

基于 Maxwell 模型的线性粘弹性波传播问题的质量集中杂交应力有限元法

周亚婧¹, 陈豫眉²

(1. 四川大学数学学院, 成都 610064;
2. 西华师范大学公共数学学院, 南充 637009)

摘要: 在用有限元方法解偏微分方程时我们往往需要对质量矩阵求逆. 我们对质量矩阵进行质量集中可以将得到的矩阵对角化, 大大提高计算效率. 本文针对一类求解二维线性粘弹性固体介质波传播问题的全离散杂交应力四边形有限元方法研究其质量集中格式, 并利用位移插值节点为求积节点的 Gauss-Lobatto 数值积分方法来实现质量矩阵的对角化. 数值算例验证了该方法的有效性.

关键词: Maxwell 模型; 粘弹性波传播; 杂交应力有限元; 质量集中

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2021.061001

A hybrid stress finite element method with mass lumping for Maxwell elastodynamic problems of wave propagation

ZHOU Ya-Jing¹, CHEN Yu-Mei²

(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. College of Mathematics Education, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: The inversion of mass matrix is often involved in solving partial differential equations by finite element method. Mass lumping can be used to improve computational efficiency by diagonalizing mass matrix with special numerical integration. In this paper, a fully discrete hybrid stress quadrilateral finite element method for wave propagation in viscoelastic solid media is presented. To realize the diagonalization of mass matrix, the Gauss-Lobatto numerical integration with displacement interpolation nodes as quadrature nodes is used. A numerical example is given to verify the performance of the method.

Keywords: Maxwell model; Viscoelastic wave propagation; Hybrid stress finite element; Mass lumping (2010 MSC 65M60)

1 引言

数. 考虑如下基于 Maxwell 模型的二维粘弹性固体介质波传播问题:

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 为凸有界开集, 边界为 $\partial\Omega$, T 为正常

收稿日期: 2021-03-05

基金项目: 国家自然科学基金(11971094)

作者简介: 周亚婧(1996—), 女, 重庆人, 硕士研究生, 主要研究方向为微分方程数值解法. E-mail: 610173484@qq.com

通讯作者: 陈豫眉. E-mail: xhshuxue@163.com

$$\begin{cases} u_u = \operatorname{div} \sigma + f, \\ (x, t) \in \Omega \times [0, T] \\ \sigma + \sigma_t = C \varepsilon(u_t), \\ (x, t) \in \Omega \times [0, T] \\ u = 0, (x, t) \in \partial \Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = \varphi_0, u_t(x, 0) = \varphi_1, \sigma(x, 0) = \psi_0, \\ x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

这里 $u = (u_1, u_2)^T$ 为位移向量; $u_t = \partial u / \partial t$, $u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2$; $\sigma = (\sigma_{ij})_{2 \times 2}$ 为对称应力张量; div 为散度算子; $\varepsilon(u_t) = (\nabla u_t + \nabla^T u_t) / 2$ 为应变张量; $f = (f_1, f_2)^T$ 为体积力; C 为弹性模量.

$C \varepsilon(u_t) := 2 \mu \varepsilon(u_t) + \lambda \operatorname{div}(u_t) I$, 其中 μ 和 λ 为 Lamé 常数; I 为二阶单位矩阵; φ_0 , φ_1 和 ψ_0 分别为位移、速度和应力的初始值. 如非特别申明, 本文假设 $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0$ 以及 f 的正则性是足够的.

使用有限元法求解的过程中, 时常涉及质量矩阵的求逆. 对质量矩阵进行质量集中后, 得到的对角质量阵方便求逆, 可以大大提高计算效率. 所谓质量集中是指通过选取合适的数值求积公式将质量矩阵对角化. 众多研究表明: 对某些有限元格式可以实现质量集中^[1-7]. 其中, 文献[3-4]针对矩形和长方体有限元, 利用 Gauss-Lobatto 积分节点作基函数节点实现了质量集中, 且其数值结果表明数值积分不影响有限元格式的数值精度.

另一方面, 关于粘弹性问题的杂交应力有限元法, 已有不少成果. 如文献[8]研究了求解基于 Maxwell 模型的粘弹性波传播问题的全离散杂交应力有限元法, 分析了半离散和全离散格式的解的存在唯一性, 给出相应的误差估计; 文献[9]研究了弹性动力学问题的质量集中杂交应力有限元法, 给出在一定网格条件下该数值积分在四边形网格上的截断误差估计.

本文基于文献[8]中杂交应力有限元法的半离散格式, 提出了一种新的全离散方法, 并研究其质量集中格式. 我们在空间方向使用杂交应力四边形有限元离散, 位移采用等参双线性插值, 应力采用 Pian & Sumihara 的 5 参数应力模式, 时间方向采用中心差分离散.

2 弱问题

设 r 为非负整数, $H^r(\Omega)$ 为标准 r 阶 Sobolev 空间, 其范数和半范数分别记为 $\|\cdot\|_r$ 和 $|\cdot|_r$. 特别地, $H^0 = L^2$ 表示平方可积函数空间. 在不引

起混淆的情况下, 将与时间相关的函数 $v(x, t)$ 简记为 $v(t)$. 设 k 为非负整数, $1 \leq p < \infty$. 定义

$$\begin{aligned} C^k([0, T]; H^r(\Omega)) &:= \{v: [0, T] \rightarrow H^r(\Omega); v \text{ 关于 } t \text{ 是 } k \text{ 阶连续可导}\}, \\ L^p([0, T]; H^r(\Omega)) &:= \{v \in L^1(0, T; L^2(\Omega)); \|v\|_{L^p(H^r)} < \infty\}. \end{aligned}$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时, $\|v\|_{L^p(H^r)} := \left(\int_0^T \|v(\cdot, t)\|_{L^p(H^r)}^p dt\right)^{1/p}$; 当 $p = \infty$ 时, $\|v\|_{L^\infty(H^r)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|v(\cdot, t)\|_{L^r}$. 相应半范数为

$$|v|_{L^p(H^r)} = \left(\int_0^T |v(\cdot, t)|_{L^p(H^r)}^p dt\right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty,$$

及

$$|v|_{L^\infty(H^r)} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} |v(\cdot, t)|_{L^r}.$$

定义如下位移空间和应力空间: $V := \{v \in (H^1(\Omega))^2: v|_{\partial \Omega} = 0\}$, $\Sigma := L^2(\Omega; \mathbf{R}_{\operatorname{sym}}^{2 \times 2})$, 其中 $L^2(\Omega; \mathbf{R}_{\operatorname{sym}}^{2 \times 2})$ 表示平方可积对称张量空间, $\operatorname{tr} \tau := \tau_{11} + \tau_{22}$ 为 $\tau = (\tau_{ij})_{2 \times 2}$ 的迹. Σ 的范数 $\|\cdot\|_0$ 定义为

$$\|\tau\|_0 := \int_\Omega \tau: \tau dx, \forall \tau \in \Sigma,$$

其中 $\tau: \sigma := \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij} \sigma_{ij}$, 对 $\tau, \sigma \in \Sigma$. 在空间 V 中, 半范数 $|\cdot|_1$ 与范数 $\|\cdot\|_1$ 等价.

下面我们给出波传播问题式(1)的弱形式: 给定初值 $\varphi_0, \varphi_1 \in V, \psi_0 \in \Sigma$ 及体积力 $f \in C^0([0, T]; (L^2(\Omega))^2)$, 求 $(\sigma, u) \in C^0([0, T]; \Sigma) \times C^2([0, T]; V)$, 使得

$$\begin{cases} a(\sigma(t), \tau) + a(\sigma_t(t), \tau) + b(\tau, u_t(t)) = 0, \\ \forall \tau \in \Sigma \\ (u_{tt}(t), v) - b(\sigma(t), v) = (f(t), v), \forall v \in V \\ u(0) = \varphi_0, u_t(0) = \varphi_1, \sigma(0) = \psi_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $a(\sigma, \tau) := \int_\Omega \sigma: C^{-1} \tau dx = \frac{1}{2\mu} \int_\Omega \sigma: \tau - \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \operatorname{tr} \sigma \operatorname{tr} \tau dx$, $b(\tau, v) := - \int_\Omega \tau: \varepsilon(v) dx$, (\cdot, \cdot) 表示空间 Ω 上的 L^2 内积, 即 $(u, v) := \int_\Omega u \cdot v dx$. 对 $\tau \in \Sigma$, 引入能量范数 $\|\cdot\|_a$, 即

$$\begin{aligned} \|\tau\|_a^2 &:= a(\tau, \tau) = \frac{1}{2\mu} \|\tau - \frac{1}{2} \text{tr}\tau I\|_0^2 + \\ &\frac{1}{4(\mu+\lambda)} \|\text{tr}\tau\|_0^2. \end{aligned}$$

易得

$$\frac{1}{\sqrt{2(\mu+\lambda)}} \|\tau\|_0 \leq \|\tau\|_a \leq \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \|\tau\|_0.$$

显然,有如下的连续性条件成立:

$$\begin{aligned} |a(\sigma, \tau)| &\lesssim \|\sigma\|_0 \|\tau\|_0, \\ \forall \sigma, \tau &\in C^0([0, T]; \Sigma); \\ |b(\tau, v)| &\lesssim \|\tau\|_0 |v|_1, \\ \forall \tau &\in C^0([0, T]; \Sigma), v \in C^2([0, T]; V). \end{aligned}$$

注 1 为方便起见,本文用记号 $a \lesssim b$ 表示存在一个和空间网格参数 h , 时间步长 Δt 均无关的正常数 C 使得不等式 $a \leq Cb$ 成立. 此外,以下稳定性条件成立^[10]:

$$\begin{aligned} \text{(A1) 核空间强制性: } &\forall \tau \in Z := \{\tau \in \Sigma; b(\tau, v) = 0, \forall v \in V\}, \text{ 有} \\ &\|\tau\|_0 \lesssim a(\tau, \tau); \\ \text{(A2) Inf-sup 条件: } &\forall v \in V, \text{ 有} \\ &|v|_1 \lesssim \sup_{0 \neq \tau \in \Sigma} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_0}. \end{aligned}$$

关于弱问题式(2)解的存在唯一性参见文献[8].

3 杂交应力有限元方法

3.1 区域剖分

假设 Ω 是一个凸多边形区域. 令 T_h 表示区域 Ω 的一个四边形网格剖分, 其中 h 代表网格中所有四边形单元直径的最大值. 对任意四边形单元 $K \in T_h$, 其直径记为 h_K . 令 $Z_i(x_i, y_i), 1 \leq i \leq 4$ 表示四边形单元 K 的四个顶点. 假设 T_1, T_2, T_3 以及 T_4 分别为单元 K 的四个子三角形 $Z_1Z_2Z_3, Z_1Z_2Z_4, Z_1Z_3Z_4$ 以及 $Z_2Z_3Z_4$. 定义

$$\begin{aligned} \rho_k &:= \min_{1 \leq i \leq 4} \{\text{三角形 } T_i \text{ 内切圆的直径}\}. \\ \text{假设 } T_h \text{ 满足如下正规性条件}^{[11]}: &\text{存在正常数 } \rho \end{aligned}$$

$$h_K \leq \rho_K \tag{3}$$

设 $\hat{K} := [-1, 1] \times [-1, 1]$ 为参考单元, 其四个顶点分别为

$$\begin{aligned} \hat{Z}_1 &= (-1, -1), \hat{Z}_2 = (1, -1), \hat{Z}_3 = (1, 1), \\ \hat{Z}_4 &= (-1, 1) \end{aligned} \tag{4}$$

对任意的四边形单元 $K \in T_h$, 定义等参双线性映射:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_{12} \xi \eta, \\ y &= b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta + b_{12} \xi \eta, \end{aligned}$$

其中, 单元几何参数

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_{12} & b_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

注 2 当单元 K 为平行四边形时, 我们有 $a_{12} = b_{12} = 0$, 且等参双线性变换 F_K 退化为一个仿射变换.

后文还将用到一个关于网格的(B)条件^[12]: 任意单元 $K \in T_h$ 两条对角线中点之间的距离 $d_K \lesssim h_K^2$. 通过对分加密得到的四边形网格都满足(B)条件.

3.2 半离散/全离散杂交应力格式

令 Σ_h, V_h 分别表示应力空间 Σ 和位移空间 V 的有限维逼近, 并设 $\varphi_{0,h}, \varphi_{1,h}$ 以及 $\psi_{0,h}$ 分别为初始值 φ_0, φ_1 以及 ψ_0 的某种逼近. 弱问题式(2)的半离散格式为:

$$\begin{aligned} \text{求 } (\sigma_h, u_h) \in C^0([0, T]; \Sigma_h) \times C^2([0, T]; h) &\text{ 满足} \\ \begin{cases} a(\sigma_h(t), \tau_h) + a(\sigma_{h,t}(t), \tau_h) + \\ b(\tau_h, u_{h,t}(t)) = 0, \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h \\ b(\sigma_h(t), v_h) + (f(t), v_h) = (u_{h,u}(t), v_h), \\ \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h(0) = \varphi_{0,h}, u_{h,t}(0) = \varphi_{1,h}, \sigma_h(0) = \psi_{0,h} \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

对任意关于 t 的函数 w_h , 记

$$\begin{aligned} w_{h,t} &:= (w_h)_t, \quad w_{h,u} := (w_h)_u. \\ \text{对位移的逼近采用等参双线性插值} \\ V_h &:= \{v \in V; v|_K \circ F_K \in \text{span}\{1, \xi, \eta, \xi\eta\}^2, \\ &\quad \forall K \in T_h\} \end{aligned} \tag{7}$$

应力逼近采用 Pian-Sumihara 杂交应力模式^[13]. 将对称应力 $\tau = (\tau_{ij})_{2 \times 2}$ 简记为向量形式 $\tau := (\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12})^T$. 则 Pian-Sumihara 杂交元对应的应力逼近空间为

$$\begin{aligned} \Sigma_h &:= \{\tau \in \Sigma; \tau|_K \circ F_K = P\beta, \quad \forall \beta \in \mathbf{R}^5, \\ &\quad K \in T_h\}, \end{aligned}$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & \frac{a_2^2}{b_2^2} \xi \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b_1^2}{a_1^2} \eta & \xi \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b_1}{a_1} \eta & \frac{a_2}{b_2} \xi \end{pmatrix} \tag{8}$$

a_1, a_2, b_1, b_2 由式(5)给出. 下述离散形式的稳定性条件成立^[10]:

(B1) 离散核空间强制性: 设四边形网格剖分 T_h 对 Stokes 元 $\mathbf{Q}_1 - P_0$ 是稳定的, 则对任意 $\tau_h \in Z_h := \{\tau_h \in \Sigma_h : b(\tau_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h\}$, 成立 $\|\tau_h\|_0^2 \lesssim a(\tau_h, \tau_h)$;

(B2) 离散 inf-sup 条件: $\forall v_h \in V_h$, 不等式 $|v_h|_1 \lesssim \sup_{0 \neq \tau_h \in \Sigma_h} \frac{b(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|_0}$ 成立.

注 3 对于 Stokes 元 $\mathbf{Q}_1 - P_0$ 而言, 唯一不稳定情形是棋盘模式网格. 后文中均假设 T_h 为非棋盘模式网格. 这意味着离散的强制性条件(B1)总是成立的.

对于半离散格式(6), 其解存在唯一, 并有以下误差估计成立^[8]:

定理 3.1 设 $(\sigma(t), u(t))$ 为弱问题式(2)的解, $(\sigma_h(t), u_h(t))$ 为半离散格式(6)满足初值条件

$\psi_{0,h} = I_{\Sigma_h} \psi_0, \varphi_{1,h} = I_{V_h} \varphi_1$ 的解, 这里 $I_{\Sigma_h} : \Sigma \rightarrow \Sigma_h, I_{V_h} : V \rightarrow V_h$ 分别为某种插值或投影算子, 满足

$$\begin{aligned} \|\psi_0 - I_{\Sigma_h} \psi_0\|_0 &\lesssim h \|\psi_0\|_1, \\ \|\varphi_1 - I_{V_h} \varphi_1\|_0 &\lesssim h \|\varphi_1\|_1. \end{aligned}$$

若 $\sigma \in L^\infty([0, T]; (H^1(\Omega))^{2 \times 2}),$
 $\sigma_t \in L^2([0, T]; (H^1(\Omega))^{2 \times 2}),$
 $u_t \in L^\infty([0, T]; (H^2(\Omega))^2),$
 $u_u \in L^2([0, T]; (H^2(\Omega))^2),$

则下列不等式成立:

$$\begin{aligned} &\|\sigma - \sigma_h\|_{L^\infty(\mathcal{U}_a^2)} + \|u_t - u_{h,t}\|_{L^\infty(\mathcal{U}^2)} \leqslant \\ &Ch(\|\varphi_1\|_1 + \|\sigma\|_{L^\infty(H^1)} + \|\sigma_t\|_{L^2(H^1)} + \\ &\|u_t\|_{L^\infty(H^2)} + \|u_u\|_{L^2(H^2)}), \end{aligned}$$

其中 $\|\tau\|_{L^\infty(\mathcal{U}_a^2)} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\tau(t)\|_a.$

下面考虑半离散格式(6)中对时间导数项 $u_{h,t}$ 的差分离散. 设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T < \cdots < t_M = T$ 为时间 $[0, T]$ 的一致划分, $t_j = j \Delta t, j = 1, 2, \cdots, M-1$, 时间步长 $\Delta t := \frac{T}{M}$, 记

$$t_{j+\frac{1}{2}} := \frac{t_j + t_{j+1}}{2}.$$

对于以 t 为自变量的函数 φ , 定义 $\varphi^n := \varphi(t_n),$
 $\varphi^{n+\frac{1}{2}} := \frac{\varphi^n + \varphi^{n+1}}{2},$

$$\begin{aligned} \Delta_t \varphi^n &:= \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n-1}}{2 \Delta t}, \\ \Delta_t \varphi^{n+\frac{1}{2}} &:= \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t}, \\ \Delta_t^2 \varphi^n &:= \frac{\varphi^{n+1} - 2\varphi^n + \varphi^{n-1}}{(\Delta t)^2}. \end{aligned}$$

于是, 基于二阶中心差分时间离散的全离散杂交应力有限元格式为:

对 $n=0, 1, \cdots, M$, 求 $(\sigma_h^n, u_h^n) \in \Sigma_h \times V_h$, 使得

$$\begin{cases} (\Delta_t^2 u_h^n, v_h) - b(\sigma_h^n, v_h) = (f^n, v_h), \forall v_h \in V_h, \\ a(\sigma_h^n, \tau_h) + a(\Delta_t \sigma_h^{n+\frac{1}{2}}, \tau_h) + b(\tau_h, \Delta_t u_h^{n+\frac{1}{2}}) = 0, \\ \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h, \\ u_h^0 = I_h \varphi_0, u_h^{-1} = I_h \varphi_0 - \Delta t I_h \varphi_1, \sigma_h^0(0) = \psi_{0,h} \end{cases} \quad (9)$$

其中 I_h 表示从空间 V 映到 V_h 的等参双线性插值算子.

定理 3.2 对 $n=1, 2, \cdots, M$, 全离散格式(9)存在唯一解 $(\sigma_h^n, u_h^n).$

证明 $\forall K \in T_h$, 设

$$\begin{aligned} u^n|_K &= N \alpha_K^n, \alpha_K^n = (\alpha_K^{n,1}, \cdots, \alpha_K^{n,8})^T, \\ \varphi^n|_K &= P \beta_K^n, \beta_K^n = (\beta_K^{n,1}, \cdots, \beta_K^{n,5})^T, \\ N &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

P 由式(8)给出, $N_i (i=1, 2, \cdots, 4)$ 为节点基函数, ξ, η 是局部等参坐标,

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases} \quad (10)$$

在式(9)中的第二个等式中取任意 $\beta_K \in \mathbf{R}^5, \tau_h|_K = P \beta_K$ 得

$$\begin{aligned} &\int_K P^T C^{-1} P dx \beta_K^{n+1} + \int_K P^T \epsilon(N) dx \alpha_K^{n+1} = \\ &(1-\Delta t) \int_K P^T C^{-1} P dx \beta_K^n - \int_K P^T \epsilon(N) dx \alpha_K^n, \\ &n \geqslant 0 \end{aligned} \quad (11)$$

引入记号 $G_K := \int_K P^T \epsilon(N) dx, H_K := \int_K P^T C^{-1} P dx.$

显然 H_K 是对称正定矩阵. 由式(11)可得

$$\beta_K^{n+1} = (1-\Delta t) \beta_K^n + H^{-1} G_K \alpha_K^n - H^{-1} G_K \alpha_K^{n+1} \quad (12)$$

由式(9)的第一个等式可得

$$\begin{aligned} \sum_K \int_K N^T N d\alpha_K^{n+1} = & \\ & 2 \sum_K \int_K N^T N d\alpha_K^n - \sum_K \int_K N^T N d\alpha_K^{n-1} - \\ & (\Delta t)^2 \sum_K \int_K P \epsilon(N)^T dx \beta_K^n + \\ & (\Delta t)^2 \sum_K \int_K N^T f^n dx. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} F_K &:= \int_K N^T f^n dx, \\ Q_K &:= \int_K N^T N dx. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \sum_K Q_K \alpha_K^{n+1} = & 2 \sum_K Q_K \alpha_K^n - \sum_K Q_K \alpha_K^{n-1} - \\ & (\Delta t)^2 \sum_K G_K^T H_K^{-1} G_K \beta_K^n + (\Delta t)^2 \sum_K F_K \end{aligned} \quad (13)$$

令 v_1, \cdots, v_m 为等参双线性位移空间 V_h 的节点基函数,使得每个 v_i 在其支集所包含的每个单元 K 上对应于矩阵 V 的某一行. 令 $\theta_1, \cdots, \theta_r$ 为空间 Σ_h 的基函数,使得每个 θ_j 只在某一个单元 K 上取值非零,且 $\theta_j|_K$ 对应于式(8)中矩阵 P 的某一行. 于是 u_h^n 和 φ_h^n 可表示为

$$\begin{aligned} u^n &= (v_1, \cdots, v_m) \alpha^n, \\ \varphi^n &= (\theta_1, \cdots, \theta_r) \beta^n, \end{aligned}$$

其中 α^n 是由每个单元上的节点位移分量 $\alpha_K^{n,k} (k=1, 2, \cdots, 8)$ 组合而成的 m 维向量, β^n 是每个单元上的单元应力参数 $\beta_K^{n,k} (k=1, 2, \cdots, 5)$ 组合而成的 r 维向量. 假设 L, M 和 F 分别为 $m \times m, m \times r$ 的矩阵以及 m 维向量,满足

$$\begin{aligned} L(i, j) &= (v_i, v_j), \\ F(i, j) &= (\Delta t)^2 (v_i, f^n), \end{aligned}$$

$$M(i, j) = (\Delta t)^2 \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n b(v_i, \theta_k) a(\theta_k, \theta_s) b(v_j, \theta_s),$$

取 $n=0$. 则式(13)等价于

$$L \alpha^1 = 2 L \alpha^0 - L \alpha^{-1} - M \beta^0 + F.$$

注意,对任意的 $K \in T_h, Q_K$ 和 H_K 都是对称正定矩阵,从而 L 也是对称正定的,而 $\alpha^{-1}, \alpha^0, \beta^0$ 可以由初始值 $\phi_{0,h}, \varphi_{0,h}$ 得到. 因此,由式(13)可以求出 α^1 ,再由式(12)可求得 β^1 .

类似地,当 $2 \leq k \leq M$ 时,可以由 $(\alpha^{k-1}, \beta^{k-1})$ 和 $(\alpha^{k-2}, \beta^{k-2})$ 求出 (α^k, β^k) . 定理得证.

4 质量集中杂交应力有限元法

根据 Gauss-Lobatto 积分的定义,当 $k=2$ 时,求积节点只有 \hat{K} 的四个顶点 \hat{Z}_j (参见式(4)),求积系数 $\omega_i=1 (i=1, 2)$. 于是对应的 Gauss-Lobatto 积分为

$$\int_{\hat{K}} \hat{\varphi} d\hat{x} \approx I_{\hat{K}}(\hat{\varphi}) := \sum_{j=1}^4 \hat{\varphi}(\hat{Z}_j) \quad (14)$$

结合式(3)给出等参变换 $x=F_K(\hat{x})$, 记

$$\varphi(x) := \hat{\varphi}(\hat{x}), \forall \hat{x} \in \hat{K} \quad (15)$$

从而在任意单元 $K=F_K(\hat{K})$ 上的数值积分的截断误差为

$$\begin{aligned} R_K(\varphi) &= \int_K \varphi dx - I_K(\varphi) = \\ & \int_{\hat{K}} \hat{\varphi} J_K d\hat{x} - I_{\hat{K}}(\hat{\varphi} J_K) \end{aligned} \quad (16)$$

这里 J_K 为等参变换 F_K 的 Jacobian 行列式. 由文献[9]的结果,我们得到定理 4.1.

定理 4.1 假设剖分 T_h 满足正规性条件式(3)以及(B)条件^[6],那么对于 Gauss-Lobatto 积分公式(14),下述截断误差估计成立:

$$\begin{aligned} |R_K(vw)| &\lesssim h_K^2 \|v\|_{1,K} \|w\|_{1,K}, \\ &\forall v, w \in V_h, \forall K \in T_h \end{aligned} \quad (17)$$

在全离散格式的第一个方程

$$\begin{aligned} (\Delta_t^2 u_h^n, v_h) - b(\sigma_h^n, v_h) &= (f^n, v_h), \\ &\forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

中涉及到 $(\Delta_t^2 u_h^n, v_h)$ 这项对应的质量矩阵的求逆. 对 $u_h^n \in V_h, n=1, 2, \cdots, M, K \in T_h$, 设

$$\begin{aligned} u_h^{n+1}|_K &= N \alpha_{n+1}, u_h^n|_K = N \alpha_n, \\ u_h^{n-1}|_K &= N \alpha_{n-1}, \end{aligned}$$

这里

$$N := \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix},$$

N_1, N_2, N_3, N_4 由式(10)给出, $\alpha_{n+1}, \alpha_n, \alpha_{n-1} \in \mathbf{R}^8$ 分别为三个不同时刻对应的 K 上的节点(顶点)位移向量. 取 $v_h|_K = N \hat{\alpha}, \hat{\alpha} \in \mathbf{R}^8$, 可得

$$\begin{aligned} (\Delta_t^2 u_h^n, v_h)|_K &= \\ & \hat{\alpha}^T \int_K N^T N dx \frac{\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1}}{(\Delta t)^2}. \end{aligned}$$

同时,局部的质量矩阵

$$M_K := \int_K N^T N dx = \int_{\hat{K}} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & 0 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & 0 & N_1 N_4 & 0 \\ 0 & N_1 N_1 & 0 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & 0 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & 0 & N_2 N_2 & 0 & N_2 N_3 & 0 & N_2 N_4 & 0 \\ 0 & N_2 N_1 & 0 & N_2 N_2 & 0 & N_2 N_3 & 0 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & 0 & N_3 N_2 & 0 & N_3 N_3 & 0 & N_3 N_4 & 0 \\ 0 & N_3 N_1 & 0 & N_3 N_2 & 0 & N_3 N_3 & 0 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & 0 & N_4 N_2 & 0 & N_4 N_3 & 0 & N_4 N_4 & 0 \\ 0 & N_4 N_1 & 0 & N_4 N_2 & 0 & N_4 N_3 & 0 & N_4 N_4 \end{bmatrix} J_K d\hat{x}.$$

接下来,对 $n+1$ 时刻的局部质量矩阵作质量集中处理. 利用 Gauss-Lobatto 数值积分式(15)来近似计算 M_K . 记

$$\varphi_{ij} := \int_K N_i N_j dx, \quad i, j = 1, \dots, 4,$$
$$\varphi_{ij} \approx \hat{\varphi}_{ij} = I_{\hat{K}}(N_i N_j J_K) = \sum_{s=1}^4 N_i(\hat{Z}_s) N_j(\hat{Z}_s) J_K(\hat{Z}_s) = \delta_{ij} J_K(\hat{Z}_i).$$

则 M_K 经过质量集中处理后化为一个 8×8 的对角矩阵 \tilde{M}_K :

$$M_K \approx \tilde{M}_K = \text{diag}(\hat{\varphi}_{11}, \hat{\varphi}_{11}, \hat{\varphi}_{22}, \hat{\varphi}_{22}, \dots, \hat{\varphi}_{44}, \hat{\varphi}_{44}).$$

将所有单元对应的局部质量集中矩阵进行组装,所得总质量矩阵也为对角阵.

最后,全离散格式(9)的质量集中格式为:

对 $n=1, 2, \dots, M$, 求 $(\sigma_h^n, u_h^n) \in \Sigma_h \times V_h$ 满足

$$\begin{cases} (\Delta_t^2 u_h^n, v_h)_h - b(\sigma_h^n, v_h) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \\ a(\sigma_h^n, \tau_h) + a(\Delta_t \sigma_h^{n+\frac{1}{2}}, \tau_h) + b(\tau_h, \Delta_t u_h^{n+\frac{1}{2}}) = 0, \\ \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h \end{cases}$$

(18)

其中

$$(\Delta_t^2 u^n, v_h)_h := \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[\sum_{K \in T_h} I_K(u_h^{n+1} \cdot v_h) - 2(u_h^n, v_h) + (u_h^{n-1}, v_h) \right],$$

$I_K(\cdot)$ 为采用 Gauss-Lobatto 公式(14)的数值积分.

注 4 由定理 4.1 和文献[8]中使用的标准分析,我们可以证明采用了 Gauss-Lobatto 数值积分的质量集中格式(18)与原格式(9)的收敛阶相当,且有如下误差估计:

$$\max_{0 \leq n \leq M-1} \|\sigma(t_{n+\frac{1}{2}}) - \Phi^{n+\frac{1}{2}}\|_a + \max_{0 \leq n \leq M-1} \|u_t(t_{n+\frac{1}{2}}) - \Delta U^{n+\frac{1}{2}}\|_0 \lesssim h + (\Delta t)^2.$$

然而,数值实验表明,由数值积分导致的相容性误

差会随着时间步迭代逐次累积.

5 数值算例

本节给出算例来验证全离散杂交应力有限元法式(18)的数值性能. 取 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1], T = 1$. 对空间区域使用图 1 所示的两种 $N \times N$ 四边形网格:正方形网格和不规则四边形网格;对时间区间 $[0, T]$,使用 M 等分网格. 作为对比,我们同时给出未做质量集中的全离散杂交应力有限元格式(9)(简记为 HSFEM)的计算结果. 为考察精度,引入下述应力和速度误差记:

$$E_{\sigma}^a := \max_{0 \leq n \leq M-1} \|\sigma(t_{n+\frac{1}{2}}) - \sigma_h^{n+\frac{1}{2}}\|_a,$$
$$E_{u_t}^0 := \max_{0 \leq n \leq M-1} \|u_t(t_{n+\frac{1}{2}}) - \Delta_t u_h^{n+\frac{1}{2}}\|_0.$$

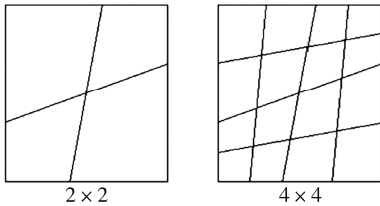
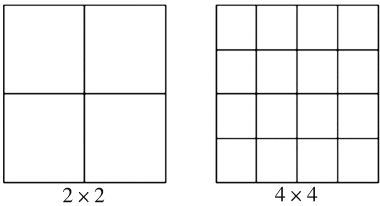


图 1 区域 Ω 的网格剖分
Fig. 1 Grid mesh T_h in region Ω

例 5.1 设真解 $u = (u_1, u_2)^T, \sigma = (\sigma_{ij})_{2 \times 2}$ 具有如下形式:

$$u_1 = u_2 = -e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y),$$
$$\sigma_{11} = 3\mu\pi e^{-t} \cos(\pi x) \sin(\pi y) + \lambda\pi e^{-t} \sin(\pi x) \cos(\pi y),$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\mu\pi te^{-t}(\sin(\pi x)\cos(\pi y)+\cos(\pi x)\sin(\pi y)),$$
$$\sigma_{22}=3\mu\pi te^{-t}\cos(\pi y)\sin(\pi x)+\lambda\pi te^{-t}\sin(\pi x)\cos(\pi y).$$

取 Lamé 常数 $\mu=1, \lambda=1$. 固定时间步长, 加密空间网格得到的误差结果见表 1. 数值结果显示: 应力误差 E_{σ}^a 关于空间网格尺度 h 具 1 阶收敛率; 速度误差 $E_{u_i}^0$ 的收敛率超过 1 阶.

表 1 固定时间步长 $\Delta t=0.02, \mu=1, \lambda=1$ 时的误差

Tab. 1 Errors in the case of fixed time step $\Delta t=0.02, \mu=1, \lambda=1$

	$N \times N$	正方形 网格	收敛率	不规则 网格	收敛率
质量集中	2×2	0.441 3	—	0.447 8	—
	4×4	0.222 1	0.99	0.231 7	0.95
	8×8	0.112 6	0.98	0.116 7	0.99
	16×16	0.055 9	0.99	0.059 1	0.98
HSFEM	2×2	0.412 1	—	0.432 0	—
	4×4	0.211 5	0.96	0.220 4	0.97
	8×8	0.106 7	0.99	0.111 0	0.99
	16×16	0.053 4	1.00	0.055 6	1.00
质量集中	2×2	0.071 2	—	0.064 8	—
	4×4	0.018 5	1.78	0.099	1.88
	8×8	0.004 8	1.93	0.005 2	1.94
	16×16	0.001 2	1.98	0.001 3	1.98
HSFEM	2×2	0.064 8	—	0.065 2	—
	4×4	0.018 5	1.81	0.017 8	1.87
	8×8	0.004 8	1.95	0.004 6	1.95
	16×16	0.001 2	1.96	0.001 2	1.96

表 2 给出了空间网格和时间网格同步加密时计算的结果. 我们取 $M=[\sqrt{8N}]$ 以确保 $\Delta t=O(h^{1/2})$, 这里 $[\cdot]$ 表示取整. E_{σ}^a 的结果与注 4 中的理论精度 $O(h+(\Delta t)^2)$ 相符; 而 $E_{u_i}^0$ 关于空间网格尺度 h 的精度仍然超过 1 阶. 表 3 给出了当空间方向采用正方形网格且时空同步加密时, 在不同时刻的数值结果.

表 2 同步加密 $M=[\sqrt{8N}], \mu=1, \lambda=1$ 时的误差

Tab. 2 Errors in the case of synchronous encryption $M=[\sqrt{8N}], \mu=1, \lambda=1$

	$N \times N$	正方形 网格	收敛率	不规则 网格	收敛率
E_{σ}^a	2×2	0.412 5	—	0.404 6	—
	4×4	0.210 6	0.97	0.229 9	0.92
	8×8	0.108 2	0.96	0.119 0	0.95
	16×16	0.056 0	0.95	0.062 5	0.99
HSFEM	2×2	0.404 6	—	0.424 2	—
	4×4	0.210 4	0.94	0.220 0	0.95
	8×8	0.106 4	0.98	0.110 8	0.98
	16×16	0.053 4	0.99	0.055 6	1.00
质量集中	2×2	0.059 1	—	0.061 1	—
	4×4	0.018 7	1.66	0.019 7	1.63
	8×8	0.005 6	1.73	0.005 8	1.76
	16×16	0.001 7	1.68	0.001 7	1.72
E_{ut}^0	2×2	0.054 8	—	0.058 2	—
	4×4	0.018 7	1.63	0.017 8	1.69
	8×8	0.005 7	1.71	0.005 6	1.71
	16×16	0.001 2	1.64	0.001 8	1.64

表 3 矩形网格 $\mu=0.4, \lambda=1$ 时的误差

Tab. 3 Errors in the case of rectangular mesh, $\mu=0.4, \lambda=1$

$(h, \triangle t)$	t				
	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
(0.25,0.01)	0.3231	0.546 1	0.796 9	1.120 5	1.354 5
(0.062 5,0.005)	0.071 1	0.126 5	0.265 8	0.421 6	0.612 1
(0.015 25,0.002 5)	0.018 5	0.035 3	0.065 9	0.110 8	0.161 1
(0.25,0.01)	0.334 8	0.520 3	0.896 3	1.118 3	1.358 1
(0.015 25,0.002 5)	0.075 5	0.145 2	0.258 9	0.419 6	0.610 2
(0.015 25,0.002 5)	0.017 6	0.032 9	0.062 1	0.109 6	0.168 2

参考文献:

[1] Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions [J]. AIAA J, 2012, 2: 576.

[2] Baker G A, Dougalis V A. The effect of quadrature errors on finite element approximations for second order hyperbolic equations [J]. Math Comput, 1980, 34: 401.

[3] Cohen G, Joly P, Roberts J E, *et al.* Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation [J]. SIAM J Numer Anal, 2001, 38: 2047.

[4] Hennart J P. Topics in finite element discretization

of parabolic evolution problems [M]. Berlin/Heidelberg: Springer, 1982: 30.

[5] Hennart J, Sainz E. On the efficient use of the finite element method in static neutron diffusion calculations [J]. J Comput Math, 1979, 1: 35.

[6] Hinton E, Rock T, Zienkiewicz O C. A note on mass lumping and related processes in the finite element method [J]. Earthq Eng Struct Dyn, 1976, 4: 245.

[7] Cohen G, Joly P, Tordjman N. Higher-order finite elements with mass lumping for the 1-d wave equation [J]. Finite Elem Anal Des, 1994, 16: 329.

[8] 王少杰. 基于 Maxwell 模型的线性粘弹性波传导问题的半离散/全离散杂交应力有限元方法[D]. 成都: 四川大学, 2020.

[9] 王建威. 弹性动力学问题的质量集中杂交应力有限元法[D]. 成都: 四川大学, 2020.

[10] Yu G, Xie X P, Carstensen C. Uniform convergence and a posteriori error estimation for assumed stress hybrid finite element methods [J]. Comput Meth Appl Mech Eng, 2011, 200: 2421.

[11] Becache E, Tsogka P J. A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem [J]. SIAM J Numer Anal, 2001, 28: 304.

[12] Shi Z C. A convergence condition for the quadrilateralwilson element [J]. Numer Math, 1984, 44: 349.

[13] Pian T H H, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements [J]. Inter J Numer Meth Eng, 2010, 20: 1685.

引用本文格式:

中 文: 周亚婧, 陈豫眉. 基于 Maxwell 模型的线性粘弹性波传播问题的质量集中杂交应力有限元法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2021, 58: 061001.

英 文: Zhou Y J, Chen Y M. A hybrid stress finite element method with mass lumping for Maxwell elastodynamic problems of wave propagation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 061001.