一类两端简单支撑弹性梁问题解的存在性

马亚薇，马如云
(西安电子科技大学数学与统计学院，西安 710126)

摘　要：本文研究了一类两端简单支撑的弹性梁问题

$$\begin{cases} y''''(x)+(k_1(x)+k_2(x))y''(x)+k_1(x)k_2(x)y(x)=f(x,y(x)),\ 0<x<1, \\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0 \end{cases}$$

解的存在性，其中的函数 $k_j\in C[0,1]$，$j=1,2$，且对于任意的 $x\in[0,1]$ 存在正常数 h_1,h_2 满足 $0<k_1(x)<h_1<k_2(x)<h_2<t_1^2\approx 4.11585$，$t_1$ 是方程 $t\cos t+\sin t=0$ 的第一个正解. 主要结果的证明基于上下解方法和 Elias 不等式.

关键词：弹性梁方程；非共轭；上下解方法；存在性
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.021003

Existence of solutions for a class of elastic beam problems with simply supported ends

MA Ya-Wei, *MA Ru-Yun*
(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, China)

Abstract: We in this paper study the existence of solutions for the following elastic beam problem with simply supported ends:

$$\begin{cases} y''''(x)+(k_1(x)+k_2(x))y''(x)+k_1(x)k_2(x)y(x)=f(x,y(x)),\ 0<x<1, \\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0, \end{cases}$$

where $k_j\in C[0,1]$, $j=1,2$ and for any $x\in[0,1]$ there exist positive constants h_1,h_2 satisfying $0<k_1(x)<h_1<k_2(x)<h_2<t_1^2\approx 4.11585$, t_1 is the first positive solution of the equation $t\cos t+\sin t=0$. The proof of the main results is based on the method of lower and upper solutions and the Elias's inequality.

Keywords: Elastic beam equation; Disconjugacy; Lower and upper solutions; Existence
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

弹性梁是工程建筑的基本构件之一. 在材料力学和工程物理中，人们常用四阶常微分方程边值问题来描述弹性梁的状态. 源于这类问题的普遍性与重要性，不同边界条件下的梁方程解的存在性问题受到广泛关注，也出现了许多重要研究结果[1-12].

2015 年，Vrabel[6] 在 $h(x,y(x))$ 关于 y 单调的条件下通过构造上下解方法研究了四阶边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)+\lambda y''(x)=h(x,y(x)),\ 0<x<1, \\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0 \end{cases}$$

解的存在性，其中 $\lambda=k_1+k_2$，k_1,k_2 是两个常数且满足 $k_2<k_1<0$. 当 $k_1,k_2>0$ 时，情况完全不同.

收稿日期：2021-07-09
基金项目：国家自然科学基金(12061064)
作者简介：马亚薇(1997－)，女，河南濮阳人，硕士研究生，主要研究方向为泛函分析. E-mail：myw155393@163.com
通讯作者：马如云. ryma@xidian.edu.cn

2018 年,Ma 等[7]在上述文献的基础上运用新方法构造了 Green 函数,结合 Elias 公式研究了 k_1,k_2 均为正常数情形下四阶问题

$$\begin{cases} y''''(x)+(k_1+k_2)y''(x)+k_1k_2y(x)= \\ \quad f(x,y(x)),\ 0<x<1, \\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性,得到以下结果:

定理 A　假设 $0<k_1<k_2<x_1^2\approx 4.11585$,$x_1$ 是方程 $x\cos x+\sin x=0$ 的第一个正解,且问题(1)存在下解 α 和上解 β 满足 $\alpha(x)\leqslant\beta(x)$,$x\in[0,1]$. 若 $f:\{(x,s)\,|\,x\in[0,1],\alpha(\cdot)\leqslant s\leqslant\beta(\cdot)\}\to\mathbf{R}$ 连续且满足 $f(x,s_1)\leqslant f(x,s_2)$,$\alpha(x)\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\beta(x)$,$x\in[0,1]$,则问题(1)存在一个解 $y(x)$ 满足 $\alpha(x)\leqslant y(x)\leqslant\beta(x)$,$0\leqslant x\leqslant 1$.

本文进一步将文献[7]中的常数 k_1,k_2 推广到满足一定条件的函数,考虑问题

$$\begin{cases} y''''(x)+(k_1(x)+k_2(x))y''(x)+ \\ \quad k_1(x)k_2(x)y(x)=f(x,y(x)),\ 0<x<1, \\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

解的存在性,其中 $k_1,k_2\in C[0,1]$. 本文总假设

(H1) 对于任意的 $x\in[0,1]$,存在正常数 h_1,h_2 满足 $0<k_1(x)<h_1<k_2(x)<h_2<t_1^2\approx 4.11585$,这里的 t_1 是方程 $t\cos t+\sin t=0$ 的第一个正解.

本文的主要结果如下:

定理 1.1　假设(H1)成立. 若问题(2)存在下解 α 和上解 β 满足 $\alpha(x)\leqslant\beta(x)$,$x\in[0,1]$,且 $f:\{(x,s)\,|\,x\in[0,1],\alpha(\cdot)\leqslant s\leqslant\beta(\cdot)\}\to\mathbf{R}$ 连续且满足 $f(x,s_1)\leqslant f(x,s_2)$,$\alpha(x)\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\beta(x)$,$x\in[0,1]$,则问题(2)存在一个解 $y(x)$ 满足 $\alpha(x)\leqslant y(x)\leqslant\beta(x)$,$0\leqslant x\leqslant 1$.

2　预备知识

设 $X=C[0,1]$,其在最大值范数 $\|u\|_\infty=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$ 下构成一个 Banach 空间. 定义线性算子 $L:D(L)\to X$,

$$Ly:=y''''+(k_1(x)+k_2(x))y''+ k_1(x)k_2(x)y,\ y\in D(L),$$

$$D(L):=\{y\in C^4[0,1]:y(0)=y(1)= y''(0)=y''(1)=0\}.$$

定义线性算子 $L_1:D(L_1)\to X$,$L_1y:=y''+k_1(x)y$,其中 $D(L_1):=\{y\in C^2[0,1]:y(0)=y(1)=0\}$. 边值问题

$$\begin{cases} y''(x)+k_1(x)y=0,\ 0<x<1, \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

的 Green 函数为

$$G_1(x,s)=\frac{1}{\Delta}\begin{cases} \varphi(x)\psi(s),\ 0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1, \\ \varphi(s)\psi(x),\ 0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} \psi(0) & \varphi(0) \\ \psi'(0) & \varphi'(0) \end{vmatrix},$$

$\varphi(t)$,$\psi(t)$分别是问题

$$\begin{cases} \varphi''+k_1(x)\varphi=0,\ 0<x<1, \\ \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \psi''+k_1(x)\psi=0,\ 0<x<1, \\ \psi(1)=0,\ \psi'(1)=-1 \end{cases} \tag{4}$$

的唯一解.

同理,定义线性算子 $L_2:D(L_2)\to X$,$L_2y:=y''+k_2(x)y$,其中 $D(L_2):=\{y\in C^2[0,1]:y(0)=y(1)=0\}$. 则可得到与 $G_1(x,s)$类似的问题

$$\begin{cases} y''(x)+k_2(x)y=0,\ 0<x<1, \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

的 Green 函数,记为 $G_2(x,s)$.

引理 2.1(Sturm 比较定理)[13]　设 $x(t)$,$y(t)$ 分别是二阶线性齐次方程 $x''+q_1(t)x=0$, $y''+q_2(t)y=0$ 的非平凡解,其中 $q_1,q_2\in C[0,1]$,$q_1(t)\leqslant q_2(t)$,$t\in[0,1]$,且在$[0,1]$上的任一子区间内 q_1 不恒等于 q_2. 如果 $\alpha,\beta\in[0,1]$是 $x(t)$的两个相邻零点,则 $y(t)$在(α,β)内至少有一个零点.

引理 2.2　假设对于任意的 $x\in[0,1]$有 $k_1(x),k_2(x)\in(0,\pi^2)$,则

(i) $\varphi(x)>0$, $x\in(0,1]$;

(ii) $\psi(x)>0$, $x\in[0,1)$.

证明　众所周知,初值问题

$$\begin{cases} \bar{\varphi}''+\pi^2\bar{\varphi}=0,\ 0<x<1, \\ \bar{\varphi}(0)=0,\ \bar{\varphi}'(0)=1 \end{cases}$$

的唯一解为 $\bar{\varphi}=\sin\pi x$,其在$(0,1)$之间没有零点. 因此,由 $k_1(x)\in(0,\pi^2)$,$x\in[0,1]$,$\varphi(0)=0$ 及 Sturm 比较定理可知 $\varphi(x)>0$,$x\in(0,1]$. 同理可证(ii),引理得证.

由引理 2.2 及 $G_1(x,s)$,$G_2(x,s)$的表达式可知,$G_1(x,s)>0$,$G_2(x,s)>0$,$\forall(x,s)\in(0,1)\times(0,1)$. 可以验证,$Ly=L_2(L_1)y$,$Ly=0$ 的 Green 函数 $G(x,s)$满足

$$G(x,s):=\int_0^1 G_2(x,t)G_1(t,s)\,\mathrm{d}t,\quad (x,s)\in[0,1]\times[0,1].$$

因此,$G(x,s)>0$,$\forall(x,s)\in(0,1)\times(0,1)$.

3 非共轭和 Elias 公式

定义 3.1[14]　如果一个 n 阶线性常微分方程 $L_n[y]=y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(t)y=0$，$p_k(\cdot)\in C[a,b]$，$k=1,\ldots,n$ 的任个非平凡解在区间$[a,b]$上的零点个数都少于 n，那么该方程被称为非共轭的，多重零点按其重数记.

考虑微分方程

$$L_ny(x)+\lambda y(x)=0,\ x\in[0,1]\tag{5}$$

其中 $L_ny=0$ 是非共轭的. L_n 可以做如下 Pólya 分解：

$$L_ny=\rho_n(\rho_{n-1}\cdots(\rho_1(\rho_0y)')'\cdots)'.$$

对任意 $x\in[0,1]$，权函数 $\rho_i(x)>0$，$\rho_i(x)\in C^{n-i}$，$i=0,\ldots,n$，拟导数 $L_0y=\rho_0y$，$L_iy=\rho_i(L_{i-1}y)'$，$i=1,\ldots,n$.

由文献[14]可知，如果 u 是方程(5)的非平凡解，则它的任何一个拟导数的零点都是孤立的. 拟导数 $L_0u,\ldots,L_{n-1}u$ 被视作按循环顺序排列，即 L_0u 排列在 $L_{n-1}u$ 之后. 令 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_r$ 表示以下述方式列出的$[0,1]$中拟导数的零点：

(a) 如果一个点是一个或多个阶数不间断的拟导数的零点，那么对这组零点只列出一次(即对这组零点使用同一个下标)；

(b) 如果一个点是存在间断阶数拟导数的公共零点，那么对于分开的每一组不间断阶数的零拟导数都分别以不同的下标对这个零点进行一次标记.

规定 $L_{n-1}u$ 和 L_0u 的阶数是不间断的. 在 x_i 处为零的 u 的不间断拟导数的个数记为 $n(x_i,u)$. 令 $I\coloneqq\{i:x_i=0$ 或 $x_i=1$ 或 $0<x_i<1$ 且 $n(x_i,u)$是偶数$\}$，$J\coloneqq\{j:0<x_j<1$ 且 $n(x_j,u)$是奇数$\}$，

$$N(u)=\sum_{i\in I}n(x_i,u)+\sum_{j\in J}[n(x_j,u)-1].$$

引理 3.2(Elias 公式)[15]　若方程 $L_ny=0$ 在$[0,1]$上是非共轭的，u 是(5)的任意非平凡解，则 $N(u)\leqslant n$.

引理 3.3[14]　考虑方程

$$\bar L_1y=y''+q_1(t)y=0,\ t\in[0,1],$$

$$\bar L_2y=y''+q_2(t)y=0,\ t\in[0,1],$$

其中 $\bar L_1$，$\bar L_2$ 均为线性算子，$q_1(t)$，$q_2(t)\in C[0,1]$. 有

(i) 若$\bar L_2y=0$ 在$[0,1]$上是非共轭的，且 $q_1(t)\leqslant q_2(t)$对任意 $t\in[0,1]$均成立，则$\bar L_1y=0$ 在$[0,1]$上也是非共轭的；

(ii) 若$\bar L_1y=0$，$\bar L_2y=0$ 在$[0,1]$上均为非共轭的，则复合方程 $\bar Ly=\bar L_1(\bar L_2)y=0$ 在$[0,1]$上也是非共轭的.

4 上下解

定义 4.1　如果函数 $\alpha\in C^4[0,1]$满足

$$L(\alpha(x))\leqslant f(x,\alpha(x)),\ x\in(0,1)$$

及 $\alpha(0)\leqslant0$，$\alpha(1)\leqslant0$，$\alpha''(0)\geqslant0$，$\alpha''(1)\geqslant0$，则称 α 为问题(2)的下解.

定义 4.2　如果函数 $\beta\in C^4[0,1]$满足

$$L(\beta(x))\geqslant f(x,\beta(x)),\ x\in(0,1)$$

及 $\beta(0)\geqslant0$，$\beta(1)\geqslant0$，$\beta''(0)\leqslant0$，$\beta''(1)\leqslant0$，则称 β 为问题(2)的上解.

记

$$g_\alpha(x)=L(\alpha(x))-f(x,\alpha(x)),\ x\in[0,1]\tag{6}$$

$$g_\beta(x)=L(\beta(x))-f(x,\beta(x)),\ x\in[0,1]\tag{7}$$

那么 $g_\alpha(x)\leqslant0$，$g_\beta(x)\geqslant0$，$x\in[0,1]$. 若令 $v_\alpha(x)$ 是问题 $Lv_\alpha(x)=0$，$x\in(0,1)$，$v_\alpha(0)=\alpha(0)$，$v_\alpha(1)=\alpha(1)$，$v''_\alpha(0)=\alpha''(0)$，$v''_\alpha(1)=\alpha''(1)$的解，那么 $v_\alpha(x)$可以唯一表示成

$$v_\alpha(x)=\alpha(0)w(x)+\alpha(1)w(1-x)+\alpha''(0)\chi(x)+\alpha''(1)\chi(1-x)\tag{8}$$

其中 $w(x)$，$\chi(x)$分别是问题

$$L(y)=0,\ y(0)=1,\ y''(0)=y(1)=y''(1)=0\tag{9}$$

$$L(y)=0,\ y(0)=0,\ y''(0)=1,\ y(1)=y''(1)=0\tag{10}$$

的唯一解.

如果令 $v_\beta(x)$是问题 $Lv_\beta(x)=0$，$x\in(0,1)$，$v_\beta(0)=\beta(0)$，$v_\beta(1)=\beta(1)$，$v''_\beta(0)=\beta''(0)$，$v''_\beta(1)=\beta''(1)$的解，那么 $v_\beta(x)$可以唯一表成

$$v_\beta(x)=\beta(0)w(x)+\beta(1)w(1-x)+\beta''(0)\chi(x)+\beta''(1)\chi(1-x)\tag{11}$$

引理 4.3　(i) 若(H1)成立，则 $w(x)>0$，$x\in(0,1)$；

(ii) 若 $h_1,h_2\in(0,\pi^2)$，则 $\chi(x)<0$，$x\in(0,1)$.

证明　(i) 我们断言当(H1)成立时算子

$$L_4y\coloneqq y^{(4)}+(k_1(x)+k_2(x))y''$$

有以下形式的 Pólya 分解：

$$L_4y\coloneqq\rho_4(\rho_3(\rho_2(\rho_1(\rho_0y)')')')',$$

对任意 $x\in[0,1]$，权函数 $\rho_i(x)>0$，$i=0,\ldots,4$. 事实上，定义线性算子 $T_i:D(T_i)\to X$，$i=1,2,3$，

$$T_1y\coloneqq y'',\ T_2y\coloneqq y''+(k_1(x)+k_2(x))y$$

及

$$T_3 y \coloneqq y'' + (h_1 + h_2) y,$$

其中

$$D(T_1) = D(T_2) = D(T_3) \coloneqq \{y \in C^2[0,1]: y(0) = y(1) = 0\}.$$

由于 $0 < h_1 + h_2 < 2t_1^2 < \pi^2$，据文献[7]，存在常数 $\sigma \in (0,1)$ 使得

$$\sin(\sqrt{h_1 + h_2}(x + \sigma)) > 0, \forall x \in [0,1].$$

定义

$$\lambda_0(x) = \frac{1}{\sin(\sqrt{h_1 + h_2}(x + \sigma))},$$

$$\lambda_1(x) = \frac{\sin^2(\sqrt{h_1 + h_2}(x + \sigma))}{\sqrt{h_1 + h_2}},$$

$$\lambda_2(x) = \frac{\sqrt{h_1 + h_2}}{\sin(\sqrt{h_1 + h_2}(x + \sigma))}.$$

则 $\lambda_i > 0, i = 0,1,2$. 计算可知 T_3 可进行 Pólya 分解 $T_3 y = \lambda_2(\lambda_1(\lambda_0 y)')'$. 由 $k_1(x) < h_1 < k_2(x) < h_2$ 及引理 3.3(i)可知，$T_2 y = 0$ 在[0,1]上是非共轭的. 又已知 T_1 可做 Pólya 分解

$$T_1 y = 1 \times (1 \times (1 \times y)')',$$

因而由引理 3.3 可知

$$L_4 y = T_2(T_1) y \coloneqq y^{(4)} + (k_1(x) + k_2(x)) y'' = 0$$

在[0,1]上是非共轭的，L_4 可做相应的 Pólya 分解.

现反设存在 $\tau \in (0,1)$，使得

$$w(\tau) = \min\{w(x) \mid x \in [0,1]\} \leqslant 0.$$

(a) 若 $w(\tau) = 0$，因 $w'(\tau) = 0, w''(0) = 0 = w(1) = w''(1)$，则可得 $N(w) \geqslant 5$，与引理 3.2 矛盾.

(b) 若 $w(\tau) < 0$，则存在 $a, b \in (0,1]$ 使得 $w(x) < 0, x \in (a,b)$，且 $w(a) = w(b) = 0$. 设 w_θ 为齐次边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) + (k_1(x) + k_2(x)) y''(x) + \\ \quad \theta k_1(x) k_2(x) y(x) = 0, \\ y(0) = 1,\ y''(0) = y(1) = y''(1) = 0 \end{cases}$$

的唯一解，其中 $\theta \in [0,1]$ 是参数. 显然，当 $\theta = 1$ 时，$w_1 = w$；当 $\theta = 0$ 时，$w_0(x) = 1 - x$，其在[0,1)上恒正. 由解对参数的连续依赖性可知，存在 $\hat{\theta} \in (0,1)$ 使得 $w_{\hat{\theta}}$ 有重零点 $x_0 \in (0,1)$，满足 $w_{\hat{\theta}}(x_0) = w'_{\hat{\theta}}(x_0) = 0$. 类似(a)的讨论可知，$N(w_{\hat{\theta}}) \geqslant 5$，与引理 3.2 矛盾.

(ii) 由(10)式可知，$\chi(x)$ 满足

$$L_2 \chi = Z,\ \chi(0) = 0,\ \chi(1) = 0 \tag{12}$$

其中 Z 满足

$$L_1 Z = 0, Z(0) = 1, Z(1) = 0 \tag{13}$$

令 $\hat{Z}$ 表示满足边值问题

$$\begin{cases} \hat{Z}'' + h_1 \hat{Z} = 0, \\ \hat{Z}(0) = 1,\ \hat{Z}(1) = 0 \end{cases}$$

当 $h_1 = r^2, r > 0$ 时的解，计算可得

$$\hat{Z}(x) = \frac{\sin(r(1 - x))}{\sin(r)}.$$

因 $r \in (0, \pi)$，所以 $\hat{Z} > 0, x \in (0,1)$. 由 $k_1(x) < h_1$ 及 Sturm 比较定理可得 $Z > 0, x \in (0,1)$. 由(12)式及 $G_2 > 0$ 可知，$\chi < 0, x \in [0,1]$. 证毕.

结合引理 4.1，(8)式及(9)式可得 $v_\alpha(x) \leqslant 0$，$v_\beta(x) \geqslant 0, x \in [0,1]$. 定义算子

$$T: C[0,1] \to C^4[0,1],$$

$$T\varphi(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s, \varphi(s)) \mathrm{d}s,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

则由(6)式可得

$$L(\alpha) = f(x, \alpha(x)) + g_\alpha(x),$$

$$\alpha(x) = v_\alpha(x) + \int_0^1 G(x,s) f(s, \alpha(s)) \mathrm{d}s + \int_0^1 G(x,s) g_\alpha(s) \mathrm{d}s,$$

及 $\alpha(x) \leqslant T\alpha(x), x \in [0,1]$. 类似地，我们有 $\beta(x) \geqslant T\beta(x),\ x \in [0,1]$.

以下引理是 Schauder 不动点定理的直接结果：

引理 4.4[16]　若存在常数 $M > 0$，使得 $|f(x,y)| \leqslant M$ 对任意的 $(x,y) \in [0,1] \times \mathbf{R}$ 成立，则存在 $y(x)$ 是满足问题(2)的解.

5　主要结果的证明

定义 $[0,1] \times \mathbf{R}$ 上的函数

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x, \beta(x)),\ y > \beta(x), \\ f(x,y),\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x), \\ f(x, \alpha(x)),\ y < \alpha(x). \end{cases}$$

因 F 在 $[0,1] \times \mathbf{R}$ 上连续有界，由引理 4.4 知存在 $y(x)$ 满足边值问题

$$\begin{cases} L(y) = F(x,y), \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0. \end{cases}$$

下证 $\alpha(x) \leqslant y(x) \leqslant \beta(x), 0 \leqslant x \leqslant 1$. 由算子 L 的线性，上下解的定义及 f 的单调性条件有

$$L(y(x) - \beta(x)) = L(y(x)) - L(\beta(x)) \leqslant F(x, y(x)) - f(x, \beta(x)) \leqslant 0,$$

从而

$$L(y(x)-\beta(x)):=l_1(x)\leqslant 0,\ x\in[0,1],$$

$$y(x)-\beta(x)=-v_\beta(x)+\int_0^1 G(t,s)l_1(s)\mathrm{d}s\leqslant 0,\ x\in[0,1].$$

因此 $y(x)\leqslant\beta(x), x\in[0,1]$. 同理可证

$$L(y(x)-\alpha(x))=L(y(x))-L(\alpha(x))\geqslant F(x,y(x))-f(x,\alpha(x))\geqslant 0,$$

$$L(y(x)-\alpha(x)):=l_2(x)\geqslant 0,\ x\in[0,1],$$

$$y(x)-\alpha(x)=-v_\alpha(x)+\int_0^1 G(t,s)l_2(s)\mathrm{d}s\geqslant 0,\ x\in[0,1].$$

因此 $y(x)\geqslant\alpha(x), x\in[0,1]$. 证毕.

注　与问题(1)相比,本研究的难点在于无法得到 Green 函数的具体形式,因而运用 Sturm 比较定理对其性质进行分析. 此外,由于无法计算 Pólya 分解的具体形式,我们不能直接运用 Elias 公式,因而需要再次运用 Sturm 比较定理并结合非共轭的重要性质,以满足 Elias 公式的条件.

参考文献:

[1] Yuan C J, Jiang D Q, O'Regan D. Existence and uniqueness of positive solutions for fourth-order nonlinear singular continuous and discrete boundary value problems [J]. Appl Math Comput, 2008, 203: 194.

[2] 马如云, 赵中姿. 一类四阶常微分方程非线性边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 236.

[3] 张亚莉. 一类非线性四阶常微分方程边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 1004.

[4] Li Y X. Multiply sign-changing solutions for fourth-order nonlinear boundary value problems [J]. Nonlinear Anal: Theor, 2007, 67: 601.

[5] Haddouchi F, Houari N. Monotone positive solution of fourth order boundary value problem with mixed integral and multi-point boundary conditions [J]. J Appl Math Comput, 2021, 66: 513.

[6] Vrabel R. On the lower and upper solutions method for the problem of elastic beam with hinged ends [J]. J Math Anal Appl, 2015, 421: 1455.

[7] Ma R Y, Wang J X, Long Y. Lower and upper solutions method for the problem of elastic beam with hinged ends [J]. J Fixed Point Theory Appl, 2018, 20: 46.

[8] Dang Q A, Long D Q, Ngo T K Q. A novel efficient method for nonlinear boundary value problems [J]. Numer Algorith, 2017, 2: 427.

[9] Dang Q A, Ngo T K Q. Existence results and iterative method for solving the cantilever beam equation with fully nonlinear term [J]. Nonlinear Anal: RWA, 2017, 36: 56.

[10] Dinh V D. Global existence and scattering for a class of nonlinear fourth-order Schrodinger equation below the energy space [J]. Nonlinear Anal: Theor, 2018, 172:115.

[11] Ma R Y. Existence of positive solutions of a fourth-order boundary value problems [J]. Appl Math Comput, 2005, 168: 1219.

[12] Liu X L, Li W T. Positive solutions of the nonlinear fourth-order beam equation with three parameters [J]. J Math Anal Appl, 2005, 303: 150.

[13] 邓宗琦. 常微分方程边值问题和 Sturm 比较理论引论[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1987.

[14] Coppel W A. Disconjugacy [M]. New York: Springer-Verlag, 1971.

[15] Elias U. Oscillation theory of two-term differential equations [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[16] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order [M]. New York: Springer, 2001.

引用本文格式:

中　文: 马亚薇, 马如云. 一类两端简单支撑弹性梁问题解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2022, 59: 021003.

英　文: Ma Y W, Ma R Y. Existence of solutions for a class of elastic beam problems with simply supported ends [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 021003.