一类奇异 Volterra 积分方程在 $L^p(p\geqslant 1)$ 空间中的适定性

郑孟良

(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：受分数阶微分方程定性理论的启发，本文利用不动点定理研究了一类奇异 Volterra 积分方程在 $L^p(p\geqslant 1)$ 空间中的适定性,推广改进了已有结果. 特别地，Riemann-Liouville 分数阶微分方程适定性问题可以作为本文结果的特例.

关键词：奇异 Volterra 积分方程；适定性；分数阶微分方程;$L^p(p\geqslant 1)$空间

中图分类号：O175.5　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.021001

The well-posedness of a class of singular Volterra integral equations on $L^p(p\geqslant 1)$ space

ZHENG Meng-Liang

(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Motivated by fractional differential equations, we consider the well-posedness of a class of singular Volterra integral equations on $L^p(p\geqslant 1)$ space by using the fixed point theorem, generalize and improve the known results. Particularly, the well-posedness of Riemann-Liouville fractional ordinary differential equations can be regarded as a special case of our results.

Keywords: Singular Volterra integral equation; Well-posedness; Fractional differential equation; $L^p(p\geqslant 1)$ space

(2010 MSC 34B15)

1 引　言

本文考虑 Volterra 积分方程

$$y(t)=\eta(t)+\int_0^t f(t,s,y(s))\mathrm{d}s,\quad \text{a. e. } t\in[0,T] \tag{1}$$

在 $L^p(p\geqslant 1)$ 空间中的适定性,其中 $\eta(\cdot)$ 和 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 为给定映射，分别称为状态方程的自由项和生成元,$y(\cdot)$ 取值于 $\mathbf{R}^n$,称为方程(1)的解. Volterra 积分方程最早由 Volterra (意大利数学家,物理学家)提出,此后许多学者都曾研究过 Volterra 积分方程的适定性，即解的存在性、唯一性和稳定性. 当积分核具有奇异性时，Mydlarczyk[1]研究了如下形式的 Volterra 积分方程,给出了解存在的充要条件：

$$y(t)=\int_0^t k(t-s)g(y(s))\mathrm{d}s,\ t>0,$$

其中 $g(\cdot)$为增函数且 $g(0)=0,k(t)=t^{\alpha-1}$，$\alpha>0$. Lin 等[2]考虑了如下被积式中含有 $\frac{1}{(t-s)^{1-\beta}}(0<\beta<1)$形式的更一般的积分方程的适定性：

收稿日期：2021-04-25
基金项目：国家自然科学基金(11971332)
作者简介：郑孟良 (1996－)，男，河南南阳人，硕士研究生，主要研究方向为分布参数系统控制理论. E-mail：2352234693@qq.com

$$y(t)=\eta(t)+\int_0^t \frac{g(t,s,y(s))}{(t-s)^{1-\beta}}\mathrm{d}s,$$
a. e. $t\in[0,T]$, $\beta\in(0,1)$.

本文研究一类具有一般奇异性的 Volterra 积分方程式 (1) 的适定性. 本文的动机来自分数阶微分方程. 在过去几十年间,分数阶微分方程吸引了众多学者的关注. 分数阶微分方程可化为与之等价的 Volterra 积分方程然后进行研究. 例如 Bassam 等 [3]考虑了如下分数阶微分方程解的存在唯一性:

$$\begin{cases}(D^\alpha y)(x)=f(x,y(x)),\ x>0,\ 0<\alpha<1,\\ (I^{1-\alpha}y)(0+)=b\end{cases}\tag{2}$$

其中D^α, $I^{1-\alpha}$分别表示 Riemann-Liouville 分数阶微分和积分算子[4]. Bassam 等将方程(2)化为如下非线性奇异 Volterra 积分方程:

$$y(x)=\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)\,x^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f(t,y(t))\mathrm{d}t}{(x-t)^{1-\alpha}},\ x>0\tag{3}$$

当方程(2)中的D^α, $I^{1-\alpha}$被替换为 Hadamard 型分数阶导数和积分 D^α, $J^{1-\alpha}$时[4],方程(2)可化为

$$y(x)=b_2\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\log\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f(t,y(t))\frac{\mathrm{d}t}{t},\ x>a>0.$$

Volterra 积分方程的自由项通常为 $L^p(p\geqslant1)$ 可积函数,所以我们希望在适当的假设下状态轨道 $y(\cdot)$还在 $L^p(p\geqslant1)$空间中. 故本文研究一类奇异 Volterra 积分方程式 (1) 在 $L^p(p\geqslant1)$ 空间中的适定性. 值得注意的是,文献[5]同样考虑了一类奇异积分方程的适定性. 与之相比,我们的假设虽具有特殊形式,但放松了对生成元的限制,因而是文献[5]的改进.

本文的结构如下. 在第二节中我们给出一些必要的预备知识,在第三节中得出本文的主要结论,即问题(1) 在 $L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 空间中的适定性,并给出与已有结果的对比. 在第四节中我们给出结论与展望.

2 预备知识

给定 $T>0$. 记 $\Delta=\{(t,s)\in[0,T]^2\,|\,0\leqslant s<t\leqslant T\}$. 注意到"对角线"不包含在 Δ 中,若 φ 是 Δ 到$\mathbf{R}^n$的连续函数,则当$|t-s|\to0$ 时 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 可能无界. 我们介绍下述空间 K_0,它是满足如下条件的可测函数 $\kappa:\Delta\to\mathbf{R}_+$全体:对任意 $T>0$,

$$t\mapsto\int_0^t\kappa(t,s)\mathrm{d}s\in L^\infty(0,T),$$

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow0}\left\|\int_\cdot^{\cdot+\varepsilon}\kappa(\cdot+\varepsilon,s)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty(0,T)}=0.$$

当 $0\leqslant h(\cdot)\in L^1(0,T)$, $\kappa(t,s)=h(s)$ $\kappa(\cdot,\cdot)\in K_0$.

引理 2.1[6] 设 $\kappa\in K_0$. 令

$$r_1(t,s):=\kappa(t,s),$$

$$r_{n+1}(t,s):=\int_s^t\kappa(t,u)\,r_n(u,s)\mathrm{d}u,\ n\in\mathbf{N}\tag{4}$$

则对任意 $T>0$,存在常数 $C_T>0$ 和 $\gamma\in(0,1)$使得

$$\left\|\int_0^\cdot r_n(\cdot,s)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty(0,T)}\leqslant C_T n\gamma^n,\ n\in\mathbf{N}.$$

特别地,级数

$$r(t,s):=\sum_{n=1}^\infty r_n(t,s)\tag{5}$$

对几乎所有 $(t,s)\in\Delta$ 收敛,且

$$r(t,s)-\kappa(t,s)=\int_0^t\kappa(t,u)r(u,s)\mathrm{d}u=\int_0^t r(t,u)\kappa(u,s)\mathrm{d}u\tag{6}$$

且对任意 $T>0$,有

$$t\mapsto\int_0^t r(t,s)\mathrm{d}s\in L^\infty(0,T).$$

一般地,称函数 r 为 κ 的预解式(resolvent kernel).

引理 2.2 令 $p,q,r\geqslant1$ 满足 $\frac{1}{p}+1=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$. 则对任意的 $a<b$, $0<\delta\leqslant b-a$, $\varphi(\cdot)\in L^q(a,b)$, $G(\cdot)\in L^r(\mathbf{R})$, 成立

$$\left(\int_a^{a+\delta}\left|\int_a^t\varphi(s)G(t-s)\mathrm{d}s\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|G(\cdot)\|_{L^r(0,\delta)}\,\|\varphi(\cdot)\|_{L^q(a,b)}.$$

证明 对任意 $t\in\mathbf{R}$,记 $G_\delta(t)=G(t)1_{\{(0,\delta]\}}(t)$. 设 $\varphi(\cdot)\in L^q(a,b)$. 则

$$\{[\varphi(\cdot)1_{[a,b]}(\cdot)]*G_\delta(\cdot)\}(t)=\int_a^b\varphi(s)G(t-s)1_{(0,\delta]}(t-s)\mathrm{d}s,\ \text{a.e. } t\in[a,b+\delta].$$

对 $t\notin[a,b+\delta]$,上式右端为 0,且

$$\{[\varphi(\cdot)1_{[a,b]}(\cdot)]*G_\delta(\cdot)\}(t)=\int_a^b\varphi(s)G(t-s)\mathrm{d}s,\ \text{a.e. } t\in[a,a+\delta].$$

由 Young 不等式,对于 $\frac{1}{p}+1=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$, $r\geqslant1$ 有

$$\left(\int_a^{a+\delta}\left|\int_a^t\varphi(s)G(t-s)\mathrm{d}s\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|[\varphi(\cdot)1_{[a,b]}(\cdot)]*G_\delta(\cdot)\|_{L^p(a,a+\delta)}\leqslant\|[\varphi(\cdot)1_{[a,b]}(\cdot)]*G_\delta(\cdot)\|_{L^p(\mathbf{R})}\leqslant$$

$$\|G(\cdot)\|_{L^r(0,\delta)}\ \|\varphi(\cdot)\|_{L^q(a,b)} \tag{7}$$

下面我们给出一类 Volterra 型的 Gronwall 不等式.

引理 2.3[5]　设 $\kappa\in K_0$, r_n和 r 分别由式(4)和(5)给出. 令 $f,g:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 是两个可测函数,使得对任意 $T>0$,存在 $n\in\mathbf{N}$, 有

$$t\mapsto\int_0^t r_n(s)f(s)\mathrm{d}s\in L^\infty(0,T)$$

且对 a. e. $t\in(0,\infty)$有

$$\int_0^t r(t,s)g(s)\mathrm{d}s<+\infty.$$

若对 a. e. $t\in(0,\infty)$,

$$f(t)\leqslant g(t)+\int_0^t\kappa(t,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

则对 a. e. $t\in(0,\infty)$有

$$f(t)\leqslant g(t)+\int_0^t r(t,s)g(s)\mathrm{d}s.$$

特别地,如果 $0\leqslant h\in L^1(\mathbf{R}_+)$, 则 $\kappa(t,\cdot)=h(\cdot)\in K_0$, 且

$$r(t,s)=h(s)\,\mathrm{e}^{\int_s^t h(u)\mathrm{d}u},\ t>s\geqslant 0,$$

上述 Gronwall 不等式退化为经典情形.

3　方程的适定性

在给出主要定理之前我们先来看如下例子.

例 3.1[5]　考虑方程

$$y(t)=\eta(t)+\int_0^t\frac{g(t,s,y(s))}{(t-s)^{1-\beta}}\mathrm{d}s,$$
$$\text{a. e. } t\in[0,T],\ \beta\in(0,1) \tag{8}$$

其中 $\eta(\cdot)\in L^p(0,T)$, $p\geqslant 1$. 对于问题(8)中的 $g(\cdot,\cdot,\cdot)$,假设

(H_1')设 g 为 $\Delta\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的映射,对于任意 y, $g(\cdot,\cdot,y)$ 可测,对 a. e. (t,s), $g(t,s,\cdot)$ 可测,且存在非负函数$L_1(\cdot)$, $L_2(\cdot)$ 使得(约定 $\frac{1}{0}=\infty$)

$$L_1(\cdot)\in L^{\left(\frac{p}{1+\beta p}\vee 1\right)+}(0,T),$$

$$L_2(\cdot)\in L^{\left(\frac{1}{\beta}\vee\frac{p}{p-1}\right)+}(0,T),$$

$$|g(t,s,0)|\leqslant L_1(s),\ (t,s)\in\Delta,$$

$$|g(t,s,y)-g(t,s,y')|\leqslant L_2(s)\cdot|y-y'|,$$
$$(t,s)\in\Delta,\ y,y'\in\mathbf{R}^n.$$

文献[2] 由假设 (H_1')得到了问题(8)在 L^p空间中解的存在唯一性. 值得注意的是,问题(3)是(8)的特殊情形.

不同于文献[2],我们对问题(1)中的生成元 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 提出如下较一般的假设:

(H_1) 设映射 $f:\Delta\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 对任意 y, $f(\cdot,\cdot,y)$ 可测,对 a. e. (t,s), $g(t,s,\cdot)$可测,且存在非负函数 $L_0(\cdot)$, $L(\cdot)$, $G(\cdot)$ 满足

$$L_0(\cdot)\in L^q(0,T),$$

$$L(\cdot)\in L^{\frac{r}{r-1}}(0,T),\ G(\cdot)\in L^r(0,T) \tag{9}$$

$$|f(t,s,0)|\leqslant L_0(s)G(t-s),\ (t,s)\in\Delta \tag{10}$$

$$|f(t,s,y)-f(t,s,y')|\leqslant L(s)G(t-s)\cdot$$
$$|y-y'|,(t,s)\in\Delta,\ y,\ y'\in\mathbf{R}^n \tag{11}$$

其中 $q,r\geqslant 1$.

由式(10),(11)可知,

$$|f(t,s,y)|\leqslant[L_0(s)+L(s)|y|]G(t-s),$$
$$(t,s,y)\in\Delta\times\mathbf{R}^n \tag{12}$$

下面我们给出式 (1) 在 L^p空间中的适定性.

定理 3.2　设 (H_1) 成立, $p,q,r\geqslant 1$ 满足 $\frac{1}{p}+1=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$. 则对任意 $\eta(\cdot)\in L^p(0,T;\mathbf{R}^n)$,问题(1)存在唯一解 $y(\cdot)\equiv y(\cdot,\eta(\cdot))\in L^p(0,T;\mathbf{R}^n)$,且下述估计成立:

$$\|y(\cdot)\|_p\leqslant K\|a(\cdot)\|_p+$$
$$\left\|\int_0^{\cdot}r(\cdot,u)\int_0^u L(s)G(\cdot-s)a(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right\|_p \tag{13}$$

进一步, 如果 $\eta_1(\cdot)$, $\eta_2(\cdot)\in L^p(0,T;\mathbf{R}^n)$, $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$是分别对应于$\eta_1(\cdot)$, $\eta_2(\cdot)$ 的问题(1)的解,则

$$\|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p\leqslant$$
$$K\|\eta_1(\cdot)-\eta_2(\cdot)\|_p+\left\|\int_0^{\cdot}r(\cdot,u)\cdot\right.$$
$$\left.\int_0^u L(s)G(\cdot-s)|\eta_1(\cdot)-\eta_2(\cdot)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right\|_p,$$

其中 K 是一个正常数,

$$a(\cdot)=|\eta(\cdot)|+$$
$$\int_0^{\cdot}L_0(s)G(\cdot-s)\mathrm{d}s\in L^p(0,T),$$

$r(\cdot,\cdot)$ 是对应于 $\kappa(\cdot,\cdot)$ 由式 (5) 定义的预解核, 这里 $\kappa(t,s)=L(s)G(t-s)$.

证明　首先证明问题 (1) 解的存在唯一性. 我们将证明分为三步.

第一步. 固定任意 $\eta(\cdot)\in L^p(0,T;\mathbf{R}^n)$. 对任意 $z(\cdot)\in L^p(0,S;\mathbf{R}^n)$, $0<S\leqslant T$,令

$$J[z(\cdot)](t)=\eta(t)+\int_0^t f(t,s,z(s))\mathrm{d}s,\ \text{a. e.}$$
$$t\in[0,S].$$

则由引理 2.2 和式(12)知,对于任意满足 $\frac{1}{p}+1=$

$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$的 $p,q,r\geqslant 1$,有

$$\|J[z(\cdot)]\|_{L^p(0,S;\mathbf{R}^n)}\leqslant\|\eta(\cdot)\|_{L^p(0,S;\mathbf{R}^n)}+\left(\int_0^S\left|\int_0^t|f(t,s,z(s))|\,\mathrm{d}s\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\|\eta(\cdot)\|_{L^p(0,S;\mathbf{R}^n)}+\left(\int_0^S\left|\int_0^t[L_0(s)+L(s)|z|]G(t-s)\mathrm{d}s\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\|\eta(\cdot)\|_{L^p(0,S;\mathbf{R}^n)}+\|G(\cdot)\|_{L^r(0,T)}\cdot\|[L_0(s)+L(s)|z|]\|_{L^q(0,T)}.$$

由 Hölder 和 Minskowski 不等式,有

$$\|[L_0(s)+L(s)|z|]\|_{L^q(0,T)}\leqslant\|L_0(\cdot)\|_{L^q(0,T)}+\|L(\cdot)\|_{L^{\frac{pq}{p-q}}(0,T)}\||z(\cdot)|\|_{L^q(0,S)}\leqslant\|L_0(\cdot)\|_{L^q(0,T)}+\|L(\cdot)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}}\||z(\cdot)|\|_{L^q(0,S)}\tag{14}$$

所以

$$\|J[z(\cdot)]\|_{L^p(0,S;\mathbf{R}^n)}\leqslant\|\eta(\cdot)\|_{L^p(0,S;\mathbf{R}^n)}+\|G(\cdot)\|_{L^r(0,T)}\{\|L_0(\cdot)\|_{L^q(0,T)}+\|L(\cdot)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(0,T)}\||z(\cdot)|\|_{L^q(0,S)}\}<\infty.$$

我们得到 J 是 $L^p(0,S;\mathbf{R}^n)$ 到其自身的映射.

第二步我们证明映射 $J:L^p(0,\delta;\mathbf{R}^n)\mapsto L^p(0,\delta;\mathbf{R}^n)$($\delta$ 待定)为压缩映射. 对任意 $z_1(\cdot)$,$z_2(\cdot)\in L^p(0,\delta;\mathbf{R}^n)$,

$$J[z_1(\cdot)](t)-J[z_2(\cdot)](t)=\int_0^t[f(t,s,z_1(s)-f(t,s,z_2(s))]\mathrm{d}s.$$

由推论 2.2,类似于式(14)有

$$\|J[z_1(\cdot)]-J[z_2(\cdot)]\|_{L^p(0,\delta;\mathbf{R}^n)}\leqslant\left(\int_0^S\left|\int_0^t L(s)|z_1(s)-z_2(s)|G(t-s)\mathrm{d}s\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\|L(\cdot)\|_{L^{\frac{pq}{p-q}}(0,T)}\|G(\cdot)\|_{L^r(0,\delta)}\|z_1-z_2\|_{L^p(0,\delta;\mathbf{R}^n)}\leqslant\|L(\cdot)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(0,T)}\|G(\cdot)\|_{L^r(0,\delta)}\|z_1-z_2\|_{L^p(0,\delta;\mathbf{R}^n)}.$$

取 $\delta\in(0,T]$ 使得

$$\|L(\cdot)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(0,T)}\|G(\cdot)\|_{L^r(0,\delta)}<1.$$

可以看到 J 为压缩映射,从而 J 在 $L^p(0,\delta;\mathbf{R}^n)$上有一个唯一的不动点,即问题 (1) 在 $[0,\delta]$ 上的唯一解.

第三步考虑问题方程 (1) 在 $[\delta,2\delta]$ 上解的情况. 对任意 $z(\cdot)\in L^p(\delta,2\delta;\mathbf{R}^n)$,令

$$J[z(\cdot)](t)=\eta(t)+\int_0^t f(t,s,y(s))\mathrm{d}s+\int_\delta^t f(t,s,z(s))\mathrm{d}s,\ \text{a. e.}\ t\in[\delta,2\delta],$$

其中 $y(\cdot)$ 为上一步中得到的问题(1) 在 $[0,\delta]$ 上的解. 同法可得

$$\left\|\eta(\cdot)+\int_0^{\cdot}f(\cdot,s,y(s)\mathrm{d}s\right\|_{L^p(\delta,2\delta;\mathbf{R}^n)}\leqslant\left[\int_\delta^{2\delta}\left|\eta(t)+\int_0^\delta f(t,s,y(s)\mathrm{d}s\right|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\left(\int_\delta^{2\delta}|\eta(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}+\left[\int_\delta^{2\delta}\left(\int_0^\delta|f(t,s,y(s)|\,\mathrm{d}s\right)^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\|\eta(\cdot)\|_p+[\int_\delta^{2\delta}(\int_0^\delta[L_0(s)+L(s)|y(s)|]G(t-s)\mathrm{d}s)^p\mathrm{d}t]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\|\eta(\cdot)\|_p+\|G(\cdot)\|_{L^r(0,2\delta)}\cdot\|[L_0(s)+L(s)|y(\cdot)|]\|_{L^q(0,2\delta)}.$$

类似于(14)式的证明,J 为 $L^p(\delta,2\delta;\mathbf{R}^n)\to L^p(\delta,2\delta;\mathbf{R}^n)$ 的映射. 对任意 $z_1(\cdot),z_2(\cdot)\in L^p(\delta,2\delta;\mathbf{R}^n)$,再次利用引理 2.2 有

$$\|J[z_1(\cdot)]-J[z_2(\cdot)]\|_{L^p(\delta,2\delta;\mathbf{R}^n)}=\left(\int_\delta^{2\delta}|J[z_1(\cdot)](t)-J[z_2(\cdot)](t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}=$$
$$\left(\int_\delta^{2\delta}\left|\int_\delta^t[f(t,s,z_1(s)-f(t,s,z_2(s)]\mathrm{d}s\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_\delta^{2\delta}\left|\int_0^t L(s)|z_1(s)-z_2(s)|G(t-s)\mathrm{d}s\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\|L(\cdot)\|_{L^{\frac{pq}{p-q}}(0,T)}\|G(\cdot)\|_{L^r(0,\delta)}\|z_1-z_2\|_{L^p(\delta,2\delta;\mathbf{R}^n)}\leqslant\|L(\cdot)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(0,T)}\|G(\cdot)\|_{L^r(0,\delta)}\|z_1-z_2\|_{L^p(\delta,2\delta;\mathbf{R}^n)}.$$

因$\|L(\cdot)\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(0,T)}\|G(\cdot)\|_{L^r(0,\delta)}<1$,所以问题(1) 在$[\delta,2\delta]$ 上有唯一解. 由归纳法可得 $y(\cdot)$在 $[0,\delta]$, $[\delta,2\delta]$, …, $[\left(\left[\frac{T}{\delta}\right]-1\right)\delta,\left(\left[\frac{T}{\delta}\right]\right)\delta]$, $[\left(\left[\frac{T}{\delta}\right]\right)\delta,T]$ 上的解. 综上,问题(1)在 $[0,T]$ 上解的存在唯一性得证.

接下来,令 $\eta_1(\cdot),\eta_2(\cdot)\in L^p(0,T;\mathbf{R}^n)$,$y_1(\cdot),y_2(\cdot)$ 分别为对应的解,则

$$|y_1(t)-y_2(t)|\leqslant|\eta_1(t)-\eta_2(t)|+\int_0^t|f(t,s,y_1(s)-f(t,s,y_2(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant$$
$$|\eta_1(t)-\eta_2(t)|+\int_0^t L(s)G(t-s)\cdot|y_1(s)-y_2(s)|\mathrm{d}s\leqslant|\eta_1(t)-\eta_2(t)|+\int_0^t r(t,s)|\eta_1(s)-\eta_2(s)|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$|\eta_1(t)-\eta_2(t)|+\int_0^t\kappa(t,s)|\eta_1(s)-\eta_2(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t r(t,u)\int_0^u\kappa(u,s)|\eta_1(s)-\eta_2(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u.$$

则引理 2.3 中第三个不等式成立. 事实上,令 $\kappa(t,s)=L(s)G(t-s)$. 我们可以证明 $\kappa(\cdot,\cdot)\in K_0$(见注 1). 设 $r(\cdot,\cdot)$ 是相应由式 (5) 定义的预解核,则由引理 2.2 知

$$\int_0^t \kappa(t,s)\,|y_1(s)-y_2(s)|\,\mathrm{d}s\in L^p(0,T),$$

所以

$$\int_0^t \kappa(t,s)\,|y_1(s)-y_2(s)|\,\mathrm{d}s<\infty,$$

$$\text{a. e. } t\in[0,T].$$

再由式 (6)得

$$\int_0^t r(t,s)\,|\eta_1(s)-\eta_2(s)|\,\mathrm{d}s=\int_0^t \kappa(t,s)\,|\eta_1(s)-\eta_2(s)|\,\mathrm{d}s+\int_0^t r(t,u)\int_0^u \kappa(u,s)\,|\eta_1(s)-\eta_2(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u<+\infty.$$

所以

$$\|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_p\leqslant K\,\|\eta_1(\cdot)-\eta_2(\cdot)\|_p+\left\|\int_0^\cdot r(\cdot,u)\int_0^u L(s)G(\cdot-s)\,|\,\eta_1(\cdot)-\eta_2(\cdot)\,|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right\|_p.$$

同法可证式 (13).

下面我们对上述定理作一个简要分析. 如果想要得到问题 (1) 的 L^∞ 解,我们需要 $\frac{1}{p}+1=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$,这意味着 q 和 r 是互为共轭的,即若要求 $G(\cdot)$ 具有较强的可积性,则我们只需要 $L_0(\cdot)$ 具有较弱的可积性,反之亦然. 另一方面,若只需要解具有较弱的可积性,特别地,$y(\cdot)\in L^1(0,T;\mathbf{R}^n)$,则我们只需要 $L_0(\cdot)\in L^1[0,T]$,$G(\cdot)\in L^1[0,T]$.

例 3.3　以$G_1(t-s)=\frac{1}{\sin^{1-\beta}(t-s)}$,$G_2(t-s)=\log(t-s)$分别代替例 3.1 中的 $\frac{1}{(t-s)^{1-\beta}}$. 经过计算,有

$$\int_0^T \frac{1}{\sin^{r(1-\beta)}t}\mathrm{d}t=\int_0^{\sin T}\frac{\mathrm{d}u}{u^{r(1-\beta)}\cdot\sqrt{1-u^2}}<\infty,$$

$$\int_0^T |\log t|^r\mathrm{d}t=\int_{\log T}^{\infty} u^r\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u<\infty,$$

即当 $1\leqslant r<1-\frac{1}{\beta}$ 时,$G_1(\cdot)\in L^r(0,T)(0<T<\frac{\pi}{2})$; $G_2(\cdot)\in L^r(0,T)(0<T<1)$. 由定理 3.2,我们可以得到相应方程在 L^p空间中的适定性.

注 1　在(H_1)中令$\kappa_1(t,s)=L(s)G(t-s)$,$\kappa_2(t,s)=L_0(s)G(t-s)$. 我们有$\kappa_1(\cdot,\cdot)\in K_0$,但$\kappa_2(\cdot,\cdot)$不一定属于$K_0$.

首先,我们来证明$\kappa_1(\cdot,\cdot)\in K_0$. 因

$$\int_0^t L(s)G(t-s)\mathrm{d}s\leqslant\left[\int_0^t L(s)^{\frac{r}{r-1}}\mathrm{d}s\right]^{\frac{r-1}{r}}\cdot\left[\int_0^t G(t-s)^r\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{r}}<\infty,$$

且对任意 $\varepsilon>0$ 足够小时

$$\sup_{r\in[0,T]}\int_r^{r+\varepsilon}L(s)G(t+\varepsilon-s)\mathrm{d}s\leqslant\sup_{r\in[0,T]}\left[\int_r^{r+\varepsilon}L(s)^{\frac{r}{r-1}}\mathrm{d}s\right]^{\frac{r-1}{r}}\cdot\left[\int_r^{r+\varepsilon}G(t+\varepsilon-s)^r\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{r}}\to 0,$$

所以我们有$\kappa_1\in K_0$.

接下来,我们给出一个例子来说明$\kappa_2(\cdot,\cdot)\notin K_0$. 考虑方程 (8). 令

$$\eta(t)\equiv 1,g(t,s,y)=\frac{\sqrt{(s-1)^{2\delta-2}+y(s)^2}}{|s-1|^{1-\alpha}},$$

即

$$y(t)=1+\int_0^t\frac{\sqrt{(s-1)^{2\delta-2}+y(s)^2}}{|s-1|^{1-\alpha}(t-s)^{1-\beta}}\mathrm{d}s,$$

$$\text{a. e. } t\in[0,T]\tag{15}$$

其中 $\alpha,\beta\in(0,1)$,$\delta\in(0,1]$,$T>1$. 取

$$L_1(s)=\frac{1}{|s-1|^{2-\alpha-\delta}},$$

$$L_2(s)=\frac{1}{|s-1|^{1-\alpha}},\ s\neq 1.$$

我们有

$$\begin{cases} L_1(\cdot)\in L^{\left(\frac{p}{1+\beta p}\vee 1\right)^+}(0,T), \\ \quad\text{需要 } p<\frac{1}{(2-\alpha-\beta-\delta)^+},\ \alpha+\delta>1, \\ L_2(\cdot)\in L^{\left(\frac{1}{\beta}\vee\frac{p}{p-1}\right)^+}(0,T), \\ \quad\text{需要 } \alpha+\beta>1,\ p>\frac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

所以,若 $\alpha+\beta>1$,$\alpha+\delta>1$,则对任意 $p\in\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{(2-\alpha-\beta-\delta)^+}\right)$,问题(15)有唯一解 $y(\cdot)\in L^p(0,T)$. 这里

$$\kappa_2(t,s)=L_1(s)G(t-s)=\frac{L_1(s)}{(t-s)^{1-\beta}}.$$

我们指出 $\kappa_2(\cdot,\cdot)\notin \mathrm{K}_0$. 可以看到,若 $\alpha+\beta+\delta<2$,方程 (15) 的解 $y(\cdot)$ 为正. 我们有

$$\lim_{t\to 1}\int_0^t\frac{L_1(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\mathrm{d}s=$$

$$\lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{1}{|s-1|^{2-\alpha-\delta}(t-s)^{1-\beta}}\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{(1-s)^{3-\alpha-\beta-\delta}} = \infty.$$

这说明 $\int_0^t \frac{L_1(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\mathrm{d}s \notin L^\infty(0,T)$，即 $\kappa_2 \notin K_0$.

由引理 2.2 可知，$\int_0^t L_0(s)G(t-s)\mathrm{d}s \in L^p(0,T)$. 文献[5]考虑了一类随机情形的奇异积分方程，其确定性部分为

$$X(t) = g(t) + \int_0^t A(t,s,X(s))\mathrm{d}s, t \geqslant 0,$$

其中 $g(\cdot)\in L^p(0,T,\boldsymbol{X})$，$A:\bar{\Delta}\times\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$ 可测，$\boldsymbol{X}$ 为一个 Banach 空间. 该文是由如下假设得到 L^p 解的存在唯一性的：

(H_2) 对 $p\geqslant 1$ 和 任意的 $T>0$，

$$\operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\int_0^t [\kappa_3(t,s)+\kappa_4(t,s)]\cdot \|g(s)\|_{\boldsymbol{X}}^p\mathrm{d}s < \infty,$$

其中 κ_3 和 κ_4 来自下述的 (H_3)，(H_4)；

(H_3) 存在 $\kappa_3\in K_0$，使得对于任意 $(t,s)\in\Delta$，$x\in\boldsymbol{X}$，

$$\|A(t,s,x)\|_{\boldsymbol{X}} \leqslant \kappa_3(t,s)\cdot(\|x\|_{\boldsymbol{X}}+1)；$$

(H_4) 存在 $\kappa_4\in K_0$，使得对任意 $(t,s)\in\Delta$，$x,y\in\boldsymbol{X}$ 有

$$\|A(t,s,x)-A(t,s,y)\|_{\boldsymbol{X}} \leqslant \kappa_4(t,s)\|x-y\|_{\boldsymbol{X}}.$$

由注 1 可以看到，一方面，(H_1) 中的 Lipschitz 系数 $L(s)G(t-s)$ 是(H_4)中 κ_4 的一种特殊形式；另一方面，对比 (H_3)可知我们放松了其对生成元的限制，改进了相应结果.

4 结 论

我们考虑了一类具有一般奇异性的 Volterra 积分方程通过不动点定理给出了其在 $L^p(p\geqslant 1)$ 空间中的适定性，推广了文献[2]的结果. 相比于文献[5]，我们放松了对生成元的要求.

值得说明的是，假设 (H_1)需要 $G(\cdot)$ 是关于 $t-s$ 的函数. 特别地，主要结果的证明非常依赖于卷积不等式(引理 2.2)，当 $G(\cdot,\cdot)$ 为一般的关于 t 和 s 的二元函数时，我们还没有得到相应的结果. 我们期望在以后的论文中能够给出.

参考文献：

[1] Mydlarczyk W. The existence of nontrivial solutions of Volterra equations [J]. Math Scand, 1991, 68: 83.

[2] Lin P, Yong J. Controlled singular Volterra integral equations and Pontryagin maximum principle [J]. SIAM J Control Optim, 2020, 58: 136.

[3] Bassam A, Mohammed A. Some existence theorems on differential equations of generalized order [J]. J Reine Angew Math, 1965, 218: 70.

[4] Kilbas A, Srivastava H, Trujillo J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: North-Holland, 2006.

[5] Zhang X. Stochastic Volterra equations in Banach spaces and stochastic partial differential equation [J]. J Funct Anal, 2010, 258: 1361.

[6] Gripenberg G. On the resolvents of nonconvolution Volterra kernels [J]. Funkcial Ekvac, 1980, 23: 83.

引用本文格式：

中 文：郑孟良. 一类奇异 Volterra 积分方程在 $L^p(p\geqslant 1)$空间中的适定性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2022，59：021001.

英 文：Zheng M L. The well-posedness of a class of singular Volterra integral equations on $L^p(p\geqslant 1)$ space [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 021001.