一类推广的 Dhombres 方程的实连续解

袁甜真，徐 冰
（四川大学数学学院，成都 610064）

摘 要：本文研究一类推广的 Dhombres 方程 $f^n(x)=(f(x))^m/x^{m-1}$ 的实连续解问题. 基于函数方程的迭代理论、多项式型迭代函数方程的特征理论及降次技术，本文给出了该方程的所有实连续解，其中 $m,n\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\},m\neq n$，$f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续自映射，f^n 是 f 的 n 次迭代.

关键词：Dhombres 方程；特征理论；降次
中图分类号：O171 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.061001

Real continuous solutions of a class of generalized Dhombres equations

YUAN Tian-Zhen，*XU Bing*
(School of Mathematics，Sichuan University，Chengdu 610064，China)

Abstract：In this paper，we consider real continuous solutions of a class of generalized Dhombres equation $f^n(x)=(f(x))^m/x^{m-1}$，where $m,n\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\},m\neq n$，$f$ maps $(0,+\infty)$ into itself continuously and f^n is the n-th iterate of f. By using the iterative theory of functional equations，characteristic theory of polynomial-like iterative equations and a technique of reducing order，we give all real continuous solutions of these equations.

Keywords：Dhombres equation；Characteristic theory；Reducing order
(2010 MSC 26A15,26A18)

1 引 言

20 世纪 70 年代末，Dhombres 在研究人口分类问题时提出如下模型：

$$h(xh(x))=(h(x))^2 \tag{1}$$

并给出了该模型在 $(0,+\infty)$ 上的实连续解[1]. 此后,学者们称方程(1)为 Dhombres 方程[2]，对该方程及其各种推广形式进行了研究，并给出了相应的实连续解[3]和局部解析解[4]等结果.

特别地，考虑推广的 Dhombres 方程

$$f^n(x)=\frac{(f(x))^m}{x^{m-1}},\quad m,n\in\mathbf{N} \tag{2}$$

在 $(0,+\infty)$ 上的实连续解问题，其中 $\mathbf{N}$ 是全体非负整数构成的集合，f 是实连续函数，$f^0=\mathrm{id},f^{k+1}=f\circ f^k$，$\forall k\in\mathbf{N}$. 当 $m=3,n=2$ 时,令 $h(x):=f(x)/x,\forall x\in(0,+\infty)$,则方程(2)即为方程(1). 当 $n=0,1$ 时，方程(2)是平凡的. 当 $m=0,n\geqslant 2$ 时，方程(2)是 Babbage 方程. Babbage 方程作为迭代根的基本形式在 $(0,+\infty)$ 上的所有实连续解早有结果[5]. 当 $m=1,n\geqslant 2$ 时，作变量替换 $y=f(x),\forall x\in(0,+\infty)$ 后方程(2)可以转化为研究 Babbage 方程. 当 $m=n=2$ 时，Morawiec 给出了方程(2)的所有实连续解[6]. 当 $m=n\geqslant 3$ 时，Draga 和 Morawiec 给出了方程(2)的所有实连续解[7].

不失一般性,本文进一步研究方程

收稿日期：2021-10-14
基金项目：国家自然科学基金(11771307)
作者简介：袁甜真(1997－)，女，四川都江堰人，硕士研究生，主要研究方向为微分方程与动力系统. E-mail：2539243581@qq.com

$$f^n(x)=\frac{(f(x))^m}{x^{m-1}},\ m,n\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\},\ m\neq n \quad (3)$$

在$(0,+\infty)$上的实连续解. 我们首先给出一些引理以概述方程(3)的一些基本性质，然后给出差分方程的一些基本理论和降次技术所需的主要理论，进而应用降次技术给出方程(3)的所有实连续解.

2　预备知识

作共轭变换 $g(x):=\ln(f(\mathrm{e}^x))$，$\forall x\in\mathbf{R}$，则方程(3)等价于多项式型迭代函数方程

$$g^n(x)=mg(x)-(m-1)x,\quad m,n\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\},m\neq n \quad (4)$$

引理 2.1　若函数 g 是方程(4)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，则 g 是双射.

证明　若存在 $x,y\in\mathbf{R}$，使得 $g(x)=g(y)$，则由方程(4)和 $m\geqslant 2$ 可知

$$x=\frac{g^n(x)-mg(x)}{1-m}=\frac{g^n(y)-mg(y)}{1-m}=y.$$

因此 g 是单射.

下面证明 g 是满射. 若不然，由 g 是连续单射可知 $\lim_{x\to+\infty}g(x)\in\mathbf{R}$ 或 $\lim_{x\to-\infty}g(x)\in\mathbf{R}$. 当 $\lim_{x\to+\infty}g(x)\in\mathbf{R}$ 时，根据 g 的连续性可知

$$\lim_{x\to+\infty}g^n(x)=g^{n-1}(\lim_{x\to+\infty}g(x))\in\mathbf{R} \quad (5)$$

再根据方程(4)可得

$$\lim_{x\to+\infty}g^n(x)=\lim_{x\to+\infty}(mg(x)-(m-1)x)=-\infty \quad (6)$$

这与(5)式矛盾. 当 $\lim_{x\to-\infty}g(x)\in\mathbf{R}$ 时，将(5)式和(6)式中 $x\to+\infty$ 替换为 $x\to-\infty$，同理可得矛盾. 故 g 是满射. 证毕.

方程(4)的特征方程为

$$r^n=mr-(m-1),\quad m,n\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\},m\neq n \quad (7)$$

引理 2.2　(i) 当 n 为偶数时方程(7)有且仅有两个实根 $1,r_0$，其中 $0<r_0\neq 1$ 且 $1,r_0$ 均为单根. 若 $z_0\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ 是方程(7)的根，则$|z_0|\neq r_0$.

(ii) 当 n 为奇数时方程(7)有且仅有三个实根 $1,r_1,r_2$，其中$-1\neq r_1<0<r_2\neq 1$，$r_1+r_2\neq 0$，且 $1,r_1,r_2$ 均为单根. 若 $z_0\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ 是方程(7)的根，则 $r_2\neq|z_0|<-r_1$.

证明　令函数 $P(r):=r^n-mr+m-1$，$\forall r\in\mathbf{R}$. 则 $P(r)$在 $\mathbf{R}$ 上是二次连续可微的，且对任意 $r\in\mathbf{R}$有

$$P'(r)=nr^{n-1}-m,\ P''(r)=n(n-1)r^{n-2}.$$

(i) 当 n 为偶数时，由 $P''(r)>0$，$\forall r\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 且 $P''(0)=0$ 可知 $P'(r)$在 $\mathbf{R}$ 上严格单调递增. 从而根据 $P'(r)$有唯一的零点 $r_*=(\frac{m}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 可知 $P(r)$在$(-\infty,r_*)$上严格单调递减，在$[r_*,+\infty)$上严格单调递增，且 r_* 是 $P(r)$在 $\mathbf{R}$ 上的唯一最小值点. 因此，由 $P(r_*)<P(1)=0$，$P(0)=m-1>0$，$\lim_{r\to+\infty}P(r)=+\infty$和连续函数的零点定理可知，方程(7)有且仅有两个实根 $1,r_0$，其中 $0<r_0\neq 1$. 并且根据 $P'(1),P'(r_0)\neq 0$ 可知 $1,r_0$ 均为单根. 若 $z_0\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ 是方程(7)根，则设 $n=2k\geqslant 4,k\in\mathbf{N}$. 记方程(7)在 $\mathbf{C}$ 上的所有根为：$1,r_0,z_0,\overline{z_0},z_1,\overline{z_1},\cdots,z_{k-2},\overline{z_{k-2}}$. 由 Vieta 定理可知 $r_0|z_0z_1\cdots z_{k-2}|^2=m-1$. 因此，将 r_0 和 z_0 分别代入方程(7)中化简可得

$$r_0^{2k-1}=m-|z_0z_1\cdots z_{k-2}|^2,$$
$$z_0^{2k-1}=m-r_0\overline{z_0}|z_1\cdots z_{k-2}|^2.$$

假设$|z_0|=r_0$. 则

$$|z_0|^{2k-1}=|m-r_0\overline{z_0}|z_1\cdots z_{k-2}|^2|>m-r_0|\overline{z_0}||z_1\cdots z_{k-2}|^2=m-|z_0z_1\cdots z_{k-2}|^2=r_0^{2k-1}.$$

这与假设矛盾. 故$|z_0|\neq r_0$.

(ii) 当 n 为奇数时，由 $rP''(r)>0$，$\forall r\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 且 $P''(0)=0$ 可知 $P'(r)$在$(-\infty,0]$上严格单调递减，在$(0,+\infty)$上严格单调递增. 从而根据 $P'(r)$的零点为 $r_\pm=\pm(\frac{m}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ 可知 $P(r)$在$(-\infty,r_-)$上严格单调递增，在$[r_-,r_+)$上严格单调递减，在$[r_+,+\infty)$上严格单调递增，且 r_+ 是 $P(r)$在$[r_-,+\infty)$上的唯一最小值点. 因此，由 $P(r_+)<P(1)=0$，$P(r_-)>P(0)>0$，$\lim_{x\to\pm\infty}P(r)=\pm\infty$和连续函数的零点定理可知，方程(7)有且仅有三个实根 $1,r_1,r_2$，其中 $r_1<0<r_2\neq 1$. 这时，假设 $r_1+r_2=0$，则

$$0=P(r_1)+P(r_2)=r_1^n-mr_1+m-1+r_2^n-mr_2+m-1=-r_2^n+mr_2+m-1+r_2^n-mr_2+m-1=2(m-1),$$

即 $m=1$. 这与 $m\neq 1$ 矛盾，故有 $r_1+r_2\neq 0$. 又根据 $f(-1)=2m-2>0$，$f(r_1)=0$ 可知 $r_1\neq -1$. 再由 $P'(1),P'(r_1),P'(r_2)\neq 0$ 可知 $1,r_1,r_2$ 均为单根. 若 $z_0\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ 是方程(7)的根，则设 $n=2k+1\geqslant 5$，$k\in\mathbf{N}$. 记方程(7)在 $\mathbf{C}$ 上的所有根为 $1,r_1,r_2,z_0,\overline{z_0},z_1,\overline{z_1},\cdots,z_{k-2},\overline{z_{k-2}}$. 根据 Vieta 定理可知

$$r_1r_2|z_0z_1\cdots z_{k-2}|^2=-(m-1).$$

因此，将 r_1,r_2 和 z_0 分别代入方程(7)，化简得

$$r_1^{2k}=m+r_2|z_0z_1\cdots z_{k-2}|^2,$$
$$r_2^{2k}=m+r_1|z_0z_1\cdots z_{k-2}|^2,$$
$$z_0^{2k}=m+r_1r_2\,\overline{z_0}\,|z_1\cdots z_{k-2}|^2.$$

先假设 $|z_0|=r_2$，则

$$|z_0|^{2k}=|m+r_1r_2\,\overline{z_0}\,|z_1\cdots z_{k-2}|^2|>m+r_1r_2|\overline{z_0}||z_1\cdots z_{k-2}|^2=m+r_1|z_0z_1\cdots z_{k-2}|^2=r_2^{2k},$$

这与假设矛盾. 再假设 $|z_0|\geqslant -r_1$，则

$$|z_0|^{2k}=|m+r_1r_2\,\overline{z_0}\,|z_1\cdots z_{k-2}|^2|<m-r_1r_2|\overline{z_0}||z_1\cdots z_{k-2}|^2\leqslant m+r_2|z_0z_1\cdots z_{k-2}|^2=r_1^{2k},$$

这与假设矛盾. 故 $r_2\neq|z_0|<-r_1$. 证毕.

考虑一般的多项式型迭代函数方程

$$a_qg^q(x)+\cdots+a_1g(x)+a_0x=0,\ \forall x\in\mathbf{R}\quad(8)$$

其中 $q\in\mathbf{N}$，$a_t\in\mathbf{R}$，$t=0,1,\ldots,q$. 方程(8)的特征方程为

$$a_qr^q+\cdots+a_1r+a_0=0\tag{9}$$

若双射 g 满足方程(8)，则令 $h=g^{-1}$ 后有 h 是双射，且用 $h^{-q}(x)$ 代替方程(8)中的 x 可得方程(8)的对偶方程为

$$a_0h^q(x)+\cdots+a_{q-1}h(x)+a_qx=0,\ \forall x\in\mathbf{R}\tag{10}$$

这时，若方程(9)的根为 $r_1,\cdots,r_q$，则方程(10)对应特征方程的根为 $r_1^{-1},\cdots,r_q^{-1}$.

引理 2.3[7]　函数 g 是方程(8)的解当且仅当对每个 $x_0\in\mathbf{R}$，由 $x_{k+1}=g(x_k)$，$\forall k\in\mathbf{N}$ 定义的序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 满足差分方程

$$a_qx_{k+q}+\cdots+a_1x_{k+1}+a_0x_k=0\tag{11}$$

引理 2.4[7]　实序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 满足方程(11)当且仅当

$$x_k=\sum_{s=1}^{i}C_s(k)\lambda_s{}^k+\sum_{t=1}^{j}(A_t(k)\cos k\varphi_t+B_t(k)\sin k\varphi_t)|\mu_t|^k,\ \forall k\in\mathbf{N},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\mu_1,\bar{\mu}_1,\cdots,\mu_j,\bar{\mu}_j$ 和 $p_1,\cdots,p_i,l_1,l_1,\cdots,l_j,l_j$ 分别是方程(9)在 $\mathbf{C}$ 上所有两两互异的根及对应的重数，$\lambda_s\in\mathbf{R}$，$\mu_t\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$，且 $C_s(k)$，$A_t(k)$，$B_t(k)$ 分别是重数小于 p_s,l_t,l_t 的实系数多项式，φ_t 是 μ_t 的幅角，$s=1,\ldots,i$，$t=1,\ldots,j$.

定义 2.5　假设 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是实序列. 若 $x_{k+1}-x_k$，$\forall k\in\mathbf{N}$ 不变号，则称序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是单调的. 若 $(-1)^{k+1}(x_{k+1}-x_k)$，$\forall k\in\mathbf{N}$，则称序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是反单调的.

引理 2.6[7]　假设 A_t,B_t 是实系数多项式，

$$w_t:=r(\cos\varphi_t+\mathrm{i}\sin\varphi_t),$$

其中 $r>0$，$\varphi_t\in(0,\pi)$，$t=1,\ldots,j$，且函数 $F:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ 满足 $\lim_{k\to+\infty}F(k)/r^k=0$. 若由

$$x_k:=F(k)+\sum_{t=1}^{j}(A_t(k)\cos k\varphi_t+B_t(k)\sin k\varphi_t)r^k,\ \forall k\in\mathbf{N}$$

定义的序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是单调或反单调的，则

$$x_k=F(k),\forall k\in\mathbf{N}.$$

3　主要结果

定理 3.1　函数 g 是方程(4)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解当且仅当

(i) n 为偶数时，g 是方程

$$g^2(x)-(1+r)g(x)+rx=0\tag{12}$$

在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_0$；

(ii) n 为奇数时，g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_1$ 或 r_2.

证明　充分性. 当 n 为偶数时，因为 r_0 是方程(7)的根，所以多项式 $r^2-(1+r_0)r+r_0$ 整除多项式 $r^n-mr+m-1$. 从而由文献[8]中定理 1 可知 g 是方程(4)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解. 当 n 为奇数时，由 r_1,r_2 是方程(7)的根可知，多项式 $r^2-(1+r_2)r+r_2$ 和 $r^2-(1+r_1)r+r_1$ 均整除多项式 $r^n-mr+m-1$. 从而由文献[8]中定理 1 可知 g 是方程(4)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解.

必要性. (i) 当 n 为偶数时，由引理 2.2，(i)可知方程(7)有且仅有两个实根 $1,r_0$，其中 $0<r_0\neq 1$，且 $1,r_0$ 均为单根. 当 $n=2$ 时，结论显然成立. 下面假设 $n\geqslant 4$. 若 $w_1,\bar{w}_1,\cdots,w_j,\bar{w}_j$ 和 $l_1,l_1,\cdots,l_j,l_j$ 分别是方程(7)在 $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ 上所有两两互异的根及对应的重数，则对任给 $x_0\in\mathbf{R}$，令 $x_{k+1}=g(x_k)$，$\forall k\in\mathbf{N}$，由引理 2.3 和引理 2.4 可知

$$x_k=C+C_0r_0^k+\sum_{t=1}^{j}(A_t(k)\cos k\varphi_t+B_t(k)\sin k\varphi_t)|w_t|^k,\ \forall k\in\mathbf{N}\tag{13}$$

其中 $C,C_0\in\mathbf{R}$，$A_t(k),B_t(k)$ 是重数小于 l_t 的实系数多项式，φ_t 是 w_t 的幅角，$t=1,\ldots,j$. 这时不妨设 $\varphi_t\in(0,\pi)$. 若不然，考虑 w_t 的主幅角，即 $\varphi_t\in(-\pi,\pi)$. 当 $\varphi_t\in(-\pi,0)$ 时，用 $\varphi_t-\pi$ 代替(13) 式中的 φ_t 可得(13)式的形式不变且 $\varphi_t\in(0,\pi)$. 令集合 $S_1:=\{|w_t|\,|t=1,\ldots,j\}$. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ 是 S_1 中所有两两互异的元素且满足 $\lambda_1<\cdots<\lambda_p$，$p\in\mathbf{N}$，$1\leqslant p\leqslant j$. 由引理 2.2 (i)可知若 $z_0\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ 是方程(7)的根，则 $|z_0|\neq r_0$. 从而下列情形之

一成立：

(i_1) $r_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_p$；

(i_2) $\lambda_1<\cdots<\lambda_p<r_0$；

(i_3) 存在 $s\in N,1\leqslant s\leqslant p-1$,使得 $\lambda_1<\cdots<\lambda_s<r_0<\lambda_{s+1}<\cdots<\lambda_p$.

对 $v=1,\ldots,p$，令

$$I_v:=\{t\mid |w_t|=\lambda_v,t=1,\ldots,j\},$$

$$F_v(k):=\sum_{t\in I_v}(A_t(k)\cos k\varphi_t+B_t(k)\sin k\varphi_t)\mid w_t\mid^k.$$

则定义 $y_k:=x_k-C,\forall k\in\mathbf{N}$ 可得

$$y_k=C_0\,r_0^k+\sum\nolimits_{v=1}^{p}F_v(k),\ \forall k\in\mathbf{N}.$$

(i_1) 由 $\lambda_0:=r_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_p$ 可知

$$\lim\nolimits_{k\to+\infty}\lambda_t{}^k/\lambda_p{}^k=0,t=0,1,\ldots,p-1.$$

从而有

$$\lim\nolimits_{p\to+\infty}(C_0\,r_0{}^k+\sum\nolimits_{v=1}^{p-1}F_v(k))/\lambda_p^k=0.$$

因此，根据引理 2.6 可以消去 y_k 中含 λ_p 的项. 若 $p=1$，则 $y_k=C_0\,r_0^k$，$\forall k\in\mathbf{N}$. 若 $p\geqslant2$，则有

$$y_k=C_0\,r_0^k+\sum\nolimits_{v=1}^{p-1}F_v(k),\forall k\in\mathbf{N},$$

且 $\lambda_0:=r_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_{p-1}$. 故可以反复利用上述过程依次消去 y_k 中含 $\lambda_{p-1},\cdots,\lambda_1$ 的项，最后可得 $y_k=C_0\,r_0^k,\forall k\in\mathbf{N}$. 因此，$x_k=C+y_k=C+C_0r_0^k$，$\forall k\in\mathbf{N}$. 由引理 2.3 和引理 2.4 可知 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_0$.

(i_2) 考虑方程(4)的对偶方程，因为 $r_0^{-1}<\lambda_p^{-1}<\cdots<\lambda_1^{-1}$，所以类似对情形($\mathrm{i}_1$)的证明可以消去对偶方程对应的 y_k 中所有含 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ 的项. 从而有 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_0$.

(i_3) 由于 $\lambda_1<\cdots<\lambda_s<r_0<\lambda_{s+1}<\cdots<\lambda_p$，将 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,r_0$ 看作一个整体，类似对情形(i_1)的证明，依次消去 y_k 中所有含 $\lambda_p,\cdots,\lambda_{s+1}$ 的项，然后再类似对情形(i_2)的证明又可以消去 y_k 中所有含 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 的项. 从而 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_0$.

(ii) 当 n 为奇数时，由引理 2.2,(ii)可知方程(7)有且仅有三个实根 $1,r_1,r_2$，其中 $r_1<0<r_2\neq1$ 且 $1,r_1,r_2$ 均为单根. 因为 g 是方程(4)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，所以由引理 2.1 可知 g 是严格单调递增或严格单调递减的. 因此，对任给 $x_0\in\mathbf{R}$，令 $x_{k+1}=g(x_k),\forall k\in\mathbf{N}$，则序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是单调或反单调的.

$n=3$ 的情形. 由引理 2.3 和引理 2.4 可知

$$x_k=\widetilde{C}+C_1r_1^k+C_2r_2^k,\ \forall k\in\mathbf{N},$$

其中 $\widetilde{C},C_1,C_2\in\mathbf{R}$. 若序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是单调的，则当 $r_2<-r_1$ 时，根据 $r_1\neq0$ 可知

$$x_{k+1}-x_k=r_1^k\left[C_1(r_1-1)+C_2(r_2-1)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k\right].$$

故由 $\lim_{k\to+\infty}(r_2/|r_1|)^k=0$ 可知 $C_1=0$. 当 $-r_1<r_2$ 时，考虑方程(4)的对偶方程. 类似上面过程可得 $C_1=0$. 若序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是反单调的，则当 $-r_1<r_2$ 时，根据 $r_2\neq0$ 可知

$$x_{k+1}-x_k=r_2^k[C_1(r_1-1)(\frac{r_1}{r_2})^k+C_2(r_2-1)].$$

故由 $\lim_{k\to+\infty}(r_1/r_2)^k=0$ 可知 $C_2=0$. 当 $r_2<-r_1$ 时，考虑方程(4)的对偶方程. 类似上面过程可得 $C_2=0$. 因此，由引理 2.3 和引理 2.4 可知 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_1$ 或 r_2.

$n\geqslant5$ 的情形. 设 $\hat{w}_1,\overline{\hat{w}}_1,\cdots,\hat{w}_{\hat{j}},\overline{\hat{w}}_{\hat{j}}$ 和 $\hat{l}_1,\hat{l}_1,\cdots,\hat{l}_{\hat{j}},\hat{l}_{\hat{j}}$ 是方程(7)在 $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ 上所有两两互异的根及对应的重数，则由引理 2.3 和引理 2.4 可知

$$x_k=\hat{C}+\hat{C}_1\,r_1^k+\hat{C}_2\,r_2^k+\sum_{t=1}(\hat{A}_t(k)\cos k\,\hat{\varphi}_t+\hat{B}_t(k)\sin k\,\hat{\varphi}_t)\mid\hat{w}_t\mid^k,\ \forall k\in\mathbf{N},$$

其中 $\hat{C},\hat{C}_1,\hat{C}_2\in\mathbf{R}$，$\hat{A}_t(k),\hat{B}_t(k)$ 是重数小于 $\hat{l}_t$ 的实系数多项式，$\hat{\varphi}_t$ 是 $\hat{w}_t$ 的幅角，$t=1,\ldots,\hat{j}$，且不妨设 $\hat{\varphi}_t\in(0,\pi)$. 令集合 $S_2:=\{|\hat{w}_t|\mid t=1,\ldots,\hat{j}\}$. 设 $\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_{\hat{p}}$ 是 S_2 中两两互异的元素且满足 $\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}$，$\hat{p}\in\mathbf{N},1\leqslant\hat{p}\leqslant\hat{j}$. 由引理 2.2 (ii)可知若 $z_0\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ 是方程(7)的根则 $r_2\neq|z_0|<-r_1$，从而下列情形之一成立：

(ii_1) $\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}<\min\{-r_1,r_2\}$；

(ii_2) $r_2<\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}<-r_1$；

(ii_3) 存在 $\hat{s}\in\mathbf{N},1\leqslant\hat{s}\leqslant\hat{p}-1$，使得 $\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{s}}<r_2<\hat{\lambda}_{\hat{s}+1}<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}<-r_1$.

对 $v=1,\cdots,\hat{p}$，令

$$\hat{I}_v:=\{t\mid|\hat{w}_t|=\hat{\lambda}_v,t=1,\ldots,\hat{j}\},$$

$$\hat{F}_v(k):=\sum_{t\in\hat{I}_v}(\hat{A}_t(k)\cos k\hat{\varphi}_t+\hat{B}_t(k)\sin k\hat{\varphi}_t)\cdot\hat{w}_t\mid^k,$$

又定义 $y_k:=x_k-\hat{C},\forall k\in\mathbf{N}$ 可得

$$y_k=\hat{C}_1\,r_1^k+\hat{C}_2\,r_2{}^k+\sum\nolimits_{v=1}^{\hat{p}}\hat{F}_v(k),\ \forall k\in\mathbf{N}.$$

(ii_1) 由于 $\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}<\min\{-r_1,r_2\}$，将 r_1,r_2 看作一个整体，类似情形(i_2)的证明. 消去 y_k 中含 $\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_{\hat{p}}$ 的项有 $x_k=\hat{C}+\hat{C}_1\,r_1{}^k+\hat{C}_2\,r_2{}^k$. 再类似

对 $n=3$ 情形的证明可得 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_1$ 或 r_2.

(ii$_2$) 当 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 单调时，由于 $r_2<\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}<-r_1$，将 $r_2,\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_{\hat{p}}$ 看作一个整体，类似对 $n=3$ 且序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 单调时的情形的证明可得 $\hat{C}_1=0$. 这时，

$$y_k=\hat{C}_2r_2^k+\sum_{v=1}^{\hat{p}}\hat{F}_v(k),\forall k\in\mathbf{N},$$

且 $r_2<\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}$. 从而，类似对情形(i$_1$)的证明可以依次消去 y_k 中含 $\hat{\lambda}_{\hat{p}},\cdots,\hat{\lambda}_1$ 的项后知 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_2$. 当 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 反单调时，由于 $r_2<\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}<-r_1$，将 $r_1,\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_{\hat{p}}$ 看作一个整体，类似对 $n=3$ 且序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 反单调时的情形的证明可得 $\hat{C}_2=0$. 这时有

$$y_k=\hat{C}_1r_1^k+\sum_{v=1}^{\hat{p}}\hat{F}_v(k),\forall k\in\mathbf{N}$$

且 $\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}<-r_1$. 从而，再类似情形(i$_2$)的证明可以消去 y_k 中含 $\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_{\hat{p}}$ 的项后知 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_1$.

(ii$_3$) 由于 $\hat{\lambda}_1<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{s}}<r_2<\hat{\lambda}_{\hat{s}+1}<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}<-r_1$，将 $r_1,r_2,\hat{\lambda}_{\hat{s}+1},\cdots,\hat{\lambda}_{\hat{p}}$ 看作一个整体，类似情形(i$_2$)的证明，消去 y_k 中含 $\hat{\lambda}_1,\cdots,\hat{\lambda}_{\hat{s}}$ 的项后得

$$y_k=\hat{C}_1r_1^k+\hat{C}_2r_2^k+\sum_{v=\hat{s}+1}^{\hat{p}}\hat{F}_v(k),\forall k\in\mathbf{N}$$

且 $r_2<\hat{\lambda}_{\hat{s}+1}<\cdots<\hat{\lambda}_{\hat{p}}<-r_1$. 从而类似情形(ii$_2$)的证明可得 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_1$ 或 r_2. 证毕.

当 $r\in\mathbf{R},a,b\in\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ 且满足当 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 有 $a\neq b$ 时. 令函数

$$g_{r,a,b}(x):=\begin{cases}r(x-a)+a, & x\leqslant a,\\ x, & a<x<b,\\ r(x-b)+b, & x\geqslant b.\end{cases}$$

定理 3.2　若函数 g 是方程(4)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，则

(i) 当 n 为偶数时，存在 $a,b\in\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$，满足当 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 时 $a\neq b$，使得 $g(x)=g_{r_0,a,b}(x),\forall x\in\mathbf{R}$；

(ii) 当 n 为奇数时，存在 $a,b\in\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$，满足当 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 时 $a\neq b$，使得 $g(x)=g_{r_2,a,b}(x),\forall x\in\mathbf{R}$，或存在 $c\in\mathbf{R}$ 使得 $g(x)=r_1x+c,\forall x\in\mathbf{R}$.

证明　(i) 当 n 为偶数时，由定理 3.1 可知 g 是方程(4)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解当且仅当 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_0$. 从而由 $0<r_0\neq1$ 和文献[9]中定理 8 可知，存在 $a,b\in\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$，满足当 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 时 $a\neq b$，使得 $g(x)=g_{r_0,a,b}(x),\forall x\in\mathbf{R}$.

(ii) 当 n 为奇数时，由定理 3.1 可知 g 是方程(4)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解当且仅当 g 是方程(12)在 $\mathbf{R}$ 上的实连续解，其中 $r=r_1$ 或 r_2. 从而由 $-1\neq r_1<0<r_2\neq1$，文献[9]中定理 8 和定理 9 可知，存在 $a,b\in\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$，满足当 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 时 $a\neq b$，使得 $g(x)=g_{r_2,a,b}(x),\forall x\in\mathbf{R}$，或存在 $c\in\mathbf{R}$，使得 $g(x)=r_1x+c,\forall x\in\mathbf{R}$. 证毕.

当 $r\in\mathbf{R},\alpha,\beta\in[0,+\infty]$，满足当 $\alpha=0$ 或 $\beta=+\infty$ 时有 $\alpha\neq\beta$ 时，令

$$f_{r,\alpha,\beta}(x)=\begin{cases}\alpha^{1-r}x^r, & 0<x\leqslant\alpha,\\ x, & \alpha<x<\beta,\\ \beta^{1-r}x^r, & x\geqslant\beta.\end{cases}$$

定理 3.3　若函数 f 是方程(3)在 $(0,+\infty)$ 上的实连续解，则

(i) 当 n 为偶数时，存在 $\alpha,\beta\in[0,+\infty]$，满足当 $\alpha=0$ 或 $\beta=+\infty$ 时 $\alpha\neq\beta$，使得

$$f(x)=f_{r_0,\alpha,\beta}(x),\forall x\in(0,+\infty).$$

(ii) 当 n 为奇数时，存在 $\alpha,\beta\in[0,+\infty]$，满足当 $\alpha=0$ 或 $\beta=+\infty$ 时 $\alpha\neq\beta$，使得

$$f(x)=f_{r_2,\alpha,\beta}(x),\forall x\in(0,+\infty),$$

或存在 $\gamma\in(0,+\infty)$，使得 $f(x)=\gamma x^{r_1},\forall x\in(0,+\infty)$.

证明　作变换 $f(x)=\mathrm{e}^{g(\ln(x))},\forall x\in(0,+\infty)$，则方程(3)等价于方程(4). 因此，由定理 3.2 可得结论成立. 证毕.

4　结　论

本文给出了当 $m,n\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\},m\neq n$ 时一类推广的 Dhombres 方程的等价多项式型迭代函数方程，证明了当迭代次数 n 为偶数时该多项式型迭代函数方程有两个互异的实根，当 n 为奇数时有三个互异的实根，并分析了该方程实根和复根模之间的大小关系. 应用降次技术，当 n 为偶数时，我们消去该多项式型迭代函数方程所有的复根，当 n 为奇数时，我们消去其所有的复根和任一个非 1 实根，将求解该多项式型迭代函数方程转化为求解消根后的多项式型迭代函数方程，进

而得到了该类推广的 Dhombres 方程的所有实连续解.

参考文献:

[1] Dhombres J. Some aspects of functional equations [M]. Bangkok: Chulalongkorn University, 1979.

[2] Smítal J, Štefánková M. On regular solutions of the generalized Dhombres equation [J]. Aequationes Math, 2015, 89: 57.

[3] Kahlig P, Matkowska A, Matkowski J. On a class of functional equations in a single variable [J]. Aequationes Math, 1996, 52: 260.

[4] Reich L, Smítal J, Štefánková M. Local analytic solutions of the generalized Dhombres functional equation II [J]. J Math Anal Appl, 2009, 355: 821.

[5] Kuczma M. Functional equations in a single variable [M]. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1968.

[6] Morawiec J. On a functional equation involving iterates and powers [J]. Adv Diff Equ, 2014, 2014: 271.

[7] Draga S, Morawiec J. Reducing the polynomial-like iterative equations order and a generalized Zoltán Boros'problem [J]. Aequationes Math, 2016, 90: 935.

[8] Matkowski J, Zhang W. On linear dependence of iterates [J]. J Appl Anal, 2000, 6: 149.

[9] Nabeya S. On the functional equation $f(p+qx+rf(x))=a+bx+cf(x)$ [J]. Aequationes Math, 1974, 11: 199.

引用本文格式:

中 文:袁甜真,徐冰.一类推广的 Dhombres 方程的实连续解[J]. 四川大学学报:自然科学版,2022,59:061001.

英 文:Yuan T Z, Xu B. Real continuous solutions of a class of generalized Dhombres equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 061001.