# 可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程的线性稳定性

范焱龙[1]，武瑞丽[2]

(1. 四川大学数学学院，成都 610064；2. 四川大学锦城学院，成都 611731)

**摘　要**：本文利用稳定性交换准则理论(PES)研究含磁场耦合的可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程的线性稳定性. 研究表明：当无量纲马赫数项 $1/\lambda<2\pi$ 时，方程稳态解 $(1,0,H_0)$ 是稳定的；当 $1/\lambda>2\pi$ 时，方程的平凡稳态解是不稳定的.

**关键词**：可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程；Jeans 不稳定性；稳定性交换准则

**中图分类号**：O175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.051001

## Linear stability of compressible Navier-Stokes-Poisson equations

*FAN Yan-Long*[1], *WU Rui-Li*[2]

(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. Jincheng College, Sichuan University, Chengdu 611731, China)

**Abstract**: This paper studies the linear stability of compressible Navier-Stokes-Poisson equation by using the principle of exchange of stabilities (PES). It is shown that when non-dimensional Mach number $1/\lambda<2\pi$, with magnetic field term and the trivial steady state of equation is unstable when $1/\lambda>2\pi$.

**Keywords**: Compressible Navier-Stokes-Poisson equation; Jeans instability; Principle of exchange of stabilities

(2010 MSC 34B15)

## 1　引　言

Jeans 不稳定性首先由 Jeans[1] 于 1902 年提出. 在经典天体物理理论[1]中，因为星际气体十分稀薄，气体的 Jeans 不稳定性由如下 Euler-Poisson 方程描述：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v)=0,\\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v\right)=-\nabla P-\rho\nabla\varphi,\\ \Delta\varphi=4\pi G\rho\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\rho(x,t)$ 和 $v=v(x,t)$ 表示在 $t>0$ 时刻 $x\in\mathbf{R}^3$ 处的密度和速度场，$P$，$\varphi$ 和 $G$ 分别表示压强，自引力势和万有引力常数. 假定系统是等温的，即压强满足 $P=c_s^2\rho$，其中 $c_s$ 是气体中的声速. 由 Ma 等的结果[2]，研究方程 (1) 的平凡稳态解 $(\rho_0,0)$ 的稳定性变化的一般方法是将方程 (1) 写成抽象形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=L_\lambda u+G(u;\lambda)\tag{2}$$

并考虑其对应线性算子 $L_\lambda$ 的特征值问题，其中 $\lambda$ 为系统的控制参数，$G(u;\lambda)$ 为关于 $u$ 的高阶项. 若 $L_\lambda$ 特征值的实部全部小于 0，则系统是线性稳定的；若存在实部大于 0 的特征值，则系统是线性不稳定的. 此即考察线性算子的特征值 $\beta_i(\lambda)$ 序列

**收稿日期**：2021-04-20
**基金项目**：国家自然科学基金(11771306，11901408)
**作者简介**：范焱龙(1995－)，男，四川自贡人，硕士研究生，主要研究方向为数学物理方法.
**通讯作者**：武瑞丽. E-mail：lilywu2688@163.com

(计入重数)是否满足如下稳定性交换准则(Principle of Exchange of Stabilities)[2-3]：

$$\mathrm{Re}\,\beta_i(\lambda)\begin{cases}<0, & 若\ \lambda>\lambda_0,\\ =0, & 若\ \lambda=\lambda_0, \forall\, 1\leqslant i\leqslant m,\\ >0, & 若\ \lambda<\lambda_0,\end{cases}$$

$$\mathrm{Re}\,\beta_j(\lambda)<0, \forall\, j\geqslant m+1 \tag{3}$$

对于稳态解的线性稳定性来说,研究线性算子 $L_\lambda$ 的谱是至关重要的. 当前,对不可压缩流体方程所对应的线性算子谱的研究已经比较完善[2-3]. 近年来,诸多学者对可压缩流体方程对应的线性算子进行了一系列研究. 对线性算子不依赖于参数的情形, Núñez[4] 和 Levitin[5] 使用 Fourier 分析的方法将问题转化成对矩阵的研究,证明了这类可压缩流体方程对应线性算子的谱由特征值和特征值的唯一有界聚点组成;Kagei 等[6-7] 研究了可压缩 Navier-Stokes 方程对应线性算子的谱,并由此得出了稳态解的渐进性质;Brezina 和 Kagei[8] 对时间周期平行流也做了类似的研究. 当线性算子依赖于参数对,Kagei 和 Nishida[9] 研究了可压缩 Navier-Stokes 方程平面 Poiseuille 流的线性不稳定性,得到了平面 Poiseuille 流稳定时 Mach 数和 Reynolds 数的关系;王军礼、张兴伟和刘健[10] 在文献[8]的基础上研究了平面 Couette-Poiseuille 流的线性不稳定性,得到了平面 Couette-Poiseuille 流稳定时 Mach 数和 Reynolds 数的关系.

本文对模型(1)进行一些改进,首先不再假设气体是无粘性的;其次,鉴于星际气体多以等离子体的形式存在,我们在原方程基础上耦合了磁场项,以考察宇宙磁场对平凡稳态解的影响.

## 2 模　型

本文主要考虑如下的磁耦合可压缩 Navier-Stokes-Poisson (NSP)方程：

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\mathrm{div}(\rho v)=0,\\ \rho(\partial_t v+(v\cdot\nabla)v)-\mu\Delta v-(\mu+\mu')\nabla\mathrm{div}\, v+\\ \quad\nabla p(\rho)=-\rho\,\nabla\varphi+\mu_0(\nabla\times H)\times H,\\ \Delta\varphi=4\pi G(\rho-\rho^*),\\ \partial_t H-\nabla\times(v\times H)=k_0\,\Delta H,\\ \mathrm{div}\, H=0\end{cases} \tag{4}$$

其中 $v,H,\mu_0$ 和 $k_0$ 分别代表速度场和磁场,真空中磁导率,磁扩散率, 压强 $p(\rho)$ 满足多方过程

$$p(\rho)=\alpha\rho^\beta,\ 1\leqslant\beta<2,$$

且 $\alpha=c_s^2/\beta$,其中 $c_s=\sqrt{p'(\rho_*)}$ 是声速, $\rho_*$ 是与 $x$ 和 $t$ 无关的平均密度. 另外,$\mu$ 和 $\mu'$ 是常数,满足 $\mu>0$, $\frac{2}{3}\mu+\mu'\geqslant0$, $G$ 是引力常数.

取无量纲参数

$$x=l\,\widetilde{X},$$
$$t=\frac{l}{V}\tilde{t},$$
$$\rho(x,t)=\rho_*\,\tilde{\rho}(\widetilde{X},\tilde{t}),$$
$$v(x,t)=V\,\tilde{v}(\widetilde{X},\tilde{t}),$$
$$V=\sqrt{4\pi G\rho_*}\,l,$$
$$p(\rho)=\rho_*V^2\tilde{p}(\tilde{\rho}),$$
$$\varphi(x,t)=4\pi G\rho_*\,l^2\tilde{\varphi}(\widetilde{X},\tilde{t}),$$
$$H(x,t)=\sqrt{\frac{4\pi G}{\mu_0}}\rho_*\,l\,\widetilde{H}(\tilde{v},\tilde{t}),$$

得到如下无量纲模型：

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\mathrm{div}\,(\rho v)=0,\\ \rho(\partial_t v+(v\cdot\nabla)v)-\nu\Delta v-\tilde{\nu}\nabla\mathrm{div}\, v+\nabla p(\rho)=\\ -\rho\,\nabla\varphi+(\nabla\times H)\times H,\\ \Delta\varphi=\rho-1,\\ \partial_t H-\nabla\times(v\times H)=\eta\Delta H,\\ \mathrm{div}\, H=0\end{cases} \tag{5}$$

其中空间变量 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega=[0,1]^3$. 记 $p'(1)=\lambda^2$. 则无量纲常数 $1/\lambda$ 表示 Mach 数,正常数 $\nu$ 和 $\tilde{\nu}$ 是无量纲系统的第一和第二粘性系数. 显然,方程有如下平凡稳态解

$$\rho=1, v=0, H=H_0=(h_1,h_2,h_3)^T \tag{6}$$

其中 $(h_1,h_2,h_3)^T$ 表示向量 $(h_1,h_2,h_3)$ 的转置. 为考虑方程稳态解的稳定性,一般的做法是将方程(5)的解写成如下形式

$$u=\begin{pmatrix}\rho\\ v\\ H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ H_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\rho'\\ v'\\ H'\end{pmatrix}:=\tilde{u}+u',$$

其中 $u'$ 表示扰动. 将上述表达式代入方程(5)并且考虑到 $\varphi=\Delta^{-1}\rho$,得到如下线性扰动方程

$$\frac{\partial u'}{\partial t}=L_\lambda u' \tag{7}$$

其中线性算子

$$L_\lambda=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{div} & 0\\ -\nabla(\lambda^2+\Delta^{-1}) & \nu\Delta I_3+\tilde{\nu}\nabla\mathrm{div} & -\nabla(H_0\cdot\ \cdot)+H_0\cdot\nabla\\ 0 & H_0\cdot\nabla-H_0\mathrm{div} & \eta\Delta I_3\end{pmatrix} \tag{8}$$

另外，质量守恒定律要求密度要满足方程

$$\int_\Omega \rho \mathrm{d}x = 0.$$

# 3　特征值

本节主要考虑 NSP 方程的特征值以及稳定性交换准则，并以此来判断 Jeans 不稳定性何时出现. 在周期边界条件下，考虑空间 $X$ 和 $Y$ 如下：

$$X = H^1_{\mathrm{per}}(\Omega) \times (H^2_{\mathrm{per}}(\Omega))^6, \quad Y = H^1_{\mathrm{per}}(\Omega) \times (L^2_{\mathrm{per}}(\Omega))^6, \tag{9}$$

其中$L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$，$H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 和 $H^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 分别是 $C^\infty_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$，$H^1(\Omega)$ 和 $H^2(\Omega)$ 中的闭包，$C^\infty_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 表示

$$C^\infty_{\mathrm{per}}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^3) \mid u(x + n e_i) = u(x),\ \forall i = 1,2,3, n \in \mathbf{Z}\},$$

其中$e_i(i=1,2,3)$ 是 $x_i$ 方向的单位向量. 定义空间

$$\widetilde{X} := X \cap F, \widetilde{Y} := Y \cap F \tag{10}$$

其中

$$F := \left\{ u = \begin{bmatrix} \rho \\ v \\ H \end{bmatrix} \in Y \mid \int_\Omega \rho \mathrm{d}x = 0, \mathrm{div} H = 0 \right\}.$$

为考察线性算子$L_\lambda : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$的特征值，考虑如下特征方程

$$L_\lambda u = \beta u \tag{11}$$

注意到周期边界条件允许我们寻找有如下展开式的特征函数 $u$

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^3} \mathrm{e}^{2\pi i(k \cdot x)} U_k, U_k = (\rho_k, v_k, h_k)^T.$$

将上述表达式代入(11)式，得到

$$L_\lambda u = \beta u \Leftrightarrow L_{\lambda,k} U_k = \beta U_k, \forall k \in \mathbf{Z}^3 \backslash \{0\} \tag{12}$$

其中

$$L_{\lambda,k} := \begin{bmatrix} 0 & L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ 0 & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \tag{13}$$

分块矩阵中的子矩阵表示如下：

$$L_{12} = -2\pi i k, L_{21} = -2\pi i \left(\lambda^2 - \frac{1}{4\pi^2 |k|^2}\right) k^T,$$

$$L_{22} = -4\pi^2 (\nu |k|^2 I_3 + \tilde{\nu} k^T k),$$

$$L_{23} = 2\pi i ((k \cdot H_0) I_3 - (H_0 \cdot k)^T),$$

$$L_{32} = L_{23}^T,$$

$$L_{33} = -4\pi^2 \eta |k|^2 I_3,$$

其中 $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{Z}^3 \backslash \{0\}$ 是波数. 直接计算可以得到矩阵 $L_{\lambda,k}$的特征多项式 $D(\beta)$

$$D(\beta) = (\beta + E)(\beta^2 + (E+M)\beta + K)(\beta^4 + C_3\beta^3 + C_2\beta^3 + C_1\beta + C_0) \tag{14}$$

其中

$$E = 4\pi^2 \eta |k|^2, M = 4\pi^2 \nu |k|^2,$$

$$K = 4\pi^2 (4\pi^2 |k|^4 \nu\eta + (k \cdot H_0)^2),$$

$$C_0 = 4\pi^2 (4\pi^2 |k|^2 \lambda^2 - 1)(4\pi^2 |k|^4 \nu\eta + (k \cdot H_0)^2),$$

$$C_1 = 4\pi^2 |k|^2 (\eta + \nu)(4\pi^2 \lambda^2 |k|^2 - 1) + 16\pi^4 |k|^2 (4\pi^2 \eta\nu |k|^4 (\nu + \tilde{\nu}) + |k|^2 |H_0|^2 \nu + (k \cdot H_0)^2 \tilde{\nu}),$$

$$C_2 = 4\pi^2 |k|^2 (|H_0|^2 + 4\pi^2 |k|^2 (\eta\nu + (\eta + \nu)(\nu + \tilde{\nu}))) + (4\pi^2 |k|^2 \lambda^2 - 1),$$

$$C_3 = 4\pi^2 |k|^2 (\eta + 2\nu + \tilde{\nu}),$$

解方程 $D(\beta) = 0$，可以得到

$$\beta_{k,1}(\lambda) = -4\pi^2 \eta |k|^2 < 0,$$

$$\beta_{k,2}(\lambda) = -2\pi^2 (\nu + \eta) |k|^2 + 2\pi \sqrt{(\pi(\nu - \eta) |k|^2)^2 - (k \cdot H_0)^2},$$

$$\beta_{k,3}(\lambda) = -2\pi^2 (\nu + \eta) |k|^2 - 2\pi \sqrt{(\pi(\nu - \eta) |k|^2)^2 - (k \cdot H_0)^2} \tag{15}$$

是$L_{\lambda,k}$的三个负实部的特征值，即 $\mathrm{Re}\, \beta_{k,j}(\lambda) < 0 (j = 1,2,3)$. 此外，特征多项式(14)的另外四个根 $\beta_{k,j}(j = 4, \cdots, 7)$ 是下面多项式的根

$$f(\beta) = \beta^4 + C_3\beta^3 + C_2\beta^3 + C_1\beta + C_0 \tag{16}$$

容易得到$L_{\lambda,k}$有零特征值当且仅当$C_0 = 0$，即

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi |k|} \tag{17}$$

由此可知当 $\lambda > 1/(2\pi)$ 时，对任意 $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{Z}^3 \backslash \{0\}$，$L_{\lambda,k}$不含零特征值，为了确定在 $\lambda \geqslant 1/(2\pi)$ 时没有实部为零的虚根出现，有如下引理.

**引理 3.1**　若 $\lambda \geqslant \lambda_k$，则$L_{\lambda,k}$不含任何纯虚特征值.

证明　反证法. 假设当 $\lambda \geqslant \lambda_k$时，$L_{\lambda,k}$至少有一个纯虚特征值，即方程 $f(\beta) = 0$ 有纯虚根. 易知 $f(\beta)$ 有纯虚根当且仅当其系数满足

$$C_1^2 - C_1 C_2 C_3 + C_0 C_3^2 = 0 \tag{18}$$

首先证明特殊情况，即当 $\lambda = \lambda_k$时方程不存在纯虚根. 在此条件下，我们可以得到 $C_0 = 0$. 又因 $C_1 > 0$，所以 $L_{\lambda,k}$有纯虚特征值当且仅当 $C_2 C_3 = C_1$. 但是，直接计算发现$C_2 C_3 - C_1 > 0$. 这说明$L_{\lambda,k}$在此情况下没有纯虚特征值.

下面考虑 $\lambda > \lambda_k$的情况. 为了简便，使用记号 $G = 4\pi^2 |k|^2 \lambda^2 - 1 > 0$. 注意到当 $k$ 和 $|H_0|$ 固定时，$(k \cdot H_0)^2$在 0 到 $|H_0|^2 |k|^2$之间取值. 为了方便计算，设 $(k \cdot H_0)^2 = x |H_0|^2 |k|^2, x \in [0,$

1]. 若(18)式成立,则有如下关于 $x$ 的二次方程 $\Theta(x)=0$ 成立:

$$\Theta(x)=C_1^2(x)-C_1(x)C_2C_3+C_0(x)C_3^2=P_2x^2+P_1x+P_0=0 \tag{19}$$

其中

$$P_0=-16\pi^4|k|^4\cdot[G(\nu+\tilde{\nu})+4\pi^2|k|^2(\eta+\nu+\tilde{\nu})(|H_0|^2+4\pi^2\eta|k|^2(\nu+\tilde{\nu}))][G(\eta+\nu)+4\pi^2|k|^2\nu(|H_0|^2+4\pi^2|k|^2(\eta+\nu)(2\nu+\tilde{\nu}))]<0,$$

$$P_1=64\pi^6|H_0|^2|k|^6\cdot[G((\eta+2\nu)^2+\tilde{\nu}(3\eta+4\nu))-4\pi^2|H_0|^2|k|^2\tilde{\nu}(\eta+\tilde{\nu})-16\pi^4|k|^4\tilde{\nu}(2\nu^3+(3\nu^2+2\eta\nu+\nu\tilde{\nu}+\eta\tilde{\nu})(\eta+\tilde{\nu}))],$$

$$P_2=256\pi^8|H_0|^4|k|^8\tilde{\nu}^2\geqslant 0.$$

若 $\Theta(x)<0$ 对任意的 $x\in[0,1]$,$G>0$ 和 $H_0\in\mathbf{R}^3$ 成立,则(18)式不可能成立,由此导出矛盾. 事实上,当 $|H_0|=0$ 时,通过计算可知 $P_2=0,\Theta(0)=P_0<0$,

$$\Theta(1)=-16\pi^4|k|^4(\eta+\nu)(\nu+\tilde{\nu})\cdot(G+16\pi^4|k|^4\nu(2\nu+\tilde{\nu}))\cdot(G+16\pi^4\eta|k|^4(\eta+\nu+\tilde{\nu}))<0.$$

由此可知 $\Theta(x)<0,\forall x\in[0,1]$.

当 $|H_0|\neq 0$ 时,同样有 $P_2>0,\Theta(0)=P_0<0$ 及

$$\Theta(1)=-16\pi^4|k|^4(\eta+\nu)(\nu+\tilde{\nu})\cdot[G^2+8\pi^2G|k|^2(2\pi^2|k|^2(2\nu^2+(\nu+\eta)\cdot(\eta+\tilde{\nu}))-|H_0|^2)+16\pi^4|k|^4(|H_0|^2+4\pi^2\eta|k|^2\nu)(|H_0|^2+4\pi^2|k|^2(2\nu+\tilde{\nu})\cdot(\eta+\nu+\tilde{\nu}))].$$

为确定 $\Theta(1)$的符号,考虑方程 $\Theta(1)=0$,即

$$|H_0|^2=\Psi_\pm\coloneqq\Psi_1\pm\Psi_2,$$

其中

$$\Psi_1=\frac{G}{4\pi^2|k|^2}-2\pi^2|k|^2(2\nu^2+3\nu(\eta+\tilde{\nu})+\tilde{\nu}(\eta+\tilde{\nu})),$$

$$\Psi_2=(\eta+2\nu+\tilde{\nu})\sqrt{4\pi^4|k|^4(\nu+\tilde{\nu})^2-G}.$$

注意到

$$\Psi_1^2-\Psi_2^2=\frac{G^2}{16\pi^4|k|^4}+G(2\nu^2+(\nu+\eta)(\eta+\tilde{\nu}))+16\pi^4\eta|k|^4\nu(2\nu+\tilde{\nu})(\eta+\nu+\tilde{\nu})>0,$$

当$\Psi_\pm$是实数时,$\Psi_\pm$的符号由 $\Psi_1$控制,也就是说,只有当

$$G\geqslant 8\pi^4|k|^4(\nu(3\eta+2\nu)+\tilde{\nu}^2+\tilde{\nu}(\eta+3\nu))\coloneqq\Gamma_1,$$

即$\Psi_1\geqslant 0$ 时,才可能存在向量 $H_0$使得(18)式成立. 但是,当$G>4\pi^4|k|^4(\nu+\tilde{\nu})^2\coloneqq\Gamma_2$时,$\Psi_2$是纯虚数. 比较 $\Gamma_1$和 $\Gamma_2$可知

$$\Gamma_1-\Gamma_2=4\pi^4|k|^4(3\nu+\tilde{\nu})(2\eta+\nu+\tilde{\nu})>0.$$

又已知当$|H_0|=0$ 时 $\Theta(1)<0$,这意味着任意 $G>0,H_0\in\mathbf{R}^3$, $x\in[0,1]$ ,有 $\Theta(x)\not\ni[0,+\infty)$,即(18)式不成立. 进而可知 $L_{\lambda,k}$不含任何纯虚特征值. 证毕.

**引理 3.2** 对每个 $k\in\mathbf{Z}^3\backslash\{0\}$,存在一个 $\varepsilon_k>0$,使得下面关于矩阵$L_{\lambda,k}$的特征值的的命题成立:

(i) 存在唯一的 $m\in\{4,5,6,7\}$ 使得对 $\lambda\geqslant\lambda_k-\varepsilon_k$ 下面的稳定性交换准则成立:

$$\beta_{k,m}(\lambda)\begin{cases}<0,\lambda>\lambda_k,\\=0,\lambda=\lambda_k,\\>0,\lambda<\lambda_k\end{cases} \tag{20}$$

(ii) 若 $\lambda\geqslant\lambda_k-\varepsilon_k$,则 $\mathrm{Re}\,\beta_{k,j}(\lambda_k)<0$ 对 $j\in\{1,\cdots,7\}\backslash\{m\}$ 成立.

**证明** 首先证明 (i). 由(17)式和引理 3.1 知 $L_{\lambda,k}$有零特征值当且仅当 $\lambda=\lambda_k$. 对于特征值 $\beta_{k,i}(\lambda)(i=1,2,3)$,由式(15)可知

$$\mathrm{Re}\,\beta_{k,i}(\lambda)<0,i=1,2,3$$

对$\lambda\geqslant\lambda_k$成立,则存在 $m\in\{4,5,6,7\}$ 使得 $\beta_{k,m}(\lambda_k)=0$. 注意到特征值$\beta_{k,i}(\lambda)(i=4,\cdots,7)$ 是由(16)式给出的多项式 $f(\beta)$ 的四个根且 $m$ 的唯一性可由 $\lambda=\lambda_k\Rightarrow C_1>0$ 得到,且 $\beta_{k,m}$是方程 $f(\beta)=0$ 的解,所以对方程两边关于 $\lambda$ 求导并令 $\lambda=\lambda_k$可得

$$\beta_{k,m}{}'(\lambda_k)=-\frac{C_0'}{C_1}=-\frac{4\pi^2|k|^4\nu\eta+(k\cdot H_0)^2}{\pi|k|(4\pi^2|k|^4\eta\nu(\nu+\tilde{\nu})+|k|^2|H_0|^2\nu+(k\cdot H_0)^2\tilde{\nu})}<0.$$

从而(20)式成立.

下面证明 (ii). 已知 $j\in\{1,2,3\}$ 时 (ii) 是成立的. 对于剩下的情况,由引理 3.1 知,当 $\lambda\geqslant\lambda_k$, $|H_0|\geqslant 0,\nu>0,\eta>0$ 和 $\tilde{\nu}>0$ 时,对每个 $l\in\{4,5,\cdots,7\}\backslash\{m\}$,特征值 $\beta_{k,l}$的实部不改变符号. 由特征值 $\beta_{k,l}$对这些参数的连续依赖性可知,若要证

$$\mathrm{Re}\,\beta_{k,l}<0,\forall\lambda\geqslant\lambda_k,$$

只需要证明当$\lambda=\lambda_k$且

$$4\pi^2|k|^2((\eta-\nu)^2+\tilde{\nu}^2+\tilde{\nu}(\nu-\eta))>3|H_0|^2 \tag{21}$$

时 $\mathrm{Re}\,\beta_{k,l}<0$. 注意到当 $\lambda=\lambda_k$时$\beta_{k,j}(\lambda_k)$ 是下面三次方程的零点:

$$g(\beta)=\beta^3+C_3\beta^2+C_2\beta+C_1,$$

其系数$C_i$ ($i=1,2,3$) 都为正数，若(21) 式成立，则

$$g'(\beta)=3\beta^2+2C_3\beta+C_2 \tag{22}$$

有两个不同的负实根. 这是因为

$$(16\pi^2|k|^2)^{-1}(4C_3^2-12C_2)=\\ 4\pi^2|k|^2((\eta-\nu)^2+\tilde{\nu}^2+\tilde{\nu}(\nu-\eta))-\\ 3|H_0|^2>0$$

和三次方程根的判别式保证了 $g(\beta)=0$ 的根都是实和负的. 定理得证.

将临界参数$\lambda_c$表示为

$$\lambda_c:=\max_{k\in Z^3\setminus\{0\}}\lambda_k=\frac{1}{2\pi},$$

即临界 Mach 数为 $2\pi$. 则由引理 3.2，有如下的 PES 条件.

**定理 3.3** 对于线性算子 $L_\lambda: X\to Y$，存在唯一的 $m\in\{4,5,6,7\}$ 使得对某个 $\varepsilon>0$ 和 $\lambda\geqslant\lambda_c-\varepsilon$，$L_\lambda$的特征值满足如下 PES 条件：

$$\beta_{k,m}(\lambda)\begin{cases}<0, 当\ \lambda>\lambda_c 时,\\ =0, 当\ \lambda=\lambda_c, \quad 当\ |k|^2=1\ 时,\\ >0, 当\ \lambda<\lambda_c 时,\end{cases}$$

$$\mathrm{Re}\,\beta_{k,j}(\lambda)<0, 当\ j\neq m, |k|^2=1\ 时,$$

$$\mathrm{Re}\,\beta_{k,j}(\lambda)<0, 当\ |k|^2>1\ 时.$$

**注** 在限制条件 $F$ 下，算子 $L_\lambda:\tilde{X}\to\tilde{Y}$有相似的 PES 条件，即上述定理反映了参数 $\lambda$ 变化过程中该系统稳态解稳定性的变化. 事实上，当 $|k|=1$ 时(以 $k=(0,0,1)$ 为例)，有

$$L_{\lambda,k}=\begin{pmatrix} * & 0\\ 0 & -4\pi^2\eta\end{pmatrix}.$$

此时$\beta_{k,1}=-4\pi^2\eta$，其对应的特征向量 $\varphi_{k,1}=(0,0,0,0,0,0,1)^T e^{2\pi i(k\cdot x)}$ 所张成的空间与限制条件 $\mathrm{div}H=0$ 所表示的空间正交，即在限制条件下$\beta_{k,j}$ ($j\neq1$, $|k|=1$)是 $L_\lambda:\tilde{X}\to\tilde{Y}$的特征值. 特别地，算子 $L_\lambda:\tilde{X}\to\tilde{Y}$的特征值是 $\beta_{k,j}(\lambda)$ ($j\neq1$)，则由上述定理知当 $\lambda>(2\pi)^{-1}$ 时可压缩 Navier-Stokes-Poisson 系统的稳态解(6)式是稳定的，当 $\lambda<(2\pi)^{-1}$时稳态解是不稳定的. 从而当 $\lambda=(2\pi)^{-1}$ 时 Jeans 不稳定性出现.

## 4 结 论

本文计算了含磁场耦合项的可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程的临界 Mach 数，并以此来判断平凡稳态解何时失去稳定性. 我们利用 Fourier 分析将对算子$L_\lambda:\tilde{X}\to\tilde{Y}$谱的研究转化为对矩阵$L_{\lambda,k}$特征值的研究，进而证明了当 Mach 数 $1/\lambda$ 增至临界 Mach 数时算子 $L_\lambda$存在零特征值 $\beta_{k,m}(\lambda_c)$，且该实特征值在 $\lambda=\lambda_c$时穿越虚轴，而在此之前没有复特征值穿越虚轴，即特征值 $\beta_{k,m}(\lambda)$ 是首次穿越，进而得到了 PES 条件. 由 PES 条件，我们得到：在 Mach 数达到临界 Mach 数时，平凡稳态解失去稳定性，即 Jeans 不稳定性出现.

**参考文献：**


[1] Jeans J H. The stability of a spherical nebula [J]. Philos T R Soc A, 1902, 199: 1.

[2] Ma T, Wang S. Phase transition dynamics[M]. New York: Springer, 2014.

[3] 马天，汪守宏. 非线性演化方程的稳定性与分歧[M]，北京：科学出版社，2011.

[4] Núñez M. Spectral analysis of viscous static compressible fluid equilibria [J]. J Phys A-Math Theor, 2001, 34: 4341.

[5] Levitin M R. Vibrations of viscous compressible fluid in bounded domains: spectral properties and asymptotics [J]. Asymptotic Anal, 1993, 7: 15.

[6] Kagei Y, Kobayashi T. Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equations on the half space [J]. Arch Ration Mech An, 2005, 177: 231.

[7] Kagei Y. Asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around a parallel flow [J]. Arch Ration Mech An, 2012, 205: 585.

[8] Brezina J, Kagei Y. Spectral properties of the linearized compressible Navier-Stokes equation around time-periodic parallel flow [J]. J Diff Equat, 2013, 255: 1132.

[9] Kagei Y, Nishida T. Instability of plane poiseuille flow in viscous compressible gas [J]. J Math Fluid Mech, 2014, 17: 129.

[10] 王军礼，张兴伟，刘健. 可压缩 Navier-Stokes 方程平面 Couette-Poiseuille 流的线性不稳定性[J]. 数学物理学报，2018，38：322.



**引用本文格式：**

中 文：范焱龙，武瑞丽. 可压缩 Navier-Stokes-Poisson 方程的线性稳定性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：051001.

英 文：Fan Y L, Wu R L. Linear stability of compressible Navier-Stokes-Poisson equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 051001.