一类非线性四阶离散边值问题正解的存在性

赵亚丽，陈天兰
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了非线性四阶差分方程边值问题

$$\begin{cases}\Delta^4 u(t-2)+f(u(t))=0, t\in T_2=\{2,3,\cdots,T-1\},\\ u(0)=\Delta u(0)=\Delta u(T)=\Delta^2 u(0)=0\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $T\geqslant 4$ 为固定的正整数，$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续. 主要结果的证明基于 Leray-Schauder 不动点定理.

关键词：四阶差分方程；格林函数；Leray-Schauder 不动点定理；正解
中图分类号：O175.7　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2023.031002

Existence of positive solutions for a class of fourth-order nonlinear discrete boundary value problems

ZHAO Ya-Li, *CHEN Tian-Lan*
(School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of positive solutions for the nonlinear fourth-order difference equation boundary value problem

$$\begin{cases}\Delta^4 u(t-2)+f(u(t))=0, t\in T_2=\{2,3,\cdots,T-1\},\\ u(0)=\Delta u(0)=\Delta u(T)=\Delta^2 u(0)=0,\end{cases}$$

where $T\geqslant 4$ is a fixed positive integer, $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ is continuous. The proof of the main results is based on the Leray-Schauder fixed point theorem.

Keywords: Fourth-order difference equation; Green's function; Leray-Schauder fixed point theorem; Positive solution
(2010 MSC 34B15)

1 引　言

四阶非线性差分方程在生态学、经济学、人口动力学等领域有着广泛应用，其边值问题解的存在性广受关注[1-8]. 例如，弹性梁方程就是通过不同边界条件的四阶非线性常微分方程来刻画的. 近年来，对两端简单支撑以及一端简单支撑另一端滑动支撑的弹性梁方程的解的存在性已有大量研究[4-6].

本文的研究对象是边界条件为 $u(0)=u'(0)=u'(1)=u''(0)=0$ 的非线性四阶常微分方程. 这是一类与弹性梁方程类似的方程. 据我们所知，对其边值问题正解的存在性的研究比较少[9, 10]，对其离散形式解的存在性则从未被研究过. 这正是我

收稿日期：2022-03-23
基金项目：国家自然科学基金青年基金(11801453，11901464)；甘肃省青年科技基金(20JR10RA100，21JR1RA230)；甘肃省高等学校创新能力提升项目(2021A-006)
作者简介：赵亚丽(1997－)，女，甘肃定西人，硕士研究生，主要研究方向为差分方程及其应用. E-mail：zylZYL19970807@163.com
通讯作者：陈天兰. chentianlan511@126.com

们的研究目标. 令 $T\geqslant 4$ 为一整数. 记 $T_0=\{0,1,\cdots,T+1\}$, $T_1=\{1,2,\cdots,T\}$, $T_2=\{2,3,\cdots,T-1\}$. 我们将运用 Leray-Schauder 不动点定理来讨论四阶离散问题

$$\begin{cases}\Delta^4 u(t-2)+f(u(t))=0, t\in T_2 & (1)\\ u(0)=\Delta u(0)=\Delta u(T)=\Delta^2 u(0)=0 & (2)\end{cases}$$

正解的存在性,并讨论该问题所对应的线性问题 $\Delta^4 u(t-2)+h(t)=0$ 的格林函数的性质.

下面我们概述相关的一些研究. Lu 等[4]和 Ma 等[5]分别运用分歧法和锥上的不动点指数理论研究了两端简单支撑的非线性四阶离散问题

$$\begin{cases}\Delta^4 u(t-2)=\lambda f(u(t)), t\in T_3=\{2,3,\cdots,T\},\\ u(1)=u(T+1)=\Delta^2 u(0)=\Delta^2 u(T)=0\end{cases}$$

正解的存在性,其中 $\lambda>0$ 是参数, $f: T_3\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续,且 $T\geqslant 5$. He 等[6]运用锥上的不动点定理研究了一端简单支撑另一端滑动支撑的非线性四阶离散问题

$$\begin{cases}\Delta^4 u(t-2)-\lambda a(t)f(u(t))=0,\\ \quad t\in T_4=\{2,3,\cdots,T+2\},\\ u(0)=\Delta^2 u(0)=\Delta u(T+1)=\Delta^3 u(T-1)=0\end{cases}$$

正解的存在性,其中 λ 是特征值,权函数 a 非负, $f: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 连续,且 $T\geqslant 1$. 而 Benaicha 等[9]和 Haddouchi[10]则分别运用锥上的不动点定理和 Leray-Schauder 不动点定理研究了带积分边界条件的四阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases}u''''(t)+f(u(t))=0, t\in(0,1),\\ u'(0)=u'(1)=u''(0)=0,\\ \quad u(0)=\int_0^1 a(s)u(s)\mathrm{d}s\end{cases}$$

正解的存在性,其中 $a:[0,1]\to[0,\infty)$, $0<\int_0^1 a(s)\mathrm{d}s<1$, $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续.

受以上文献启发,本文通过建立适当的锥,利用 Leray-Schauder 不动点定理来研究问题正解的存在性,主要结果如下:

定理 1.1　设 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续,并假设以下条件之一成立:(i) $f_0=\lim\limits_{s\to 0+}\frac{f(s)}{s}=0$; (ii) $f_\infty=\lim\limits_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}=0$, 则问题(1)(2)至少存在一个正解.

2　预备知识

引理 2.1[11]　设 X 是 Banach 空间, $\Omega\subset X$ 是一个凸子集,且 $0\in\Omega$. 若 $A:\Omega\to\Omega$ 是一个全连续算子. 则下列结论之一成立:(i) A 在 Ω 中至少有一个不动点;(ii) 集合 $\{x\in\Omega: x=\lambda Ax, 0<\lambda<1\}$ 无界.

引理 2.2　设 $h: T_2\to\mathbf{R}$. 则线性边值问题

$$\begin{cases}\Delta^4 u(t-2)+h(t)=0, t\in T_2,\\ u(0)=\Delta u(0)=\Delta u(T)=\Delta^2 u(0)=0\end{cases} \tag{3}$$

的解等价于

$$u(t)=\sum_{s=2}^{T-1}G(t,s)h(s), t\in T_0 \tag{4}$$

其中

$$G(t,s)=\frac{1}{6T(T-1)}\begin{cases}t(t-1)(t-2)(T+1-s)(T-s),\\ \quad 1\leqslant t\leqslant s\leqslant T-1,\\ t(t-1)(t-2)(T+1-s)(T-s)-\\ \quad T(T-1)(t-s)(t-s-1)\\ \quad (t-s+1), 2\leqslant s\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

证明　设 u 满足式(3). 通过对(3)式中的方程进行和分运算,结合 $u(0)=\Delta u(0)=\Delta^2 u(0)=0$ 可得

$$u(t)=\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\Delta^3 u(0)-\sum_{s=2}^{t-1}\frac{(t-s)(t-s-1)(t-s+1)}{6}h(s) \tag{5}$$

代入边界条件 $\Delta u(t)=0$ 可得

$$u(T+1)=\frac{T(T-1)(T+1)}{6}\Delta^3 u(0)-\sum_{s=2}^{T}\frac{(T-s)(T+1-s)(T+2-s)}{6}h(s),$$

$$u(t)=\frac{T(T-1)(T-2)}{6}\Delta^3 u(0)-\sum_{s=2}^{T-1}\frac{(T-s)(T-1-s)(T+1-s)}{6}h(s).$$

进而解得

$$\Delta^3 u(0)=\sum_{s=2}^{T-1}\frac{(T-s)(T+1-s)}{T(T-1)}h(s) \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式中可得

$$u(t)=\frac{t(t-1)(t-2)}{6}\sum_{s=2}^{T-1}\frac{(T-s)(T+1-s)}{T(T-1)}h(s)-\sum_{s=2}^{t-1}\frac{(t-s)(t-s-1)(t-s+1)}{6}h(s)=$$
$$\sum_{s=2}^{t-1}\frac{t(t-1)(t-2)(T-s)(T+1-s)-T(T-1)(t-s)(t-s-1)(t-s+1)}{6T(T-1)}h(s)+$$
$$\sum_{s=t}^{T-1}\frac{t(t-1)(t-2)(T-s)(T+1-s)}{6T(T-1)}h(s).$$

因而 u 也满足式(4).

另一方面,容易验证式(4)满足式(3).证毕.

引理 2.3 格林函数 $G(t,s)$ 满足如下性质：(i) $G(t,s)\geqslant 0, s\in T_1, t\in T_1$；(ii) $\rho(t)\Phi(s)\leqslant G(t,s)\leqslant\Phi(s), s\in T_1, t\in T_1$，其中

$$\rho(t)=\min\left\{\frac{t(t-1)(t-2)}{T(T-1)^2(T-3)},\ \frac{(t-2)(T-t)(T-t+1)}{T(T-1)^3(T-3)}\right\},$$

$$\Phi(s)=\frac{s(T-2)(T+1-s)(T-s)}{12}.$$

证明　(i) 当 $1\leqslant t\leqslant s\leqslant T-1$ 时,显然有 $G(t,s)\geqslant 0$. 当 $2\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 时,我们分两种情况讨论.当 $t-s-1\leqslant 0$ 时,显然有 $G(t,s)\geqslant 0$;当 $t-s-1>0$ 时,即 $t>s+1$ 时,我们有

$$\begin{aligned}G(t,s)&=\frac{t(t-1)(t-2)(T+1-s)(T-s)-T(T-1)(t-s)(t-s-1)(t-s+1)}{6T(T-1)}>\\&\frac{(t-3)[t(t-1)(T+1-s)(T-s)-T(T-1)(t-s)(t-s+1)]}{6T(T-1)}=\\&\frac{(t-3)[(t^2-t)(T^2-2Ts+s^2+T-s)-(T^2-T)(t^2-2ts+s^2+t-s)]}{6T(T-1)}=\\&\frac{(t-3)[s^2(t^2-T^2)+s^2(T-t)+2stT(T-t)+s(T^2-t^2)+s(t-T)+2tT(t-T)]}{6T(T-1)}=\\&\frac{(t-3)(T-t)[s^2(1-T-t)+s(2tT+T+t-1)-2tT]}{6T(T-1)}=\\&\frac{(t-3)(s-1)(T-t)[2tT-s(T+t-1)]}{6T(T-1)}>\frac{(t-3)(s-1)(T-t)[2(s+1)T-sT-st+s]}{6T(T-1)}=\\&\frac{(t-3)(s-1)(T-t)[s(T-t)+2T+s]}{6T(T-1)}\geqslant 0\end{aligned}\tag{7}$$

故(i)成立.

(ii) 当 $1\leqslant t\leqslant s\leqslant T-1$ 时,有

$$\begin{aligned}G(t,s)&=\frac{t(t-1)(t-2)(T+1-s)(T-s)}{6T(T-1)}\leqslant\frac{s(s-1)(s-2)(T+1-s)(T-s)}{6T(T-1)}<\frac{s(T+1-s)(T-s)}{6}\leqslant\\&\frac{s(T+1-s)(T-s)}{6}\cdot\frac{T-2}{2}=\frac{s(T-2)(T+1-s)(T-s)}{12}.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}G(t,s)&=\frac{t(t-1)(t-2)(T+1-s)(T-s)}{6T(T-1)}\geqslant\frac{t(T-1)(t-2)(T+1-s)(T-s)}{6T(T-1)}\cdot\\&\frac{s}{T-1}\cdot\frac{T-2}{2(T-3)}=\frac{t(t-1)(t-2)s(T-2)(T+1-s)(T-s)}{12T(T-1)^2(T-3)}.\end{aligned}$$

当 $2\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 时,有

$$\begin{aligned}G(t,s)&=\frac{t(t-1)(t-2)(T+1-s)(T-s)-T(T-1)(t-s)(t-s-1)(t-s+1)}{6T(T-1)}\leqslant\\&\frac{t(t-1)(t-2)(T+1-s)(T-s)}{6T(T-1)}\leqslant\frac{(T-2)(T+1-s)(T-s)}{6}\leqslant\frac{s(T-2)(T+1-s)(T-s)}{12}.\end{aligned}$$

另一方面,类似(7)式的处理方法,有

$$\begin{aligned}G(t,s)&=\frac{t(t-1)(t-2)(T+1-s)(T-s)-T(T-1)(t-s)(t-s-1)(t-s+1)}{6T(T-1)}>\\&\frac{(t-2)[t(t-1)(T+1-s)(T-s)-T(T-1)(t-s)(t-s+1)]}{6T(T-1)}=\\&\frac{(t-2)(s-1)(T-t)[2tT-s(T+t-1)]}{6T(T-1)}\geqslant\frac{s(s-1)(t-2)(T-t)(T-t+1)}{6T(T-1)}\geqslant\\&\frac{s(t-2)(T-t)(T-t+1)}{6T(T-1)}>\frac{s(t-2)(T-t)(T-t+1)}{6T(T-1)}\cdot\frac{T-2}{2(T-3)}\cdot\frac{T+1-s}{T-1}\cdot\end{aligned}$$

$$\frac{T-s}{T-1}=\frac{(t-2)(T-t)(T-t+1)s(T-2)(T+1-s)(t-s)}{12T(T-1)^3(T-3)}.$$

故(ii)成立. 证毕.

引理 2.4　设 $h:T_2\to[0,\infty)$. 则问题(3)式的唯一解 u 非负,且满足 $\min\limits_{t\in T_2}u(t)\geqslant\rho\|u\|$, 其中 $\rho=\min\limits_{t\in T_2}\rho(t)$.

证明　由引理 2.2 和引理 2.3 可知 $u(t)$非负,且对任意 $t\in T_1$有

$$u(t)=\sum_{s=2}^{T-1}G(t,s)h(s)\leqslant \sum_{s=2}^{T-1}\left[\frac{s(T-2)(T+1-s)(T-s)}{12}\right]h(s)=\frac{(T-2)}{12}\sum_{s=2}^{T-1}[s(T+1-s)(T-s)]h(s).$$

进而有

$$\|u\|\leqslant\frac{(T-2)}{12}\sum_{s=2}^{T-1}[s(T+1-s)(T-s)]h(s).$$

另一方面,

$$u(t)=\sum_{s=2}^{T-1}G(t,s)h(s)\geqslant \sum_{s=2}^{T-1}\rho(t)\left[\frac{s(T-2)(T+1-s)(T-s)}{12}\right]h(s)=\rho(t)\frac{(T-2)}{12}\sum_{s=2}^{T-1}[s(T+1-s)(T-s)]h(s)\geqslant \rho(t)\|u\|\geqslant\rho\|u\|.$$

故 $\min\limits_{t\in T_2}u(t)\geqslant\rho\|u\|$. 证毕.

下面我们引入本文使用的空间. 定义空间

$$E=\{u:T_0\to\mathbf{R}\,|\,u(0)=\Delta u(0)=\Delta u(T)=\Delta^2u(0)=0\},$$

其在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in T_0}|u(t)|$ 下构成 Banach 空间. 定义锥 $K\subset E$,

$$K=\{u\in E\,|\,u(t)\geqslant0,\min_{t\in T_2}u(t)\geqslant\rho\|u\|\}.$$

定义非线性算子 $A:E\to E$,

$$Au(t)=\sum_{s=2}^{T-1}G(t,s)f(u(s)),t\in T_0.$$

依据引理 2.2,我们很容易得到如下结论:

引理 2.5　若 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续,则 $u(t)$是问题(1)-(2)的正解当且仅当 $Au=u$.

引理 2.6　若 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$连续,则算子 $A:K\to K$ 全连续且 $A(K)\subset K$.

证明　由引理 2.4 可知,$A(K)\subset K$. 又因 E 为有限维空间,结合 f 的连续性易证 $A:K\to K$ 是全连续的. 证毕.

3　主要结果的证明

(i) 因为 $f_0=0$,则对任意 $0<\varepsilon\leqslant\dfrac{1}{\sum\limits_{s=2}^{T-1}g(s)}$ 可取$R_1>0$,使得当 $0<u\leqslant R_1$时有 $f(u)\leqslant\varepsilon u$. 记 $\Omega=\{u\in K:\|u\|\leqslant R_1\}$. 则 Ω 是 E 中的闭凸子集. 若 $u\in\Omega$,则对任意 $t\in T_1$,由引理 2.3 和引理 2.4 可得

$$Au(t)=\sum_{s=2}^{T-1}G(t,s)f(u(s))\leqslant \sum_{s=2}^{T-1}\left[\frac{s(T-2)(T+1-s)(T-s)}{12}\right]f(u(s))=\sum_{s=2}^{T-1}g(s)f(u(s))\tag{8}$$

其中 $g(s)=\dfrac{(T-2)}{12}[s(T+1-s)(T-s)]$. 故

$$\|Au\|\leqslant\sum_{s=2}^{T-1}g(s)f(u(s))\tag{9}$$

由引理 2.4 和(9)式可知 $Au(t)\geqslant0$,且对任意 $t\in T_2$有

$$Au(t)=\sum_{s=2}^{T-1}G(t,s)f(u(s))\geqslant \sum_{s=2}^{T-1}\rho(t)\left[\frac{s(T-2)(T+1-s)(T-s)}{12}\right]f(u(s))=\rho(t)\sum_{s=2}^{T-1}g(s)f(u(s))\geqslant\rho\|Au\|.$$

因此,$\min\limits_{t\in T_2}Au(t)\geqslant\rho\|Au\|$. 另一方面,由(8)式可得

$$Au(t)\leqslant\sum_{s=2}^{T-1}g(s)f(u(s))\leqslant\varepsilon\|u\|\sum_{s=2}^{T-1}g(s)\leqslant\|u\|\leqslant R_1.$$

因此 $\|Au\|\leqslant R_1$. 则 $A(\Omega)\subset\Omega$. 由 Arzelà-Ascoli 定理可知 $A:\Omega\to\Omega$ 是全连续的. 令

$$\omega=\{u\in\Omega:u=\lambda Au,0<\lambda<1\}\tag{10}$$

对任意 $u\in\omega$,有 $u(t)=\lambda Au(t)<Au(t)\leqslant R_1$. 因此 $\|u\|\leqslant R_1$,即集合 ω 有界. 由引理 2.1 可知 A 在 Ω 中至少有一个不动点,故问题(1)-(2)至少存在一个正解.

(ii) 我们分两种情况讨论. 若 f 有界,即存在 $N>0$,使得 $f(u)\leqslant N,u\in[0,\infty)$. 对任意 $u\in K$,有 $Au\in K$ 且 $A:\Omega\to\Omega$ 是全连续的. 由(8)式可得

$$Au(t) \leqslant \sum_{s=2}^{T-1} g(s) f(u(s)) \leqslant N \sum_{s=2}^{T-1} g(s).$$

因此 $\|Au\| \leqslant N \sum_{s=2}^{T-1} g(s)$. 集合 ω 的定义同式(10). 对任意 $u \in \omega$,有

$$u(t) = \lambda Au(t) < Au(t) \leqslant N \sum_{s=2}^{T-1} g(s).$$

因此 $\|u\| \leqslant N \sum_{s=2}^{T-1} g(s)$,即集合 ω 有界. 由引理 2.1 可知 A 在 Ω 中至少有一个不动点,故问题(1)(2)至少存在一个正解.

若 f 无界,则因 $f_{\infty} = 0$,对任意 $0 < \eta \leqslant \dfrac{1}{\sum_{s=2}^{T-1} g(s)}$ 存在$R_2 > 0$,使得当 $u > R_2$ 时有 $f(u) \leqslant \eta u$. 由 f 连续性可知,存在 $\alpha > 0$,使得当 $0 \leqslant u \leqslant R_2$ 时有 $f(u) \leqslant \eta\alpha$. 记 $\Omega = \{u \in K: \|u\| \leqslant R\}$,其中 $R = \max\{\alpha, R_2\}$. 若 $u \in \Omega$,则 $f(u) \leqslant \eta R$. 由(8)式可得

$$Au(t) \leqslant \sum_{s=2}^{T-1} g(s) f(u(s)) \leqslant \eta R \sum_{s=2}^{T-1} g(s) \leqslant R.$$

因此$\|Au\| \leqslant R$. 集合 ω 的定义同式(10). 对任意 $u \in \omega$,有 $u(t) = \lambda Au(t) < Au(t) \leqslant R$. 因此$\|u\| \leqslant R$,即集合 ω 有界. 由引理 2.1 可知 A 在 Ω 中至少有一个不动点,故问题(1)(2)至少存在一个正解. 证毕.

4 结　论

我们通过研究问题(1)(2)的线性化问题(3)的格林函数,运用 Leray-Schauder 不动点定理证明问题至少存在一个正解,从而为差分方程边值问题正解的存在性提供了一个新思路.

在从实际问题抽象出来的数学方程中,单个因素对系统平衡态的影响一般作为参数进行研究. 我们期望在以后的研究中考虑满足边界条件(2)的含参数的四阶离散边值问题正解的存在性,以及正解存在时的最优参数区间.

参考文献:

[1] Chen T L, Ma R Y, Liang Y W. Multiple positive solutions of second-order nonlinear difference equations with discrete singular φ-Laplacian [J]. J Differ Equ Appl, 2019, 25: 38.

[2] Ma R Y. Nonlinear discrete Sturm-Liouville problems at resonance [J]. Nonlinear Anal: Theor, 2007, 67: 3050.

[3] Graef J R, Heidarkhani S, Kong L J, *et al*. Existence of solutions to a discrete fourth order boundary value problem [J]. J Differ Equ Appl, 2018, 24: 849.

[4] Lu Y Q, Ma R Y. The continuum branch of positive solutions for discrete simply supported beam equation with local linear growth condition [J]. Bound Value Probl, 2018, 2018: 192.

[5] Ma R Y, Xu Y J. Existence of positive solution for nonlinear fourth-order difference equations [J]. Comput Math Appl, 2010, 59: 3770.

[6] He Z M, Yu J S. On the existence of positive solutions of fourth-order difference equations [J]. Appl Math Comput, 2005, 161: 139.

[7] Xu Y J, Gao C H, Ma R Y. Solvability of a nonlinear fourth-order discrete problem at resonance [J]. Appl Math Comput, 2010, 216: 662.

[8] Graef J R, Kong L J, Liu X Y. Existence of solutions to a discrete fourth order periodic boundary value problem [J]. J Differ Equ Appl, 2016, 22: 1167.

[9] Benaicha S, Haddouchi F. Positive solutions of a nonlinear fourth-order integral boundary value problem [J]. An Univ Vest Timis Ser Mat: Inform, 2016, 54: 73.

[10] Haddouchi F. A note on existence results for a nonlinear fourth-order integral boundary value problem [J]. Bul Acad Stiinte Repub Mold Mat, 2019, 91: 3.

[11] Granas A, Dugundji J. Fixed point theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

引用本文格式:

中　文:赵亚丽,陈天兰. 一类非线性四阶离散边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报:自然科学版,2023,60:031002.

英　文:Zhao Y L, Chen T L. Existence of positive solutions for a class of fourth-order nonlinear discrete boundary value problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2023, 60: 031002.