2022 年 5 月 四川大学学报(自然科学版) May 2022
第 59 卷 第 3 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 59 No. 3

一类非齐次 Choquard 方程的解整体存在与爆破的条件

何巧玲，黄 娟
(四川师范大学数学科学学院 可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室，成都 610068)

摘 要：本文研究了一类非齐次 Choquard 方程在初值质能高于其基态质能情形下的解的整体存在与爆破的条件. 本文利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式及 Virial 恒等式构造了一个辅助函数,并由该函数的凸性获得了初值质能高于基态质能的等价刻画,进而得到了 Choquard 方程的解整体存在和爆破的条件. 此外，本文还根据 Cauchy-Schwartz 不等式和不确定原理,借助一个粒子在具有势垒场中运动的力学分析,得到了一个新的解爆破存在的充分条件.

关键词：Choquard 方程；整体存在；爆破；Virial 恒等式
中图分类号：O175.29 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.031005

Global existence and blowup conditions for the solutions of an inhomogeneous Choquard equation

HE Qiao-Ling, *HUANG Juan*
(V C & V R Key Lab of Sichuan Provence, School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

Abstract: In this paper, we mainly study the global existence and blowup conditions for the solutions of an inhomogeneous Choquard equations when the initial data is above the ground state's mass-energy. Firstly, an auxiliary function is constructed by the Gagliardo-Nirenberg inequality and Virial identity, while an equivalent characterization of the initial data above the ground state's mass-energy is obtained by using the convexity of the auxiliary function. Then we get the conditions of the global existence and blowup for the solutions of the equation. Finally, according to the Cauchy-Schwartz inequality and the uncertainty principle, a new sufficient condition for the existence of blow-up of the solutions is obtained by using the mechanical analysis of a particle moving in the potential barrier field.

Keywords: Choquard equation; Global existence; Blowup; Virial identity
(2010 MSC 35K15)

1 引 言

本文研究如下非齐次非线性 Choquard 方程解整体存在及爆破的条件：

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+\Delta u=-(I_\alpha*|\cdot|^b|u|^p)|x|^b|u|^{p-2}u, \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u(t,x):I\times\mathbf{R}^d\mapsto\mathbf{C}$ 是复值波函数，$d\geqslant 3$，$b\leqslant$

收稿日期：2021-11-02
基金项目：国家自然科学基金(12171343)；四川省科技厅应用基础研究项目(2018JY0486)；四川省科技计划资助项目(2022JDTD0019)
作者简介：何巧玲(1998－)，女，硕士研究生，主要研究方向为偏微分方程. E-mail：2657224501@qq.com
通讯作者：黄娟. E-mail：hjmath@163.com

0,I_α 是 Riesz 位势,即

$$I_\alpha := \frac{\Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pi^{\frac{d}{2}}2^\alpha\ |\cdot|^{d-\alpha}},$$

$0<\alpha<d, 1+\frac{2+\alpha+2b}{d}<p<1+\frac{2+\alpha+2b}{d-2}$. 当 $b=0$ 时,方程(1)退化为广义非线性 Hartree 方程. Choquard 方程在量子物理学及非相对论牛顿引力耦合模型等的研究中有重要应用[1-4],如 Pekar[5] 利用 Choquard 方程来描述量子理论中静止的极化子. 此外,在等离子体的 Hartree-Fock 理论中,Choquard 方程也可以作为电子阱模型[6].

近年来,关于 Choquard 方程解的局部、整体存在性及解的爆破性质等动力学行为,已取得了一些成果[7-15]. 当 $0<\alpha<d$ 时,Cazenave[7] 和 Ginibre 等[8]讨论了方程(1)在 $p=2$ 情形下的局部适定性和渐近行为. 基于上述条件,Miao 等[9-10]研究了方程(1)的全局适定性和散射,并利用 profile 分解方法得到爆破解在 L^2-临界情况下的集中性质. 之后,Chen 等[11]将 p 的范围扩大到 $1+\frac{\alpha}{d}\leqslant p<\frac{d+\alpha}{d-2}$,探讨了爆破解的存在性和驻波的强不稳定性. 当 $\alpha=2$ 时,Genev 等[12]讨论了方程(1)当 $2\leqslant p<\frac{d+\alpha}{d-2}$时的局部适定性及爆破解的存在性;Feng 等[13]进一步推广了上述结果,证明当 $\max\{0,d-4\}<\alpha<d$ 时广义 Hartree 方程解的局部与全局适定性,并利用 Glassey[14]提出的凸性方法讨论了爆破解的存在性,研究了质量临界时爆破解的动力学行为. 当 $b<0$ 时,Alharbi 等[15]研究了方程(1)在非齐次情况下的局部适定性,利用基态解的存在性和 Gagliardo-Nirenberg 不等式研究了在质量超临界和能量亚临界情况下当初值质能低于基态质能时解整体存在和爆破的条件,并得到了径向情形下解的散射结果.

值得注意的是,在已有文献中,关于方程(1)的整体解和爆破解的相关结论都只考虑初值质能低于基态质能的情形. 一个自然的问题是:若初值质能高于基态质能,会有怎样的结果呢? 对于这个问题,目前我们尚未发现有相关研究. 鉴于此,本文主要研究方程(1)当初值质能高于基态质能时解的整体存在和爆破的条件. 此外,受 Lushnikov 在文献[16]中所用方法的启发,我们利用 Cauchy-Schwartz 不等式和不确定原理,借助一个粒子在具有势垒场中运动的力学分析得到了方程(1)的一个新的爆破解存在的充分条件.

后文安排如下. 在第 2 节中,我们主要介绍方程(1)的局部适定性,Gagliardo-Nirenberg 不等式及 Pohozaev 恒等式等预备知识. 在第 3 节中,我们给出并证明当初值质能高于基态质能时方程(1)解的整体存在和爆破的条件. 在第 4 节中,我们借助一个粒子在具有势垒场中运动的力学分析得到方程(1)的一个新的爆破解存在的充分条件. 在第 5 节中,我们对本文的主要结果作出总结.

2 预备知识

本文采用如下记号:用 $\int\cdot\,\mathrm{d}x$ 代替 $\int_{\mathbf{R}^d}\cdot\,\mathrm{d}x$, $\|\cdot\|$表示 $L^2(\mathbf{R}^d)$空间范数, $\|\cdot\|_{L^p}$ 表示 $L^p(\mathbf{R}^d)$空间范数.

命题 2.1 (局部适定性)[15] 当 $u_0\in H^1(\mathbf{R}^d)$时,存在 $T\in(0,\infty)$,使得问题(1)存在唯一解 $u(t,x)\in C([0,T);H^1(\mathbf{R}^d))$,且 $\lim\limits_{t\to T}\|u(t)\|_{H^1(\mathbf{R}^d)}=\infty$. 如果 $T=\infty$,则称 $u(t)$为问题(1)的整体解;如果 $T<\infty$,则称 $u(t)$为问题(1)的爆破解. 对于任意的 $t\in[0,T)$, $u(t)$满足以下的质量和能量恒等式:

$$M[u(t)]=\int|u(t,x)|^2\mathrm{d}x\equiv M[u_0],$$

$$E[u(t)]=\int(|\nabla u(t,x)|^2-\frac{1}{p}|x|^b(I_\alpha*|\cdot|^b|u(t)|^p)|u(t)|^p)\mathrm{d}x\equiv E[u_0].$$

引理 2.2(最佳 Gagliardo-Nirenberg 不等式)[15,17,18] 对于任意的 $f\in H^1(\mathbf{R}^d)$,存在 $C_Q>0$,使得

$$\left(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|f|^p)|x|^b|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{B}}\leqslant C_Q\|f\|^{2k}\|\nabla f\|^2 \tag{2}$$

其中

$$B=Np-d-\alpha-2b=2(p-1)s_c+2,$$

$$C_Q=\frac{\left(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|Q|^p)|x|^b|Q|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{B}}}{\|Q\|^{2k}\|\nabla Q\|^2},$$

$k=\frac{(p-1)(1-s_c)}{(p-1)s_c+1}$,$C_Q$ 是不等式的最佳常数,其中的 Q 是如下椭圆方程的正径向解:

$$-\Delta Q+Q-(I_\alpha*|\cdot|^b|Q|^p)|x|^b|Q|^{p-2}Q=0 \tag{3}$$

注 1 把(3)式两边分别乘以 Q 和 $x\cdot\nabla Q$ 后在$\mathbf{R}^d$ 上积分,可得到 Pohozaev 等式

$$\int|\nabla Q|^2\mathrm{d}x=\frac{B}{2p}\int(I_\alpha*|\cdot|^b|Q|^p)|x|^b|Q|^p\mathrm{d}x,$$

于是

$$C_Q=\frac{2p}{B}\frac{[\int(I_\alpha*|\cdot|^b|Q|^p)|x|^b|Q|^p\mathrm{d}x]^{\frac{2}{B}-1}}{M[Q]^k}=\left(\frac{2P}{B-2}\right)^{\frac{2}{B}}\left(\frac{B-2}{B}\right)\frac{E[Q]^{\frac{2}{B}-1}}{M[Q]^k}.$$

引理 2.3 （Virial 恒等式）[15]　设 $u(t,x)$是方程(1)的解. 定义 $V(t)=\int|x|^2|u|^2\mathrm{d}x$. 则下列等式恒成立：

$$V_t(t)=4\mathrm{Im}\int x\cdot\nabla u\bar{u}\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$V_{tt}(t)=8\|\nabla u\|^2-\frac{4B}{p}\int(I_\alpha*|\cdot|^b|u|^p)|x|^b|u|^p\mathrm{d}x=4(BE[u]-(B-2)\|\nabla u\|^2) \tag{5}$$

引理 2.4[19]　设 $g\in H^1(\mathbf{R}^d)$, $xg\in L^2$. 则有

$$(\mathrm{Im}\int x\cdot\nabla g\bar{g}\mathrm{d}x)^2\leqslant\int|x|^2|g|^2\mathrm{d}x[\|\nabla g\|^2-\frac{1}{C_QM[g]^k}(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|g|^p)|x|^b|g|^p\mathrm{d}x)^{\frac{2}{B}}].$$

证明　注意到

$$\int|\nabla(\mathrm{e}^{i\lambda|x|^2}g)|^2\mathrm{d}x=4\lambda^2\int|x|^2|g|^2\mathrm{d}x+4\lambda\mathrm{Im}\int x\cdot\nabla g\bar{g}\mathrm{d}x+\int|\nabla g|^2\mathrm{d}x,$$

在(2)式中令 $f=\mathrm{e}^{i\lambda|x|^2}g$,则对任意 $\lambda\in\mathbf{R}$ 有

$$C_QM[g]^k[4\lambda^2\int|x|^2|g|^2\mathrm{d}x+4\lambda\mathrm{Im}\int x\nabla g\bar{g}\mathrm{d}x+\int|\nabla g|^2\mathrm{d}x]-(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|g|^p)|x|^b|g|^p\mathrm{d}x)^{\frac{2}{B}}\geqslant0.$$

将上式视为关于 λ 的一元二次多项式,则不等式成立当且仅当关于 λ 的多项式的判别式为非正,即引理 2.4. 证毕.

3　解整体存在及爆破的条件

定理 3.1　设 $u(t,x)$是问题(1)的解,$V(0)<\infty$,$u_0\in H^1(\mathbf{R}^d)$. 令

$$M[u]^{1-s_c}E[u]^{s_c}\geqslant M[Q]^{1-s_c}E[Q]^{s_c} \tag{6}$$

$$\frac{M[u]^{\frac{1-s_c}{s_c}}E[u]}{M[Q]^{\frac{1-s_c}{s_c}}E[Q]}\left(1-\frac{(V_t(0))^2}{16E[u]V(0)}\right)\leqslant1 \tag{7}$$

则

(i) 若有

$$M[u_0]^{1-s_c}\cdot(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|u_0|^p)|x|^b|u_0|^p\mathrm{d}x)^{s_c}>M[Q]^{1-s_c}(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|Q|^p)|x|^b|Q|^p\mathrm{d}x)^{s_c} \tag{8}$$

及

$$V_t(0)\leqslant0 \tag{9}$$

则 $u(t,x)$在有限时间内爆破;

(ii) 若有

$$M[u_0]^{1-s_c}\cdot(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|u_0|^p)|x|^b|u_0|^p\mathrm{d}x)^{s_c}<M[Q]^{1-s_c}(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|Q|^p)|x|^b|Q|^p\mathrm{d}x)^{s_c} \tag{10}$$

及

$$V_t(0)\geqslant0 \tag{11}$$

则有

$$\limsup_{t\to\infty}M[u]^{1-s_c}\cdot(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|u|^p)|x|^b|u|^p\mathrm{d}x)^{s_c}<M[Q]^{1-s_c}(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|Q|^p)|x|^b|Q|^p\mathrm{d}x)^{s_c} \tag{12}$$

那么 $u(t,x)$全局存在.

证明　由(5)式得

$$\int(I_\alpha*|\cdot|^b|u|^p)|x|^b|u|^p\mathrm{d}x=\frac{p(8E[u]-V_{tt})}{4(B-2)} \tag{13}$$

$$\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\frac{4BE[u]-V_{tt}}{4(B-2)} \tag{14}$$

再由(4)式和引理 2.4 可得

$$(V_t(t))^2\leqslant16V(t)[\int|\nabla u(t)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{C_QM[u]^k}(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|u|^p)|x|^b|u|^p\mathrm{d}x)^{\frac{2}{B}}] \tag{15}$$

令 $Z(t)=\sqrt{V(t)}$,其中 $t\in[0,T)$. 将(13)式和(14)式代入(15)式得

$$(Z_t(t))^2\leqslant4\varphi(V_{tt}) \tag{16}$$

令

$$\varphi(\sigma)=-\frac{\sigma}{4(B-2)}+\frac{BE(u)}{B-2}-$$

$$\frac{1}{C_Q M[u]^k}\left[\frac{p(8E[u]-\sigma)}{4(B-2)}\right]^{\frac{2}{B}}.$$

由(13)式可知 $\sigma\in(-\infty,8E[u]]$,从而

$$\varphi'(\sigma)=-\frac{1}{4(B-2)}+\frac{1}{C_Q M[u]^k}\cdot$$

$$\frac{1}{(p-1)s_c+1}\cdot\left[\frac{p}{4(B-2)}\right]^{\frac{2}{B}}(8E[u]-\sigma)^{\frac{2}{B}-1}.$$

当 $\varphi'(\sigma_m)=0$ 时,其中的 σ_m 满足

$$\frac{1}{4(B-2)}=\frac{1}{C_Q M[u]^k}\cdot\frac{1}{(p-1)s_c+1}\cdot$$

$$\left[\frac{p}{4(B-2)}\right]^{\frac{2}{B}}(8E[u]-\sigma_m)^{\frac{2}{B}-1} \tag{17}$$

且 $\varphi(\sigma)$ 在 $(-\infty,\sigma_m]$ 单调递减、在 $(\sigma_m,8E[u]]$ 单调递增,从而 $\varphi(\sigma)$ 在 $\sigma=\sigma_m$ 处取得最小值 $\frac{\sigma_m}{8}$. 由 C_Q 的取值,可以把(17)式改写为

$$\left(\frac{M[u]}{M[Q]}\right)^{1-s_c}\left(\frac{E[u]-\frac{\sigma_m}{8}}{E[Q]}\right)^{s_c}=1.$$

所以(6)式和(7)式分别等价于

$$\sigma_m\geqslant 0 \tag{18}$$

及

$$Z_t(0)^2\geqslant 4\varphi(\sigma_m)=\frac{\sigma_m}{2} \tag{19}$$

(i) (9)式可写为

$$Z_t(0)\leqslant 0 \tag{20}$$

由(8)式和 Pohozaev 恒等式可得

$$\left(\frac{M[u_0]}{M[Q]}\right)^{1-s_c}\cdot$$

$$\left(\frac{\frac{B-2}{2p}\int(I_\alpha*|\cdot|^b|u_0|^p)|x|^b|u_0|^p\mathrm{d}x}{E[Q]}\right)^{s_c}>$$

$$1=\left(\frac{M[u_0]}{M[Q]}\right)^{1-s_c}\left(\frac{E[u]-\frac{\sigma_m}{8}}{E[Q]}\right)^{s_c}.$$

结合(20)式得

$$V_{tt}(0)<\sigma_m \tag{21}$$

下证对任意 $t\in[0,T)$ 都有

$$Z_{tt}(t)<0 \tag{22}$$

由(19)式和(21)式有

$$Z_{tt}(0)=\frac{1}{Z(0)}\left(\frac{V_{tt}(0)}{2}-(Z_t(0))^2\right)<$$

$$\frac{1}{Z(0)}\left(\frac{\sigma_m}{2}-\frac{\sigma_m}{2}\right)=0 \tag{23}$$

当证(22)式成立,我们反设(22)式不成立. 则由(23)式知存在 $t_0\in(0,T)$ 使得 $Z_{tt}(t_0)=0$ 且 $Z_{tt}(t_0)<0$ 对任意 $t\in[0,t_0)$ 成立. 再由(19)式和(20)式,对任意 $t\in(0,t_0]$ 有

$$Z_t(t)<Z_t(0)\leqslant-\sqrt{4\varphi(\sigma_m)} \tag{24}$$

因此 $Z_t(t)^2>4\varphi(\sigma_m)$ 成立. 由(16)式可知,$\varphi(V_{tt}(t))>\varphi(\sigma_m)$(其中 $t\in(0,t_0]$). 由(21)式及 $V_{tt}(t)$ 的连续性,有

$$V_{tt}(t)<\sigma_m,\ \forall t\in(0,t_0] \tag{25}$$

根据式(23)(24)(25)可得

$$Z_{tt}(t_0)=\frac{1}{Z(t_0)}\left(\frac{V_{tt}(t_0)}{2}-(Z_t(t_0))^2\right)<$$

$$\frac{1}{Z(t_0)}\left(\frac{\sigma_m}{2}-\frac{\sigma_m}{2}\right)=0.$$

这与假设 $Z_{tt}(t_0)=0$ 产生矛盾. (22)式成立.

由(20)式和 $Z(t)=\sqrt{V(t)}$ 知,存在 $T<\infty$ 使得 $Z(T)=0$,即 $\lim\limits_{t\to T}V(t)=0$, $T<\infty$. 所以有 $\lim\limits_{t\to T}\|\nabla u\|^2=\infty$,即解在有限时间爆破.

(ii) 假设(6)式,(7)式,(10)式和(11)式成立. 则(ii)等价于(18)式,(19)式及下列不等式成立

$$Z_t(0)\geqslant 0 \tag{26}$$

$$V_{tt}(0)>\sigma_m \tag{27}$$

注意到存在 $t_0\geqslant 0$,使得

$$Z_t(t_0)>2\sqrt{\varphi(\sigma_m)} \tag{28}$$

取一个足够小的参数 $\varepsilon>0$,满足

$$Z_t(t_0)\geqslant 2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}+\varepsilon.$$

由(19)式和(26)式知 $Z_t(0)\geqslant 2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}$. 如果不等式是严格成立的,则在(28)式中取 $t_0=0$;如果不是则由 $Z_{tt}(0)=\frac{1}{Z(0)}\left(\frac{V_{tt}(0)}{2}-(Z_t(0))^2\right)$ 和(27)式得 $Z_{tt}(0)>0$,且对于足够小的 $t_0>0$,(28)式成立. 下证

$$Z_t(t)\geqslant 2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}+\varepsilon,\ \forall t\geqslant t_0 \tag{29}$$

反设(29)式不成立. 令

$$t_1=\inf\{t\geqslant t_0: Z_t(t)\leqslant 2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}+\varepsilon\}.$$

由 $Z_t(t)$ 的连续性有

$$Z_t(t_1)=2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}+\varepsilon \tag{30}$$

及

$$Z_t(t)\geqslant 2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}+\varepsilon,\ \forall t\in[t_0,t_1] \tag{31}$$

由(16)式知

$$\left(2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}+\varepsilon\right)^2\leqslant(Z_t(t))^2\leqslant 4\varphi(V_{tt}(t)),\quad \forall t\in[t_0,t_1] \tag{32}$$

因而 $\varphi(V_{tt}(t))>\varphi(\sigma_m)$ 对任意 $t\in[t_0,t_1]$ 成立. 这意味着 $V_{tt}(t)\neq\sigma_m$. 结合 $V_{tt}(0)>\sigma_m$ 及 $V_{tt}(t)$ 的连续性,可得到 $V_{tt}(t)>\sigma_m$.

假设存在一个常数 $D>0$，使得

$$V_{tt}(t)>\sigma_m+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{D},\forall t\in[t_0,t_1] \tag{33}$$

将 φ 在 $\sigma=\sigma_m$ 的泰勒展开式，则存在常数 $a>0$ 使得

$$|\sigma-\sigma_m|\leqslant 1\Rightarrow\varphi(\sigma)\leqslant\varphi(\sigma_m)+a(\sigma-\sigma_m)^2 \tag{34}$$

如果 $V_{tt}(t)>\sigma_m+1$，则(33)式成立(对于足够大的 D)．如果 $\sigma_m<V_{tt}(t)\leqslant\sigma+1$，则由(32)式和(34)式得

$$(2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}+\varepsilon)^2\leqslant(Z_t(t))^2\leqslant 4\varphi(V_{tt}(t))\leqslant 4\varphi(\sigma_m)+4a(\sigma-\sigma_m)^2.$$

因此有

$$4\sqrt{\varphi(\sigma_m)}\varepsilon+\varepsilon^2\leqslant 4a(V_{tt}(t)-\sigma_m)^2.$$

从而得到(33)式，其中

$$D=\sqrt{a}(\varphi(\sigma_m))^{-\frac{1}{4}}(a>0).$$

但是，由(33)式和(30)式又可得

$$Z_{tt}(t_1)=\frac{1}{Z(t_1)}[\frac{V_{tt}(t_1)}{2}-(Z_t(t_1))^2)]\geqslant \frac{1}{Z(t_1)}(\frac{\sigma_m}{2}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2D}-(2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}+\varepsilon)^2)\geqslant \frac{1}{Z(t_1)}(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2D}-4\varepsilon\sqrt{\varphi(\sigma_m)}-\varepsilon^2)>0,$$

从而当 ε 足够小时有 $Z_{tt}(t_1)>0$．这与(30)式和(31)式矛盾．因此，对任意 $t\geqslant t_0$ 都有 $Z_t(t)>2\sqrt{\varphi(\sigma_m)}+\varepsilon$.

显然，对任意 $t\in[t_0,T)$，(33)式都成立．结合(13)式和 Pohozaev 恒等式，我们有

$$M[u]^{1-s_c}(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|u|^p)|x|^b|u|^p\mathrm{d}x)^{s_c}\leqslant M[u]^{1-s_c}(\frac{P}{4(B-2)}(8E[u]-\sigma_m-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{D}))^{s_c}< M[u]^{1-s_c}(\frac{P}{4(B-2)}(8E[u]-\sigma_m))^{s_c}= M[Q]^{1-s_c}(\int(I_\alpha*|\cdot|^b|Q|^p)|x|^b|Q|^p\mathrm{d}x)^{s_c}.$$

定理证毕.

4　解爆破的新条件

在本节中，不同于 Zakharov[20] 与 Glassey[14] 提出的经典爆破准则，以及陈波涛[21] 提出的利用函数的可积性证明爆破解存在的方法，我们借助一个粒子在具有势垒场中运动的力学分析，结合 Cauchy-Schwarz 不等式和不确定原理获得问题(1)在有限时间内爆破的一个充分条件．这是对 Lushnikov 方法[16]的一个推广.

引理 4.1[19]　设有 $v=1$ 附近的钟型函数 $U(v)=\frac{v^{\delta+1}}{\delta+1}-\frac{v^{\gamma+1}}{\gamma+1}(v\geqslant 0)$，

$$\omega v_{ss}+\frac{\partial U}{\partial v}\leqslant 0 \tag{35}$$

其中 $-1<\delta<\gamma,0<\gamma<1,0<\omega<1$．定义泛函

$$\varepsilon(s)=\frac{\omega}{2}v_s^2(s)+U(v(s)),\forall s\in[0,T^+].$$

若 v 是问题(35)的一个非负解，使得以下任意一个条件成立：

(i) $\varepsilon(0)<U_{\max},v(0)<1$；

(ii) $\varepsilon(0)>U_{\max},v_s(0)<0$；

(iii) $\varepsilon(0)=U_{\max},v_s(0)<0;v(0)<1$，

那么 v 在某个有限时间 T^+ 内达到零点.

定理 4.2　设 $u_0\in H^1(\mathbf{R}^d)$，$V(0)<\infty$，$E[u]>0$．若

$$\frac{V_t(0)}{M[u]}<\sqrt{32N}d(N+2)^{-\frac{1}{2}} g\left(\frac{(N+2)V(0)E[u]}{Nd^2M[u]^2}\right),$$

其中 $N=[d(p-1)-(2+2b+\alpha)]$，$k=s_c(p-1)$，且

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{kx^k}+x-\frac{1+k}{k}},0<x\leqslant 1,\\ -\sqrt{\frac{1}{kx^k}+x-\frac{1+k}{k}},x\geqslant 1,\end{cases}$$

则方程(1)的解在有限时间内爆破.

证明　由于

$$\|u\|^2=\frac{1}{d}\int(\nabla\cdot x)|u|^2\mathrm{d}x=-\frac{2}{d}\mathrm{Re}\int(x\cdot\nabla u)\bar{u}\mathrm{d}x,$$

则

$$\left|\int(x\cdot\nabla u)\bar{u}\mathrm{d}x\right|^2=\left|\mathrm{Re}\int(x\cdot\nabla u)\bar{u}\mathrm{d}x\right|^2+\left|\mathrm{Im}\int(x\cdot\nabla u)\bar{u}\mathrm{d}x\right|^2=\frac{d^2}{4}\|u\|^4+\frac{V_t^2(t)}{16}.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\left|\int(x\cdot\nabla u)\bar{u}\mathrm{d}x\right|^2\leqslant\|xu\|^2\|\nabla u\|^2,$$

即

$$\frac{d^2}{4}\|u\|^4+\left|\frac{V_t(t)}{4}\right|^2\leqslant V(t)\|\nabla u\|^2.$$

将上述不等式代入(5)式，可得

$$V_{tt}(t)\leqslant 8[s_c(p-1)+1]E[u]-8(p-1)s_c\frac{d^2M[u]^2}{V(t)}-\frac{(p-1)s_c}{2}\frac{|V_t(t)|^2}{V(t)} \tag{36}$$

令

$$V(t)=B^{\frac{1}{\beta+1}}(t),$$

其中

$$\beta=\frac{s_c(p-1)}{2}=\frac{d(p-1)-(2+2b+\alpha)}{4}.$$

对任意 $t\in[0,T^+)$,(36)式可以改写为

$$B_{tt}(t)\leqslant 8(\beta+1)[s_c(p-1)+1](E[u]B^{\frac{\beta}{\beta+1}}(t)-\frac{[d(p-1)-(2+2b+\alpha)]d^2}{d(p-1)-(2+2b+\alpha)+2}M[u]^2B^{\frac{\beta-1}{\beta+1}}(t)) \tag{37}$$

这里,若 $N=[d(p-1)-(2+2b+\alpha)]$则令 $B(t)=B_{\max}v(s)$,$s=at$. 从而有

$$B_{\max}(t)=\left(\frac{Nd^2M[u]^2}{(N+2)E[u]}\right)^{\frac{N+4}{4}},$$

$$a=\frac{[32(N+2)]^{\frac{1}{2}}E[u]}{N^{\frac{1}{2}}dM[u]} \tag{38}$$

从而由(37)式可得

$$\omega v_{ss}(s)\leqslant v^{\gamma}(s)-v^{\delta}(s),s\in[0,\frac{T^+}{a}) \tag{39}$$

其中 $\gamma=\dfrac{\beta}{\beta+1}$,$\delta=\dfrac{\beta-1}{\beta+1}$,$\omega=\dfrac{4}{(\beta+1)[s_c(p-1)+1]}$.

借助一个粒子在具有势垒场中的力学运动分析(39)式,则可将其改写成

$$\omega v_{ss}+\frac{\partial U}{\partial v}\leqslant 0,s\in[0,\frac{T^+}{a}) \tag{40}$$

其中

$$U(v)=\frac{v^{\delta+1}}{\delta+1}-\frac{v^{\gamma+1}}{\gamma+1}$$

为粒子的电势,

$$U_{\max}=U(1)=\frac{1}{\delta+1}-\frac{1}{\gamma+1}.$$

设 $v=v(s)$(质量为 1)是在以下两种外力作用下运动的粒子坐标:

$$v_{ss}=-\frac{1}{\omega}\frac{\partial U}{\partial B}-g^2(t),$$

其中 $g^2(t)$是将粒子拉向零点的未知非负外力. 如果粒子在有限时间内到达零点,则意味着会发生坍塌;如果粒子到达零点时没有受到外力 $-g^2(t)$,那么当它受到这个力时一定会更快地到达零点. 所以,我们考虑方程

$$\omega v_{ss}+\frac{\partial U}{\partial v}=0,s\in[0,\frac{T^+}{a}) \tag{41}$$

并定义粒子 v 的能量为

$$\varepsilon(s)=\frac{\omega}{2}v_s^2(s)+U(v(s)) \tag{42}$$

由(41)式知能量是守恒的. 如果粒子在有限时间内到达零点,即存在 $t<\infty$使得 $v(t)=0$,则有 $V(t)=0$,方程(1)存在爆破解. 由引理 4.1,满足(41)式的爆破条件为

(i) $\varepsilon(0)<U_{\max}$,$v(0)<1$;

(ii) $\varepsilon(0)>U_{\max}$,$v_s(0)<0$;

(iii) $\varepsilon(0)=U_{\max}$,$v_s(0)<0$;$v(0)<1$,

那么 v 会在某个有限时间 T^+ 内达到零点.

下面我们对条件(i)～(iii)进行化简. 定义 $v=\widetilde{V}^{\beta+1}$,能量为

$$\varepsilon=\frac{\beta+1}{2\beta+1}(\widetilde{V}')^2\widetilde{V}^{2\beta}-\frac{\beta+1}{2\beta+1}\widetilde{V}^{2\beta+1}+\frac{\beta+1}{2\beta}\widetilde{V}^{2\beta}.$$

则有

$$\varepsilon<U_{\max}\Leftrightarrow(\widetilde{V}')^2<\frac{1}{2\beta\widetilde{V}^{2\beta}}-\frac{2\beta+1}{2\beta}+\widetilde{V} \tag{43}$$

令 $k=2\beta=s_c(p-1)$. 则有函数

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{kx^k}+x-\frac{1+k}{k}} \tag{44}$$

于是爆破条件(i)～(iii)可以写为

$$\widetilde{V}_s(0)<\begin{cases}+f(\widetilde{V}(0)),\widetilde{V}(0)<1,\\-f(\widetilde{V}(0)),\widetilde{V}(0)\geqslant 1.\end{cases}$$

因为 $V(t)=(B_{\max}v(at))^{\frac{1}{\beta+1}}$,所以

$$V(t)=\left(\frac{Nd^2M[u]^2}{(N+2)E[u]}\right)\cdot\widetilde{V}\left(\frac{[32(N+2)]^{\frac{1}{2}}E[u]t}{N^{\frac{1}{2}}dM[u]}\right).$$

因此,我们有

$$\frac{V_t(0)}{M[u]}<\sqrt{32Nd}\,(N+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot g\left(\frac{(N+2)V(0)E[u]}{Nd^2M[u]^2}\right),$$

其中

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{kx^k}+x-\dfrac{1+k}{k}},0<x\leqslant 1,\\-\sqrt{\dfrac{1}{kx^k}+x-\dfrac{1+k}{k}},x\geqslant 1.\end{cases}$$

定理得证.

5 结　论

本文借助 Gagliardo-Nirenberg 不等式、Cauchy-Schwartz 不等式及 Virial 恒等式等研究了一类非齐次 Choquard 方程在初值质能高于其基态质能情形下的解的整体存在与爆破条件. 结合方差 $V(t)=\int|x|^2|u|^2\mathrm{d}x$ 的凸性,本文构造了初值质能高于基态质能的一个等价刻画,得到了方程

(1)的解整体存在和爆破的条件. 此外，本文还利用 Lushnikov 讨论经典非线性 Schrödinger 方程的方法，借助一个粒子在具有势垒场中运动的力学分析得到了方程(1)的个新的爆破条件.

参考文献：

[1] Lewin M, Rougerie N. Derivation of Pekar's polarons from a microscopic model of quantum crystal [J]. SIAM J Math Anal, 2013, 45: 1267.

[2] Lions P L. The Choquard equation and related questions [J]. Nonlinear Anal, 1980, 4: 1063.

[3] Penrose R. Quantum computation, entanglement and state reduction [J]. Phil Trans R Soc, 1998, 356: 1927.

[4] Spohn H. On the Vlasov hierarchy [J]. Math Method Appl Sci, 1981, 3: 445.

[5] Pekar S I. Untersuchungen über die Elekeronentheorie der kristalle [M]. Berlin: Akademie Verlag, 1954.

[6] Lieb E H. Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation [J]. Stud Appl Math, 1977, 57: 93.

[7] Cazenave T. Semilinear Schrödinger equations [M]. Providence: AMS, 2003.

[8] Ginibre J, Velo G. On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction [J]. Math Z, 1980, 170: 109.

[9] Miao C, Xu G. Global well-posedness and scattering for the energy critical defocusing Hartree equation for radial case [J]. J Funct Anal, 2007, 253: 605.

[10] Miao C, Xu G. On the blow-up phenomenon for the mass-critical focusing Hartree equation in $\mathbf{R}^4$ [J]. Colloq Math, 2010, 119: 23.

[11] Chen J, Guo B. Strong instability of standing waves for a nonlocal Schrödinger equation [J]. Physica D, 2007, 227: 142.

[12] Genev H, Venkov G. Soliton and blow-up solutions to the time-dependent Schrödinger-Hartree equation [J]. Discrete Contin Dyn Sys S, 2012, 5: 903.

[13] Feng B, Yuan B. On the Cauchy problem for the Schrödinger Hartree equation [J]. Evol Equat Control Theor, 2015, 4: 431.

[14] Glassey R T. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for Schrödinger nonlinear equation [J]. Math Phys, 1977, 9: 1794.

[15] Alharbi M G, Saanouni T. Sharp threshold of global well-posedness vs finite time blow up for a class of inhomogeneous Choquard equations [J]. J Math Phys, 2019, 60: 081514.

[16] Lushnikov P. Dynamic criterion for collapse [J]. JETP Lett, 1995, 62: 447.

[17] 梁冬冬. 无限维空间上的波方程和 Schrödinger 方程解的存在和唯一性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：011003.

[18] Weinstein M I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates [J]. Comm Math Phys, 1983, 4: 567.

[19] Duyckaerts T, Roudenko S. Going beyond the threshold: scattering and blow-up in the focusing NLS equation [J]. Commun Math Phys, 2015, 334: 1573.

[20] Zakharov V E. Collapse of Langmuir Waves [J]. Sov Phys JETP, 1972, 35: 908.

[21] 陈波涛. 一类非线性波动方程组的爆破性质[J]. 四川大学学报：自然科学版，2011，48：505.

引用本文格式：

中　文：何巧玲，黄娟. 一类非齐次 Choquard 方程的解整体存在与爆破的条件[J]. 四川大学学报：自然科学版，2022，59：031005.

英　文：He Q L, Huang J. Global existence and blowup conditionsfor the solutions of an inhomogeneous Choquard equation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 031005.