斜图与其投射

模的态射范畴的极大 rigid 对象的交换图同构.

注　设 Q 为没有长度小于或者等于 2 的定向循环的有限箭图，A_Q 为 Q 所确定的丛代数. 关于丛代数的相关定义参见文献[8].

设 W 为 Q 上的一个非退化势，$\Lambda = J(Q,W)$ 为相应的 Jacobian 代数[9]. 我们假设 Λ 是有限维的. 记 M 表示 Λ 的有限生成投射模态射范畴，E_M 表示 M 的极大 rigid 对象的交换图. 显然 $Z_\Lambda \oplus K_\Lambda$ 为 M 的一个极大 rigid 对象. 记 E_M° 上的极大 rigid 对象与丛代数 A_Q 的丛一一对应且该对应与突变是相容的. 特别地，E_M° 与丛代数 A_Q 的交换图同构.

参考文献：

[1] Assem I, Simson D, Skowrnski A. Elements of the representation theory of associative algebras, volume 1: techniques of representation theory [M]. London: Cambridge University Press, 2006.

[2] Bautista R. The category of morphism between projective modules [J]. Comm Algebra, 2004, 32: 4303.

[3] Bernstein A, Zelevinsky A. Quantum cluster algebras [J]. Adv Math, 2005, 195: 405.

[4] Ding M, Xu F, Zhang H. Acyclic quantum cluster algebras via Hall algebras of morphism [J]. Math Zeit, 2020, 296: 945.

[5] Fu C, Peng L, Zhang H. Quantum cluster characters of Hall algebras revisited [EB/OL]. [2021-01-03]. https://arxiv.org/pdf/2005.10617v1.pdf.

[6] Adachi T, Iyama O, Reiten I. τ-tilting theory [J]. Compos Math, 2014, 150: 415.

[7] Gorsky M. Semi-derived and derived Hall algebras for stable categories [J]. Int Math Res Not, 2018, 1: 138.

[8] Fomin S, Zelevinsky A. Cluster algebras, Ⅳ: coecients [J]. Compos Math, 2007, 143: 112.

[9] Derksen H, Weyman J, Zelevinsky A. Quivers with potentials and their representations, I: mutaions [J]. Selecta Math, 2008, 14: 59.

引用本文格式：

中　文：李伟宇. 态射范畴的极大 rigid 对象[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：051005.

英　文：Li W Y. On maximal rigid objects of morphism category [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 051005.