一类具有 logistic 源的高维 Keller-Segel 模型的爆破

刘梦琦，李嘉文，韩永杰
（西华大学理学院，成都 610039）

摘　要：本文考虑如下带有 logistic 源的 Keller-Segel 模型的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot(u\nabla v)+\lambda u-\mu u^k, x\in\mathbf{R}^n, t>0,\\ 0=\Delta v+u,\ x\in\mathbf{R}^n, t>0,\end{cases}$$

其中 $\chi>0,\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0,k>1$，证得当 $n\geqslant5$ 时若 $k<\frac{3}{2}+\frac{1}{2n-2}$ 则问题解在有限时间爆破. 这表明在高维情况下即便有 logistic 源的存在也不能排除爆破的发生.

关键词：Keller-Segel 模型；Logistic 源；爆破；趋化
中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.031003

Blow-up of a higher-dimensional Keller-Segel system with logistic source

LIU Meng-Qi, LI Jia-Wen, HAN Yong-Jie
(School of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: The Cauchy problem of the Keller-Segel system

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot(u\nabla v)+\lambda u-\mu u^k, x\in\mathbf{R}^n, t>0,\\ 0=\Delta v+u,\ x\in\mathbf{R}^n, t>0\end{cases}$$

is considered, where $\chi>0$, $\lambda\geqslant0$, $\mu\geqslant0$, $k>1$. It is shown that when $n\geqslant5$ and $k<\frac{3}{2}+\frac{1}{2n-2}$ there exists initial values such that the smooth local-in-time solution blows up in finite time, and thus the superlinear growth restriction is insufficient to rule out the chemotactic collapse of the solution.

Keywords: Keller-Segel system; Logistic source; Blow-up; Chemotaxis
(2010 MSC 35B40, 35K57, 35Q92, 92C17)

1　引　言

趋化是环境中化学物质影响物种运动的一种生物现象，可以驱动细菌的定向运动或部分定向运动，也是细胞迁移的重要手段之一[1-3]. 1970 年，Keller 和 Segel[4,5]根据这种运动提出了如下模型：

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot(u\nabla v),\ x\in\Omega,\ t>0,\\ v_t=\Delta v+u-v,\ x\in\Omega,\ t>0\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant1)$是具有光滑边界的有界区域，$u(x,t)$是细胞密度，$v(x,t)$是化学物质浓度. 若考虑方程组(1)的齐次 Neumann 初边值问题，则有如下结果：当 $n=2$ 时，如果初值 $\int_\Omega u_0<4\pi$ 则方程

收稿日期：2021-08-15
基金项目：四川省应用基础研究计划(2018JY0503)
作者简介：刘梦琦(1997－)，男，硕士研究生，主要研究方向为偏微分方程. E-mail：1519187371@qq.com
通讯作者：韩永杰. E-mail：hanyj@mail.xhu.edu.cn

组的解整体存在;如果$\int_{\Omega} u_0 > 4\pi$则方程组的解爆破;在径向对称区域中,临界质量会变成8π[6-9]. 当$n\geqslant 3$时,Winkler[11,12]证明方程组(1)的解在有限时间爆破,且满足爆破条件的初值是稠密的. 令$\Omega=\mathbf{R}^n$,方程组(1)柯西问题的解在有限时间爆破,且爆破点集为单点集.

考虑到很多情况下化学物质的扩散速度要比细胞扩散速度快得多,方程组(1)可简化为如下抛物-椭圆模型:

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot(u\nabla v), x\in\Omega,\ t>0,\\ 0=\Delta v+u-\mu,\ x\in\Omega, t>0\end{cases} \tag{2}$$

其中$\Omega=B_R\subset\mathbf{R}^n(R>0,n\geqslant 3)$, $\mu=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}u_0$, u_0为径向对称的非负函数. 关于方程组(2)的齐次Neumann初边值问题,有如下结果[12]:

(i) 存在$C>0$, $T<\infty$,对任意$0<|x|<R$, $0<t<T$,满足$u(x,t)\leqslant\frac{C}{|x|^2}$;

(ii)如果

$$B(u_0):=\{x_0\in\overline{\Omega};u(x_j,t_j)+|\nabla v(x_j,t_j)|\to\infty,\text{其中}(x_j,t_j)\to(x_0,T),j\geqslant 0\},$$

$$B(u_0)=\{0\},U(x):=\lim_{t\to T}u(x,t),$$

则对任意$x\in\overline{\Omega}\backslash\{0\}$, $0<|x|<R$,满足$U(x)\leqslant\frac{C}{|x|^2}$;

(iii) 如果$u_0\in C^1(\overline{\Omega})$,且

$$r^{n-1}u_{0,\mathrm{r}}(r)+u_0\int_0^r(u_0(s)-\mu)s^{n-1}\mathrm{d}s\geqslant 0,\quad r\in(0,R) \tag{3}$$

则存在$c,\eta>0$,使得对任意$x\in B_\eta\backslash\{0\}$,满足$U(x)\geqslant\frac{C}{|x|^2}$.

令$\Omega=\mathbf{R}^n$, $\mu=0$, u_0为径向对称的非负函数. 关于方程组(2)的柯西问题有,如下结果[12,13]:

(i) 如果$B(u_0)\neq\mathbf{R}^n$,则对任意$0<|x|<1$, $0<t<T$,满足$u(x,t)\leqslant\frac{C}{|x|^2}$, $U(x,t)\leqslant\frac{C}{|x|^2}$;

(ii) 如果$B(u_0)\neq\mathbf{R}^n$,且式(3)成立,则存在c, $\eta>0$,满足$U(x,t)\geqslant\frac{C}{|x|^2}$.

当$n=2$时,如果$u_0\in L^1(\mathbf{R}^2)$非负,则当且仅当$\int_{\mathbf{R}^2}u_0\leqslant 8\pi$时,方程组(2)的温和解的最大存在时间$T=+\infty$.

由细胞动力学理论,在大时间情况下细胞的增殖与死亡也应该被考虑. 因此我们有如下的具有logistic增长项的模型:

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot(u\nabla v)+f(u),\ x\in\Omega,t>0,\\ 0=\Delta v+u-v, x\in\Omega,\ t>0\end{cases} \tag{4}$$

其中$f(u)=\lambda u-\mu u^k$, $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $\chi>0$, $k>1$, $\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$是具有光滑边界的有界区域. 关于方程组(4)的齐次Neumann初边值问题的主要结果如下:

(i) 如果$n=2$, $k\geqslant 1$,初始时刻质量大于8π,则方程组的解在有限时间爆破[14];

(ii) 当$n\geqslant 3$,如果$k=2$, $\mu>\frac{n-2}{n}$,则方程组存在整体解[15];

(iii) 如果$n=3,4$, $k<\frac{7}{6}$, 则对给定适当的初值解在有限时间爆破[16];

(iv) 在更高维的情况下, 如果$n\geqslant 5$, $k<\frac{3}{2}+\frac{1}{2n-2}$,解会在有限时间爆破[17].

如果将第二个方程变为$v_t=\Delta v-uv$, $k=2$,则方程组存在整体有界经典解[18].

本文研究如下模型:

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot(u\nabla v)+\lambda u-\mu u^k,\\ \quad x\in\mathbf{R}^n,t>0,\\ 0=\Delta v+u,\ x\in\mathbf{R}^n,t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in\mathbf{R}^n\end{cases} \tag{5}$$

其中$\chi>0$, $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $k>1$, $u_0(x)\in BUC(\mathbf{R}^n)\cap C^1(\mathbf{R}^n)\cap L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^\kappa(\mathbf{R}^n)$且$u_0(x)$为正的径向对称函数,其中$BUC(\mathbf{R}^n)$是$\mathbf{R}^n$中一致有界且连续的函数构成的Banach空间, $\kappa>\frac{n}{n-1}$. 本文将借用文献[19]的思想方法来证明爆破. 定义函数$w(s,t)$,

$$w(s,t)=\int_0^{s^{1/n}}\rho^{n-1}u(\rho,t)d\rho,\ s=r^n\in[0,\infty),\quad t\in[0,T_{\max}),$$

这里$w(s,t)$相当于一种质量的转换. 这种方法基于ODI分析[20],该方法已经被证明可以用于有限时间爆破的证明[16,17]. 为了后面方便计算,记

$$m(t)=\int_{\mathbf{R}^n}u(x,t)\mathrm{d}x, m_0=\int_{\mathbf{R}^n}u(x,0)\mathrm{d}x \tag{6}$$

本文主要结果如下:

定理 1.1　假设$n\geqslant 5$, $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $k\in(1,\frac{3}{2}+$

$\frac{1}{2n-2}$). 则存在正的径向对称函数 $u_0\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 和 $T_{\max}<\infty$，使得方程组(5)在 $\mathbf{R}^n\times(0,T_{\max})$ 上的解 (u,v) 满足当 $t\to T_{\max}$ 时有 $\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\to\infty$.

2　预备知识

2.1　解的局部存在性、正性

引理 2.1　设 $n>2,\lambda\geqslant 0,\mu\geqslant 0,k\geqslant 1$. 又设条件(6)对于任意 $\kappa>\frac{n}{n-1}$ 成立. 则存在 $T_{\max}\in(0,\infty]$，使得方程组(5)在 $\mathbf{R}^n\times(0,T_{\max})$ 上有唯一经典解 (u,v) 满足 $u(\cdot,t)\in C^0([0,T_{\max});BUC(\mathbf{R}^n)\cap C^1(\mathbf{R}^n)\cap L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^\kappa(\mathbf{R}^n))\cap C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times(0,T_{\max}))$，$v(\cdot,t)\in C^0([0,T_{\max});W^{1,q}(\mathbf{R}^n)\cap W^{1,1}(\mathbf{R}^n))\cap C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times(0,T_{\max}))$ 对任意 $q>n$ 成立，且当 $T_{\max}<\infty$ 时有

$$\lim_{t\to T_{\max}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}+\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}=\infty \tag{7}$$

引理 2.2　方程组(5)的解 (u,v) 对所有 $t\in(0,T_{\max})$ 满足 $u(x,t)>0,v(x,t)>0$.

证明　令截断函数 $\xi\in C^\infty(\mathbf{R})$，

$$\xi\equiv\begin{cases}1,\ (-\infty,\ 0],\\ 0,\ [1,\ \infty).\end{cases}$$

对任意 $R>0,\zeta(x)=\xi(|x|-R)(x\in\mathbf{R}^n)$ 成立，且 $\operatorname{supp}\zeta(x)\subset\bar{B}_{R+1}$，$\operatorname{supp}\nabla\zeta(x)\subset\bar{B}_{R+1}\setminus B_R$. 根据映射 $s\mapsto s_-^2(s\in\mathbf{R},s_-:=\max(-s,0))$ 的连续可微性，Young 不等式及方程组(5)的第一个方程可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2u_-^2=-\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2|\nabla u_-|^2+\\&\chi\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2u_-\nabla u_-\cdot\nabla v-2\int_{\mathbf{R}^n}\zeta u_-\nabla\zeta\cdot\nabla u_-+\\&2\chi\int_{\mathbf{R}^n}\zeta u_-^2\nabla\zeta\cdot\nabla v+\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2(\lambda u_-^2-\mu u_-^{k+1})\leqslant\\&-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2|\nabla u_-|^2+\chi\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2u_-^2|\nabla v|^2+\\&4\int_{\mathbf{R}^n}u_-^2|\nabla\zeta|^2+2\chi\int_{\mathbf{R}^n}\zeta u_-^2\nabla\zeta\cdot\\&\nabla v+\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2\lambda u_-^2,t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}$$

因 $\nabla v\in L^\infty((0,T_{\max});L^q(\mathbf{R}^n))$，由 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Hölder 不等式可知，存在 $C_1>0$ 和 $C_2>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\chi\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2u_-^2|\nabla v|^2\leqslant\chi\|\nabla v\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}^2\|\zeta u_-\|_{L^{2q/q-2}(\mathbf{R}^n)}^2\leqslant\\&C_1\|\nabla(\zeta u_-)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{2n/q}\|\zeta u_-\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^{2(q-n)/q}\leqslant\\&\frac{1}{4}\|\nabla(\zeta u_-)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2+C_2\|\zeta u_-\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2\leqslant\\&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2\nabla|u_-|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla\zeta|^2u_-^2+\\&C_2\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2u_-^2,\ t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}$$

由截断函数的定义可知，存在 $C_3>0$ 和 $C_4>0$ 满足

$$\begin{aligned}&2\chi\int_{\mathbf{R}^n}\zeta u_-^2\nabla\zeta\cdot\nabla v\leqslant C_3\int_{B_{R+1}\setminus B_R}u_-^2|\nabla v|\leqslant\\&C_3\|u_-\|_{L^{2q/q-1}(B_{R+1}\setminus B_R)}^2\|\nabla v\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}\leqslant\\&C_4\|u_-\|_{L^{2q/q-1}(B_{R+1}\setminus B_R)}^2,t\in(0,T_{\max}).\end{aligned}$$

定义

$$y_R(t):=\int_{\mathbf{R}^n}\zeta^2u_-^2(\cdot,t),t\in(0,T_{\max}].$$

则 $y_R(t)$ 满足

$$\begin{aligned}&y_R'(t)\leqslant(2C_2+2\lambda)y_R(t)+C_5\|u_-\|_{L^2(B_{R+1}\setminus B_R)}^2+\\&2C_4\|u_-\|_{L^{2q/q-1}(B_{R+1}\setminus B_R)}^2,t\in(0,T_{\max}),\end{aligned}$$

其中 $C_5:=9\|\nabla\zeta\|_{L^\infty(B_{R+1}\setminus B_R)}^2$. 由初值条件 $y_R(0)=0$ 有

$$\begin{aligned}&y_R(t)\leqslant\int_0^t\mathrm{e}^{2(c_2+\lambda)(t-s)}\cdot\{C_5\|u_-\|_{L^2(B_{R+1}\setminus B_R)}^2+\\&2C_4\|u_-\|_{L^{2q/q-1}(B_{R+1}\setminus B_R)}^2\}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

对于 $p\in(1,\infty)$，有

$$\begin{aligned}&\sup_{s\in(0,T_{\max})}\|u_-(\cdot,s)\|_{L^p(B_{R+1}\setminus B_R)}\leqslant\\&\sup_{s\in(0,T_{\max})}\|u(\cdot,s)\|_{L^p(B_{R+1}\setminus B_R)}\leqslant\\&\sup_{s\in(0,T_{\max})}\{\|u(\cdot,s)\|_{L^\infty(B_{R+1}\setminus B_R)}^{\frac{p-1}{p}}\|\\&u(\cdot,s)\|_{L^1(B_{R+1}\setminus B_R)}^{\frac{1}{p}}\}.\end{aligned}$$

根据引理 2.1，当 $R\to\infty$ 时有

$$\sup_{s\in(0,T_{\max})}\|u_-(\cdot,s)\|_{L^p(B_{R+1}\setminus B_R)}\to 0.$$

因此，对任意的 $t\in(0,T_{\max})$，当 $R\to\infty$ 时有 $y_R(t)\to 0$. 再根据强极值原理可知 u 为正. 又因为

$$v=\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{\mathbf{R}^n}|x-y|^{2-n}u(y)\mathrm{d}y,$$

所以可以直接得到 $v>0$. 证毕.

由引理 2.2 可以得到 $m(t)=\int_{\mathbf{R}^n}u(x,t)\mathrm{d}x$ 关于时间的一个上界，即如下的结果：

引理 2.3　假设 $\lambda\geqslant 0,\mu\geqslant 0$，对任意 $t\in(0,T_{\max})$，则 $m(t)\leqslant m_0\mathrm{e}^{\lambda t}$.

证明　由 Hölder 不等式和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式可知，存在常数 $A>0$ 满足

$$\|u(\cdot,t)\nabla v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}\leqslant$$
$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{2n/n+1}(\mathbf{R}^n)}\cdot\|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^{2n/n-1}(\mathbf{R}^n)}\leqslant$$
$$A\|u(\cdot,t)\|^2_{L^{2n/n+1}(\mathbf{R}^n)}\leqslant$$
$$A\|u(\cdot,t)\|^{n+1/n}_{L^1(\mathbf{R}^n)}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{n-1}{n}}_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}.$$

根据引理 2.1,当 $R\to\infty$时有

$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(B_{R+1}\backslash B_R)}\to 0,$$
$$\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|u(\cdot,t)\nabla v(\cdot,t)\|_{L^1(B_{R+1}\backslash B_R)}\to 0.$$

引用引理 2.2 中的截断函数 $\zeta(x)$,由方程组(5)中第一个方程可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}^n}\zeta u=\int_{\mathbf{R}^n}\zeta\Delta u-\chi\int_{\mathbf{R}^n}\zeta\,\nabla\cdot(u\,\nabla v)+\int_{\mathbf{R}^n}\zeta(\lambda u-\mu u^k)=\int_{B_{R+1}\backslash B_R}\Delta\zeta\cdot u-\chi\int_{B_{R+1}\backslash B_R}\nabla\zeta\cdot u\,\nabla v+\int_{B_R}\zeta(\lambda u-\mu u^k).$$

所以存在常数 $c_1,c_2>0$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B_R}\zeta u\leqslant c_1\|u(\cdot,t)\|_{L^1(B_{R+1}\backslash B_R)}+c_2\|u(\cdot,t)\,\nabla v(\cdot,t)\|_{L^1(B_{R+1}\backslash B_R)}+\lambda\int_{B_R}\zeta u.$$

由常数变易法可知

$$\int_{B_R}\zeta u\leqslant \mathrm{e}^{\lambda t}\int_{B_R}\zeta u_0+c_1\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}(c_1\|u(\cdot,t)\|_{L^1(B_{R+1}\backslash B_R)}+c_2\|u(\cdot,t)\,\nabla v(\cdot,t)\|_{L^1(B_{R+1}\backslash B_R)})\mathrm{d}s.$$

再由引理 2.1 可知 $u\in C^0([0,T_{\max});L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^\kappa(\mathbf{R}^n))$. 令 $R\to\infty$,得

$$\int_{\mathbf{R}^n}u\leqslant\mathrm{e}^{\lambda t}\int_{\mathbf{R}^n}u_0.$$

因为 $m_0=\int_{\mathbf{R}^n}u(x,0)\mathrm{d}x$,所以 $m(t)\leqslant m_0\mathrm{e}^{\lambda t}$. 证毕.

2.2　方程组到单个抛物方程的转换

设 $u_0\in C^1(\mathbf{R}^n)$是径向对称的. 由引理 2.1 知解(u,v)是径向解. 令 $u=u(r,t)$, $v=v(r,t)$, $r=|x|\in[0,\infty)$. 对任意 $t\in(0,T_{\max})$,有

$$\int_{\mathbf{R}^n}u(x,t)\mathrm{d}x=\sigma(\Sigma_1)\int_0^\infty r^{n-1}u(r,t)\mathrm{d}r,$$

其中 $\Sigma_1=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}=1\}$, $\sigma(\Sigma_1)$ 为 Σ_1 的 Lebesgue 测度.

受文献[19]的启发,引入

$$w(s,t)=\int_0^{s^{1/n}}\rho^{n-1}u(\rho,t)\mathrm{d}\rho,\ s=r^n\in[0,\infty),\ t\in[0,T_{\max})\tag{8}$$

则

$$w_s(s,t)=\frac{1}{n}u(s^{\frac{1}{n}},t),$$
$$w_{ss}(s,t)=\frac{1}{n^2}s^{\frac{1}{n}-1}u_r(s^{\frac{1}{n}},t).$$

因 u 非负,所以 $w_s(s,t)>0$ 在$(0,\infty)\times[0,\infty)$上,且存在 $\eta>1,t\in[0,T_{\max}),s\in[0,\infty)$使得

$$w(s,t)\leqslant m(t)\eta\tag{9}$$

根据方程组(5)第二个方程有

$$r^{n-1}v_r(r,t)=-\int_0^r\rho^{n-1}u(\rho,t)\mathrm{d}\rho.$$

结合方程组(5)第一个方程可得

$$w_t=\int_0^{s^{1/n}}\rho^{n-1}u_t(\rho,t)\mathrm{d}\rho=\int_0^{s^{1/n}}(\rho^{n-1}u_r)_r(\rho,t)\mathrm{d}\rho-\chi\int_0^{s^{1/n}}(\rho^{n-1}uv_r)_r(\rho,t)\mathrm{d}\rho+\int_0^{s^{1/n}}\rho^{n-1}f(u(\rho,t))\mathrm{d}\rho=$$
$$s^{1-\frac{1}{n}}u_r(s^{\frac{1}{n}},t)-\chi u(s^{\frac{1}{n}},t)(-\int_0^{s^{\frac{1}{n}}}\rho^{n-1}u(\rho,t)\mathrm{d}\rho)+\int_0^{s^{\frac{1}{n}}}\rho^{n-1}f(u(\rho,t))\mathrm{d}\rho,$$

其中 $f(u)=\lambda u-\mu u^k$. 从而 w 满足如下单个抛物方程:

$$w_t=n^2s^{2-\frac{2}{n}}w_{ss}+n\chi ww_s+\frac{1}{n}\int_0^s f(nw_s)\mathrm{d}s,\quad s\in(0,\infty),t\in[0,T_{\max}).$$

所以,

$$\begin{cases}w_t\geqslant n^2s^{2-\frac{2}{n}}w_{ss}+n\chi ww_s-\mu n^{k-1}\int_0^s w_s^k(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma,\\ t\in[0,T_{\max}),s\in(0,\infty),\\ w(0,t)=0,\ w(s,0)=w_0(s)\end{cases}\tag{10}$$

其中

$$w_0(s)=\int_0^{s^{1/n}}\rho^{n-1}u_0(\rho)\mathrm{d}\rho,s=r^n\in[0,\infty)\tag{11}$$

3　解的爆破

引理 3.1　假设 $\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0,n>2,u_0(x)$是径向的,$(u,v)$为模型(5)在 $\mathbf{R}^n\times(0,T_{\max})$上的解. 则对任意 $\alpha>1,p\in(0,1),t\in(0,T_{\max})$有

$$\frac{1}{p}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p(s,t)\mathrm{d}s+2n(n-1)\int_0^t\int_0^\infty\mathrm{e}^{-s}s^{1-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-1}w_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\mu n^{k-1}\int_0^t\int_0^\infty\mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^{p-1}(s,\tau)(\int_0^s w_s^k\mathrm{d}\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\geqslant$$
$$\frac{1}{p}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w_0^p(s)\mathrm{d}s+n^2(1-p)\int_0^t\int_0^\infty\mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-2}w_s^2\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{n\chi}{2}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p w_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{n\chi\alpha}{2(p+1)}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha-1}w^{p+1}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \qquad (12)$$

其中 w_0 为(11)式中所定义.

证明　将(10)式的第一个不等式两边同乘以 $\mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p-1}(\varepsilon>0)$，然后在$(0,\infty)$上积分可得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^p(s,t)\mathrm{d}s\geqslant$$
$$n^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p-1}w_{ss}\mathrm{d}s+$$
$$n\chi\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^p w_s\mathrm{d}s-$$
$$\mu n^{k-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p-1}(s,t)\left(\int_0^s w_s^k(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s=$$
$$I_1+I_2+I_3,s\in(0,\infty).$$

对 I_1 分部积分，有

$$I_1=n^2\mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p-1}w_s\big|_0^\infty+$$
$$n^2(1-p)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p-2}w_s{}^2\mathrm{d}s-$$
$$n^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}}(s+\varepsilon)^{-\alpha}\right)w^{p-1}w_s\mathrm{d}s.$$

根据引理 2.2 可知 $u>0$. 所以

$$w_s(s,t)=\frac{1}{n}u(s^{\frac{1}{n}},t)>0.$$

再由(9)式得到 $w(s,t)\leqslant m(t)\eta,w(0,t)=0$. 所以 w 有界. 从而对任意 $t\in(0,T_{\max})$，$w_s(s,t)\in L^\infty(0,\infty)$，且$\lim\limits_{s\to\infty}\mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}}\to 0$ 有

$$n^2\mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p-1}w_s\big|_0^\infty=0.$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}}(s+\varepsilon)^{-\alpha}\right)\leqslant$$
$$\left(2-\frac{2}{n}\right)\mathrm{e}^{-s}s^{1-\frac{2}{n}}(s+\varepsilon)^{-\alpha},$$

所以

$$I_1\geqslant -2n(n-1)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{1-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-1}w_s\mathrm{d}s+$$
$$n^2(1-p)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-2}w_s^2\mathrm{d}s.$$

令 $I_2=\frac{I_2}{2}+\frac{I_2}{2}$. 因

$$\frac{n\chi}{2(p+1)}\mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p+1}\big|_0^\infty=0,$$

由分部积分可知

$$\frac{I_2}{2}\geqslant\frac{n\chi\alpha}{2(p+1)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha-1}w^{p+1}\mathrm{d}s.$$

根据上述分析得到

$$\frac{1}{p}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^p(s,t)\mathrm{d}s+$$
$$2n(n-1)\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{1-\frac{2}{n}}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p-1}w_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$
$$\mu n^{k-1}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p-1}(s,\tau)\cdot$$
$$\left(\int_0^s w_s^k(\sigma,\tau)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\geqslant$$
$$\frac{1}{p}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w_0^p(s)\mathrm{d}s+$$
$$n^2(1-p)\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^{p-2}w_s^2\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$
$$\frac{n\chi}{2}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha}w^p w_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$
$$\frac{n\chi\alpha}{2(p+1)}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}(s+\varepsilon)^{-\alpha-1}w^{p+1}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$$

对 $t\in(0,T_{\max})$成立. 由单调收敛定理，当 $\varepsilon\to 0$ 时(12)式成立.

引理 3.2　设 $n>2$. 令 $k\in\left(1,\frac{3}{2}+\frac{1}{2n-2}\right)$. 则对任意 $\alpha>1,p\in(0,1),\varepsilon>0,\theta\in\left(k-1,\frac{k}{2}\right)$且 $\theta<\frac{n}{n-2}(2-k)$，存在 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^{p-1}(s,t)\left(\int_0^s w_s^k(\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\varepsilon\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{2-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-2}w_s^2\mathrm{d}s+\varepsilon\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p w_s\mathrm{d}s+$$
$$\varepsilon\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-1-\alpha}w^{p+1}\mathrm{d}s+C_\varepsilon\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}w^{g(p,\alpha)}\mathrm{d}s,$$

其中 $w\in C^1(0,\infty)$，

$$g(p,\alpha)=p+\frac{\frac{2}{n}\theta-(2-\theta-k)\alpha}{2-\theta+\frac{2}{n}\theta-k}.$$

证明　根据 Fubini 定理有

$$I=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^{p-1}\left(\int_0^s w_s^k\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s=$$
$$\int_0^\infty\left(\int_\sigma^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^{p-1}ds\right)w_s^k\mathrm{d}\sigma.$$

因 $\alpha>1,p\in(0,1)$，故

$$I\leqslant\int_0^\infty\left(\int_\sigma^\infty s^{-\alpha}\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\sigma}w^{p-1}(\sigma)w_s^k\mathrm{d}\sigma\leqslant$$
$$\frac{1}{\alpha-1}\int_0^\infty \sigma^{1-\alpha}e^{-\sigma}w^{p-1}(\sigma)w_s^k d\sigma:=\tilde{I}.$$

对任意 $\varepsilon>0$，应用 Young 不等式可知 $C_1>0$ 满足

$$\tilde{I}=\frac{1}{\alpha-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\left(s^{2-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-2}w_s^2\right)^\theta\cdot$$
$$\left(s^{1-\alpha-(2-\frac{2}{n}-\alpha)\theta}w^{p-1-(p-2)\theta}w_s^{k-2\theta}\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\varepsilon\int_0^\infty e^{-s}s^{2-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-2}w_s^2+$$

$$C_1\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha-\frac{2\theta-1-\frac{2}{n}\theta}{1-\theta}}w^{p+\frac{2\theta-1}{1-\theta}}w_s^{\frac{k-2\theta}{1-\theta}}.$$

因为 $\theta\in(k-1,\frac{k}{2})$，所以 $0<\frac{k-2\theta}{1-\theta}<1$. 应用 Young 不等式可以得到 $C_2>0$ 满足

$$C_1\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha-\frac{2\theta-1-\frac{2}{n}\theta}{1-\theta}}w^{p+\frac{2\theta-1}{1-\theta}}w_s^{\frac{k-2\theta}{1-\theta}}\leqslant$$

$$\varepsilon\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha}w^pw_s+C_2\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha-\frac{2\theta-1-\frac{2}{n}\theta}{1+\theta-k}}w^{p+\frac{2\theta-1}{1+\theta-k}}.$$

定义 $\beta:=\dfrac{2\theta-\frac{2}{n}\theta-1}{1+\theta-k}$. 因 $\theta<\frac{n}{n-2}(2-k)$，故 $\beta<1$，$\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta}>1$，$\frac{\alpha+1}{1-\beta}>1$. 应用 Young 不等式可得 C_3 满足

$$C_2\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha-\frac{2\theta-1-\frac{2}{n}\theta}{1+\theta-k}}w^{p+\frac{2\theta-1}{1+\theta-k}}\leqslant$$

$$\varepsilon\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha-1}w^{p+1}+C_3\int_0^\infty e^{-s}w^{p+\frac{\frac{2}{n}\theta-(2-\theta-k)\alpha}{2-\theta+\frac{2}{n}\theta-k}}.$$

综上，结合引理 3.1 我们可以找到合适的 $\alpha>1$，$p\in(0,1)$，使得所需积分不等式成立. 证毕.

引理 3.3　令 $n\geqslant5,\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0,k\in(1,\frac{3}{2}+\frac{1}{2n-2})$. 则存在 $\alpha>1,p\in(0,1),\delta>0,\Lambda>0,C>0$，对非负函数 $u_0=u_0(r)$ 及方程组(5)在 $\mathbf{R}^n\times(0,T_{\max})$ 中的解 (u,v) 和(8)式定义的 w 满足

$$\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha}w^p(s,t)ds\geqslant\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha}w_0^p(s)ds+$$

$$\delta\int_0^t\left(\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha}w^p(s,\tau)ds\right)^{\frac{p+1}{p}}d\tau-$$

$$Ce^{\Lambda t}t,\ \in(0,T_{\max}),$$

其中的 $w_0(s)$ 由(11)式给出.

证明　由引理 3.2 可知 $k<\frac{3}{2}+\frac{1}{2n-2}$. 所以有 $k-1<\frac{n}{n-2}(2-k)$ 且存在 $\theta\in(k-1,\frac{k}{2})$ 满足 $\theta<\frac{n}{n-2}(2-k)$. 因此，$2-\theta+\frac{2}{n}\theta-k>0$. 定义

$$g(p,\alpha):=p+\frac{\frac{2}{n}\theta-(2-\theta-k)\alpha}{2-\theta+\frac{2}{n}\theta-k},$$

$$p\in[0,1],\ \alpha\geqslant1\tag{13}$$

满足

$$g(1,1)=\frac{4}{n}\frac{\theta}{2-\theta+\frac{2}{n}\theta-k}>0.$$

根据连续性可知，存在 $\alpha_0>1$，$p_0\in(0,1)$，使得对任意 $p\in[p_0,1)$，$\alpha\in(1,\alpha_0]$有

$$g(p,\alpha)\geqslant0\tag{14}$$

因此，对于 $n\geqslant5$，存在 $\alpha\in(1,\alpha_0]$使得 $\alpha<2-\frac{4}{n}$，以确保 $\alpha-1+\frac{2}{n}<1-\frac{2}{n}$. 最后，存在 $p\in[p_0,1)$，满足

$$p>\frac{n}{n-2}(\alpha-1+\frac{2}{n})\tag{15}$$

由引理 3.1 可知

$$\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha}w^pds\geqslant\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha}w_0^pds+$$

$$C_1\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{2-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-2}w_s^2dsd\tau+$$

$$C_1\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha}w^pw_sdsd\tau+C_1\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha-1}w^{p+1}dsd\tau-$$

$$2n(n-1)\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{1-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-1}w_sdsd\tau-$$

$$\mu n^{k-1}\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha}w^{p-1}\left(\int_0^s w_s^kd\sigma\right)dsd\tau:=$$

$$J_1+J_2+J_3+J_4-J_5-J_6,$$

其中

$$C_1:=\min\{\frac{n\chi\alpha}{2(p+1)},n^2(1-p),\frac{n\chi}{2}\}.$$

由 Young 不等式，存在 $C_2>0$ 满足

$$J_5\leqslant\frac{C_1}{3}\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{2-\frac{2}{n}-\alpha}w^{p-2}w_s^2dsd\tau+$$

$$C_2\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{-\frac{2}{n}-\alpha}w^pdsd\tau,$$

及 $C_3>0$ 满足

$$C_2\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{-\frac{2}{n}-\alpha}w^pdsd\tau\leqslant$$

$$\frac{C_1}{4}\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{-\alpha-1}w^{p+1}dsd\tau+C_3\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{-\frac{2}{n}-\alpha+\frac{n-2}{n}p}dsd\tau.$$

由(15)式，$-\frac{2}{n}-\alpha+\frac{n-2}{n}p>-1$. 因而存在 $C_4>0$ 满足

$$C_3\int_0^t\int_0^\infty e^{-s}s^{-\frac{2}{n}-\alpha+\frac{n-2}{n}p}dsd\tau=$$

$$C_3\Gamma(1-\frac{2}{n}-\alpha+\frac{n-2}{n}p)t=C_4t.$$

所以有

$$J_5\leqslant\frac{1}{2}J_2+\frac{1}{3}J_4+C_4t,\ t\in(0,T_{\max}).$$

据引理 3.2，取足够小 $\varepsilon>0$(如 $\varepsilon=\frac{c_1}{3\mu n^{k-1}}$)，则存在 $C_5>0$ 满足

$$J_6 \leqslant \frac{C_1}{2}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{2-\frac{2}{n}-\alpha} w^{p-2} w_s^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + C_1\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{-\alpha} w^p w_s \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + \frac{C_1}{3}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{-1-\alpha} w^{p+1} \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + C_5\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} w^{g(p,\alpha)} \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau,$$

这里的 $g(p,\alpha)$ 为(13)式所定义. 由(14)式可知 $g(p,\alpha)\geqslant 0$. 由(9)式和引理 2.3 可知

$$w(s,\tau)\leqslant \eta m(\tau)\leqslant \eta m_0 \mathrm{e}^{\lambda\tau},\ s\in(0,\infty),\ \tau\in(0,T_{\max}).$$

从而可以找到常数 $C_6>0$ 满足

$$J_6\leqslant \frac{C_1}{2}J_2+J_3+\frac{C_1}{3}J_4+C_6\mathrm{e}^{g(p,\alpha)\lambda t},\ t\in(0,T_{\max}).$$

综上,取 $\Lambda=\lambda g(p,\alpha)$,则存在 $C>0$ 满足

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p\mathrm{d}s \geqslant \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w_0^p\mathrm{d}s + \frac{pC_1}{3}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-1-\alpha}w^{p+1}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau - C\mathrm{e}^{\Lambda t},$$

其中

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p\mathrm{d}s = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{s}{p+1}}s^{-\alpha+\frac{p(\alpha+1)}{P+1}} \cdot (s^{-1-\alpha}w^{p+1})^{\frac{p}{p+1}}\mathrm{e}^{-\frac{ps}{p+1}}\mathrm{d}s \leqslant (\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha+p}\mathrm{d}s)\,\frac{1}{p+1}(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-1-\alpha}w^{p+1}\mathrm{d}s)^{p/p+1}.$$

因 $1-\alpha+p>0$,所以有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p\mathrm{d}s \leqslant \Gamma^{\frac{1}{p+1}}(1-\alpha+p)\cdot (\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-1-\alpha}w^{p+1}\mathrm{d}s)^{\frac{p}{p+1}},$$

$$\frac{pc_1}{3}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-1-\alpha}w^{p+1}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \geqslant \frac{pc_1}{3\Gamma^{\frac{1}{p}}(1-\alpha+p)}\int_0^t(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p\mathrm{d}s)^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}\tau,\ t\in(0,T_{\max}).$$

引理得证.

为了更好地运用引理 3.3 中的积分不等式,我们首先陈述下面的 Gronwall 引理:

引理 3.4[10]　令 $\alpha>0,\delta>0,\beta>0$. 若对某个 $T>0$,使得非负函数 $y\in C^0[0,T]$对所有的 $t\in(0,T)$满足

$$y(t)\geqslant a+\delta\int_0^t y^{1+\beta}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则 $T\leqslant\frac{1}{\beta\delta a^\beta}$.

定理 1.1 的证明　令 $n\geqslant 5, k\in(1,\frac{3}{2}+\frac{1}{2n-2}), m_0>0$. 又令 $\alpha>1, p\in(0,1), \delta>0, \Lambda>0$, $C>0$ 由引理 3.3 所给出. 对固定的 $T>0$,取 $a>0$ 满足

$$a>(\frac{p}{\delta T})^p \tag{16}$$

由引理 3.3,对任意的 $t\in(0,T_{\max})$有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p(s,t)\mathrm{d}s \geqslant \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w_0^p(s)\mathrm{d}s + \delta\int_0^t(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p(s,\tau)\mathrm{d}s)^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}\tau - C\mathrm{e}^{\Lambda t},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w_0^p(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 e^{-s}s^{-\alpha}w_0^p(s)\mathrm{d}s + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w_0^p(s)\mathrm{d}s,$$

且

$$0\leqslant \int_1^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w_0^p\mathrm{d}s \leqslant m_0\eta\mathrm{e}^{-1}\int_1^\infty s^{-\alpha}\mathrm{d}s \leqslant m_0\eta\mathrm{e}^{-1}\,\frac{1}{\alpha-1}.$$

所以有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p\mathrm{d}s \geqslant \int_0^1 e^{-s}s^{-\alpha}w_0^p\mathrm{d}s + \delta\int_0^t(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}w^p\mathrm{d}s)^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}\tau - C\mathrm{e}^{\Lambda t}.$$

令

$$\varphi_\varepsilon(s) := m_0\eta s\,\frac{1+\varepsilon}{s+\varepsilon},\ s\in[0,1],\ \varepsilon>0,\ \eta>1.$$

则 $\varphi_\varepsilon(s)$是非负函数,且当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\varphi_\varepsilon(s)\to m_0\eta$ 对所有的 $s\in[0,1]$成立. 因

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_\varepsilon(s)}{\mathrm{d}\varepsilon}=m_0\eta\,\frac{s^2-s}{(s+\varepsilon)^2}\leqslant 0,\ s\in[0,1],$$

故 $\varphi_\varepsilon(s)$关于 ε 单调递减. 由单调收敛定理可知,当 $\varepsilon\to 0$ 时有 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}\varphi_\varepsilon^p\mathrm{d}s\to\infty$,从而存在足够小的 $\varepsilon>0$ 使得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-s}s^{-\alpha}\varphi_\varepsilon^p\mathrm{d}s \geqslant a+C\mathrm{e}^{\Lambda T}.$$

固定这个 ε 值,并令 $w_0(s):=\varphi_\varepsilon(s), s\in[0,1]$. 可见此时 $w_0(s)\in C^\infty([0,1])$,且 $w_0(0)=0, w_0(1)=m_0\eta$ 和对任意 $s\in[0,1], w_{0s}(s)>0$ 成立. 另外,在 B_1 中,u_0 可以定义为 $u_0(x):=nw_{0s}(|x|^n)$,从而 u_0 为正的径向函数且 $w_{0s}(s)=\frac{m_0\varepsilon\eta(1+\varepsilon)}{(s+\varepsilon)^2}$. 所以 $u_0\in L^1(B_1)\cap L^\kappa(B_1), \kappa>\frac{n}{n-1}$.

综上,有

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s} s^{-\alpha} w^p(s,t)\mathrm{d}s \geqslant \int_0^1 e^{-s} s^{-\alpha} w_0^p(s)\mathrm{d}s + \delta\int_0^t (\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s} s^{-\alpha} w^p \mathrm{d}s)^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}\tau - C\mathrm{e}^{\Lambda t} \geqslant a + \delta\int_0^t (\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s} s^{-\alpha} w^p \mathrm{d}s)^{\frac{p+1}{p}}\mathrm{d}\tau, t\in(0,T_{\max}).$$

令

$$y(t) := \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s} s^{-\alpha} w^p(s,t)\mathrm{d}s, t\in(0,T_{\max}),$$

$$\beta := \frac{1}{p}.$$

由引理 3.4 有 $T_{\max}\leqslant \frac{p}{\delta a^{\frac{1}{p}}}$. 由(16)式可知 $T_{\max} < T$. 证毕.

参考文献：

[1] Hillen T, Painter K J. A users' guide to PDE models for chemotaxis [J]. J Math Biol, 2009, 58: 183.

[2] Horstmann D. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences (I) [J]. J Dtsch Math: Ver, 2003, 105: 103.

[3] Horstmann D. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences (II) [J]. J Dtsch Math: Ver, 2004, 106: 51.

[4] Keller E F, Segel L A. Model for chemotaxis [J]. J Theor Biol, 1971, 30: 225.

[5] Keller E F. Assessing the Keller-Segel model: how has it fared [M]. Berlin: Springer, 1979.

[6] Nagai T. Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system [J]. Adv Math Sci Appl, 1995, 5: 581.

[7] Nagai T, Senba T. Behavior of radially symmetric solutions of a system related to chemotaxis [J]. Nonlinear Anal: Theor, 1997, 30: 3837.

[8] Nagai T, Senba T, Yoshida K. Application of the Moser-Trudinger inequality to a parabolic system of chemotaxis [J]. Funkc Ekvacioj, 1997, 40: 411.

[9] Senba T. Blow-up of radially symmetric solutions to some systems of partial differential equations modelling chemotaxis [J]. Adv Math Sci Appl, 1997, 7: 79.

[10] Winkler M. Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system [J]. J Math Pures Appl, 2013, 100: 748.

[11] Winkler M. Single-point blow-up in the Cauchy problem for the higher-dimensional Keller-Segel system [J]. Nonlinearity, 2020, 33: 5007.

[12] Souplet P, Winkler M. Blow-up profiles for the parabolic-elliptic Keller-Segel system in dimensions $n\geqslant 3$ [J]. Commun Math Phys, 2019, 367: 665.

[13] Wei D. Global well-posedness and blow-up for the 2-D Patlak-Keller-Segel equation [J]. J Funct Anal, 2018, 274: 388.

[14] Fuest M. Finite-time blow-up in a two-dimensional Keller-Segel system with an environmental dependent logistic source [J]. Nonlinear Anal: Real, 2020, 52: 103022.

[15] Tello J I, Winkler M. A chemotaxis system with logistic source [J]. Commun Part Diff Eq, 2007, 32: 849.

[16] Winkler M. Finite-time blow-up in low-dimensional Keller-Segel systems with logistic-type superlinear degradation [J]. Z Angew Math Phys, 2018, 69: 40.

[17] Winkler M. Blow-up in a higher-dimensional chemotaxis system despite logistic growth restriction [J]. J Math Anal Appl, 2011, 384: 261.

[18] 林静秋，何璞，侯智博. 一类带 logistic 源项的趋化方程组解的整体存在性和有界性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：897.

[19] Jager W, Luckhaus S. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis [J]. T Am Math Soc, 1992, 329: 819.

[20] Nagai T. Blowup of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains [J]. J Inequal Appl, 2001, 6: 37.

引用本文格式：

中　文：刘梦琦，李嘉文，韩永杰. 一类具有 logistic 源的高维 Keller-Segel 模型的爆破[J]. 四川大学学报：自然科学版，2022，59：031003.

英　文：Liu M Q, Li J W, Han Y J. Blow-up of a higher-dimensional Keller-Segel system with logistic source [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 031003.