

多模微波加热腔电场剧变条件研究

唐正明^{1,2}, 黄卡玛¹

(1. 四川大学电子信息学院, 成都 610064; 2. 西华师范大学电子信息工程学院, 南充 637002)

摘要: 在多模腔中实现均匀加热较为困难但极其重要, 而电场的特性对能否实现均匀加热起决定性作用. 研究多模腔电场产生剧变的条件, 对于改善微波加热均匀性有积极意义. 本文从亥姆赫兹方程出发, 利用并矢格林函数, 得到了腔体内电场的积分方程; 然后, 通过此方程讨论并得到电场稳定性的主要影响因素和特点; 最后, 在运用有限元法验证多模腔电场特性的基础上, 进一步得到导致电场产生剧变的各参数的最小变化量.

关键词: 多模腔; 积分方程; 电场稳定性; 最小变化量

中图分类号: O441.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2016)06-1273-05

Study the condition of dramatic changes of electric field in multimode microwave heating cavity

TANG Zheng-Ming^{1,2}, HUANG Ka-Ma¹

(1. College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610064, China;

2. School of Electronics and Information Engineering, China West Normal University, Nanchong 637002, China)

Abstract: Heating uniformity is important but difficult to achieve, and it is highly dependent on the characteristics of electric field. Hence, it is significant to study the condition of dramatic changes of electric field in multimode cavity. In this paper, firstly, Helmholtz equation and dyadic Green's function are used to derive the integral equation. Then, by discussing the characteristics of the derived equation, the authors obtain the main factors and characteristics of its stability. Finally, the conclusion is verified by finite element method, and the smallest change of parameter that results in dramatic changes of electric field is presented.

Keywords: Multimode microwave heating; Integral equation; Electric field stability; The smallest change of parameters

1 引言

微波技术已广泛应用于人们生活的各个层面, 同时在科学研究和工业应用领域也发展迅猛. 尤其是在将其引入化学研究和化工生产后, 更是促进了一门新兴学科——微波化学的诞生^[1]. 对微波加热而言, 被加热物质在受热不均匀的情况下, 极易形

成热点, 直接影响到加热的效果和生产安全^[2]. 由微波加热原理可知, 腔体内电场的特性对能否实现均匀加热起决定性作用^[3]. 多模腔的典型特征是电场缺乏稳定性, 尽管人们对此已有一定的认识, 但从本质上所做研究甚少^[4-6]. Hill 用模式密度的方法讨论了频率和腔体尺寸变化对场的影响^[4]. 该分析方法近似程度较大, 且未涉及多模腔内物质介电

收稿日期: 2016-01-11

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2013CB328900, 2013CB328905); 西华师范大学创新团队项目(CXTD2014-12)

作者简介: 唐正明(1981-), 男, 四川安岳人, 副教授, 博士研究生, 研究方向为微波、电子信息. E-mail: tangzm@cwnu.edu.cn

通讯作者: 黄卡玛. E-mail: kmhuang@scu.edu.cn.

常数对场影响的讨论; Lu 等从数值计算的角度将腔内电场的不稳定, 归结为格林函数在谐振频率处的奇异性所致, 而未做进一步分析^[6]. 相对已有研究, 影响多模微波加热腔电场稳定性的因素更多. 加之微波频率本身存在波动^[7], 介电常数等在加热过程中也可能有所变化^[8], 而这些参量的变化均可引起电场的变化. 由于电场剧变(幅值突变且变化巨大), 无疑是导致微波加热过程中热点、热失控等问题的重要原因^[9]. 因此, 从原理上研究多模微波加热腔电场稳定性的影响因素, 尤其是在它们变化多大时将导致电场剧变, 对预防热失控, 提高生产安全性和加热的均匀性意义重大. 本文引入典型的多模微波加热腔结构, 利用矩形腔体并矢格林函数表征出了电场的积分方程, 通过积分方程的特性, 从本质上研究了腔内电场稳定性的影响因素和特点, 并给出了各参量在以一定步长变化过程中, 导致电场剧变时所对应的最小变化量.

2 腔体内电场分布的积分方程

分析时考虑如下结构: 矩形腔体底部中央放置一圆柱形介质, 其余部分为空气填充; 微波通过腔体侧壁中央的矩形波导(工作于 TE₁₀ 模) 馈入腔体内, 如图 1 所示. 设时谐场因子为 $e^{j\omega t}$, 角频率为 ω , 介质区域体积为 V_d , 空气介电常数和磁导率分别为 ϵ_0, μ_0 , 介质相对磁导率 $\mu_r = 1$. 为简化分析, 设腔体内物质的相对介电常数可表示为

$$\epsilon_r(r) = \begin{cases} \epsilon_r, & r \in V_d \\ 1, & r \notin V_d. \end{cases} \quad (1)$$

首先考虑空腔情况. 此时, 腔内电磁场满足麦克斯韦方程

$$\nabla \times E(r) = -j\omega\mu_0 H(r) - J_m \quad (2)$$

$$\nabla \times H(r) = j\omega\epsilon_0 E(r) + J_e \quad (3)$$

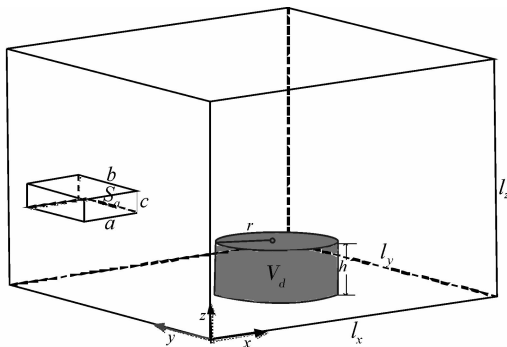


图 1 微波加热腔结构图

Fig. 1 Schematic of microwave heating cavity

其中, $E(r)$ 为腔体内的电场; J_e 和 J_m 分别为腔

体内电流、磁流密度. 式(2)两端取旋度, 并将式(3) 带入后, 得腔体内电场的赫姆霍兹方程

$$\nabla \times \nabla \times E(r) - k_0^2 E(r) = -j\omega\mu_0 J_e - \nabla \times J_m \quad (4)$$

式(4)中, $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 为自由空间波数. 由于腔体内电流密度 $J_e = 0$, 此时腔体内电场由矩形波导口处形成的等效面磁流激励产生^[10,11]. 利用矩形腔体电并矢格林函数, 电场积分方程可表示为^[10]

$$E^{inc}(r) = \iint_{S_a} [E_{10r} \cdot \nabla \times \bar{G}_e(r, r')] dS_a \quad (5)$$

其中, S_a 为波导口面积; E_{10r} 为矩形波导 TE₁₀ 模在波导口处产生的切向场; $\bar{G}_e(r, r')$ 为矩形腔电并矢格林函数^[11]; r 和 r' 分别代表场点和源点. 在此基础上, 考虑加入介质后, 介质极化所产生的散射场. 由于极化电流

$$J = j\omega\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E(r) \quad (6)$$

参照文献[12]中的方法, 将腔体总电场表示为散射场和 TE₁₀ 模激励下空腔电场之和, 即

$$E(r) - k_0^2 (\epsilon_r - 1) \int_{V_d} \bar{G}_e(r, r') \cdot E(r') dr' = E^{inc}(r) \quad (7)$$

其中, V_d 表示对整个介质区域体积分; k_0 为自由空间波数. 方程(7)对应的算子方程为

$$(I - \lambda L) E(r) = E^{inc}(r) \quad (8)$$

易见腔体电场分布在形式上满足第二类 Fredholm 积分方程^[13]. 其中, $\lambda = k_0^2 (\epsilon_r - 1)$ 为积分方程系数; I 为单位算子; 积分算子 $L = \int_{V_d} \bar{G}_e(r, r') dr'$.

3 腔体内电场的稳定性

由于积分方程描述了电场的分布特性, 讨论方程的性质, 即可得到腔体内电场稳定性的影响因素和特点. 将式(8)两端同时除以 $-\lambda$ 得

$$(L - \tau I) E(r) = \tau E^{inc}(r) \quad (9)$$

其中, 积分方程系数 $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{k_0^2 (\epsilon_r - 1)}$. 该算子方程对应的特征方程为

$$(L - \lambda_n) E_n(r) = 0 \quad (10)$$

其中, λ_n 为算子特征值; $E_n(r)$ 为对应的特征向量.

现考查积分方程系数 τ . 假定被加热物质损耗极小且可忽略不计, 取相对介电常数 $\epsilon_r = 10$, 微波频率为 2.45 GHz, 则所对应的 τ 为 4.2161×10^{-5} . 由于在 τ 相对于特征值 λ_n (趋于 0) 极小或接近的

情况下, 第二类 Fredholm 积分方程性态将变差^[14-16]. 特别是, 对于多模微波加热腔, 电场在一个近乎理想封闭的有限区域内驻波分布极不稳定. 由于腔体格林函数所引入的这种边界特性, 使得形式上的第二类 Fredholm 积分方程将表现出第一类 Fredholm 积分方程的病态特性. 即, 在此条件下, 原积分方程(7)将退化为

$$\int_{V_d} \bar{G}_e(r, r') \cdot E(r') dr' = f[E^{inc}(r)] \quad (11)$$

在该方程中 $E(r')$ 是未知待求量, 而方程右端为关于入射电场的函数, 是已知量. 该积分方程的求解, 是典型的逆问题, 对积分算子的求逆时, 待求量对方程的输入端的微小变化或者引入的误差极其敏感^[17-19]. 因此, 方程(11)右端的微小的变化, 将导致其左端未知电场 $E(r')$ 巨大变化.

上述分析表明, 多模微波加热腔内电场积分方程, 可由良态的第二类 Fredholm 积分方程, 退化为病态的第一类 Fredholm 方程, 且方程的退化与否, 由积分方程系数 τ 确定: 足够大的 τ 可使算子接近于 0 的特征值远离 0, 从而使得积分方程维持良态, 反之, 方程病态. 值得注意的是, 尽管在加热的过程中 τ 也会随着微波频率等参量变化, 但是由于,

$$\frac{d\tau}{d\epsilon_r} = -\frac{1}{k_0^2(\epsilon_r - 1)^2} \quad (12)$$

$$\frac{d\tau}{df} = -\frac{1}{2\pi^2 f^3 \mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)} \quad (13)$$

因此, 尽管微波频率等参量的微小变化对电场影响巨大, 但是系数 τ 受其影响变化极其缓慢, 电场方程在退化为第一类 Fredholm 积分方程后, 将相对稳定地维持该类方程的性态. 同时, 由于对多模腔体而言, 腔体几何参数和微波频率为相关量. 故, 整个分析过程表明, 在微波频率、被加热物质介电常数或腔体几何参数的微小变化下, 多模微波加热腔的电场分布, 将发生巨大变化, 从而表现出较强的不稳定性. 此外, 由方程(7)可知, 腔体与被加热物质的体积比对上述结论存在影响. 如, 在被加热物质大小相对腔体过于小的情况下, 被加热物质介电常数的微小变化对腔体内电场的稳定性影响不大.

图 2~图 4 为按照图 1 建模 ($l_x \times l_y \times l_z = 267 \times 270 \times 188$, $a \times b \times c = 50 \times 78 \times 18$, $r = 25$, $h = 35$ 单位: mm; 取介质相对介电常数 $\epsilon_r = 10 - j * 0.1$, 微波频率 2.45 GHz, 微波输入功率 1 w), 利用有限元法 (FEM) 计算所得的腔体内电场分布.

因篇幅所限, 仅给出了介电常数微变的情况, 而微波频率和腔体几何参数的影响则通过稳定性量化 (如表 1) 予以补充说明, 同时腔体几何参数变化以 l_x 变化为例. 结果表明, 在微波频率和腔体几何参数仅 $\pm 1\%$ 的变化下, 多模腔内电场分布产生了巨大变化. 同时, 由图 2, 图 3 以及图 4 的对比, 可看出 ϵ_r 微小变化对腔体内电场分布的影响: 当被加热物质体积相对腔体较小时, ϵ_r 微小变化对场分布影响不大, 而当被加热物质体积增大后 ($r = 50$, $h = 70$), ϵ_r 微小变化对电场分布影响也变得较为显著.

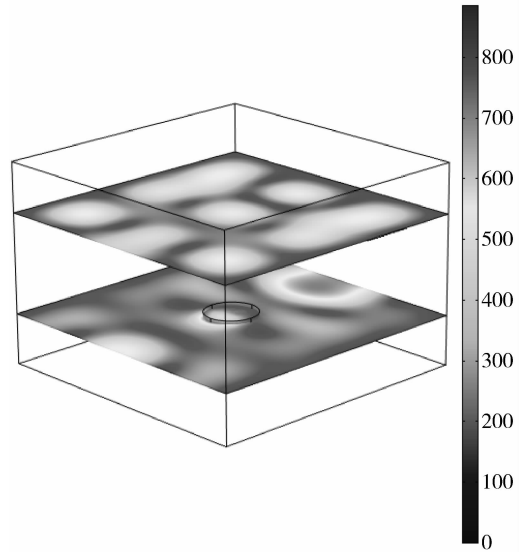
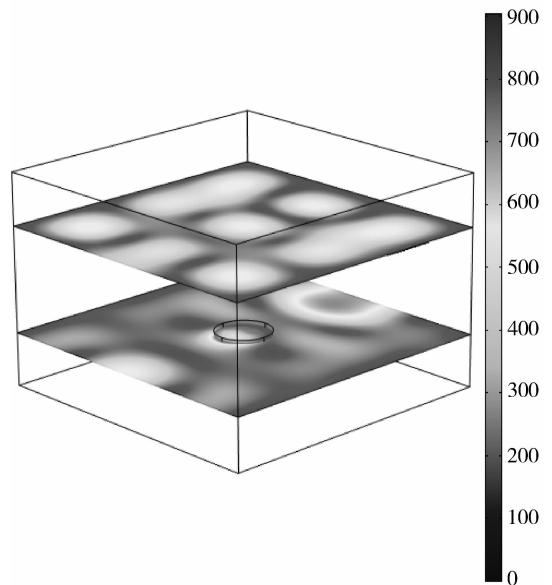
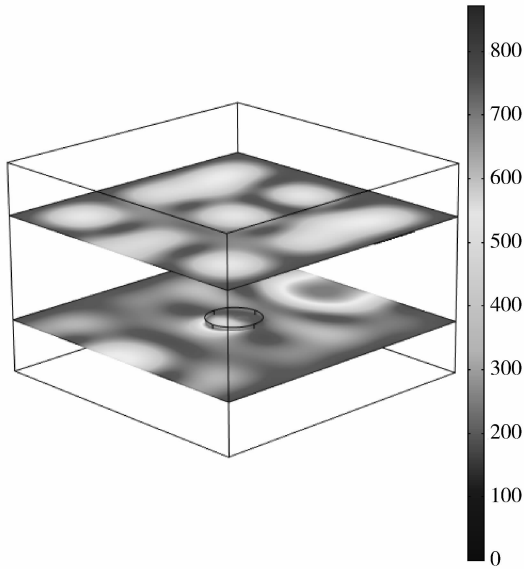


图 2 参数变化前电场模值分布图
Fig. 2 Distribution of electric field before the shift of parameters

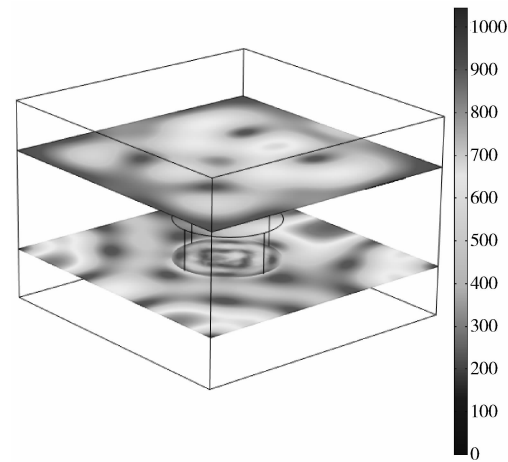


(a) 1% decrease in ϵ_r

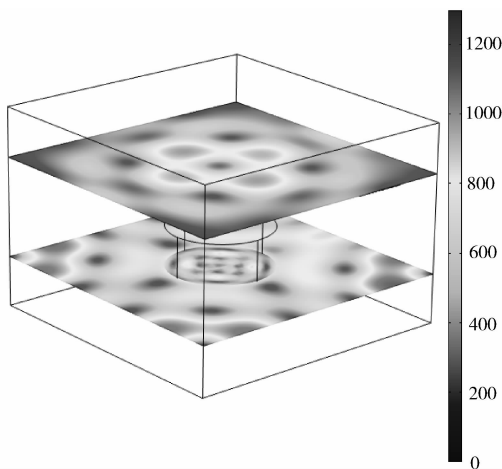


(b) 1% increase in ϵ_r

图 3 介电常数微小变化后的电场模值分布图
Fig. 3 Distribution of electric field after the shift of ϵ_r



(a) 1% decrease in ϵ_r



(b) 1% increase in ϵ_r

图 4 腔体电场模值分布图(介质体积为原来的 8 倍)
Fig. 4 Distribution of electric field

4 导致电场剧变的参数最小变化量

由于腔体内场分布的变化不同于单个点电场的变化. 为衡量电场稳定性, 同时定量研究使得电场产生剧变所对应的参数最小变化量, 定义电场平均变化率

$$V_{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{E_i - E_{i0}}{E_{i0}} \right| \quad (14)$$

其中, n 为样本点数; E_{i0} 和 E_i 分别为参数变化前与变化后单点所对应的电场模值. 显然, 若 V_{av} 较小则说明参数变化前后电场变化较小, 即相对稳定; 反之, 则说明电场变化巨大. 表 1 给出了微波频率、介电常数和腔体几何参数仅变化 1% 时腔体电场的平均变化率 (V_{av-} 和 V_{av+} 分别对应参数 P 减小 1% 和增大 1%). 从该表同样可以看出, 微波频率和腔体几何尺寸微小变化, 引起了电场分布的巨大变化, 而介电常数的微小变化尽管也使场分布有较大变化, 当相对前两者的影响较小.

表 1 参数仅变化 1% 时所对应的电场稳定性

Tab. 1 Results of S^2 because of only 1% shift of related parameters

参数 P	V_{av-}	V_{av+}
f	58.16%	126.17%
ϵ_r	7.09%	5.46%
l_x	493.88%	34.65%

现在假定 S^2 小于最小稳定值 S_{li}^2 时, 腔体内电场变化较小, 反之, 则表明因参数 P 的微小变化所导致得场分布变化较大. 通过 S^2 反向搜索, 即可得到导致电场剧变的微波频率、介电常数或腔体几何尺寸微变的变化量. 如, 由图 2 (a)、图 3 (b) 结合表 1 可知, 当 $V_{av} < 5.46\%$ 时, 电场分布的变化已不显著. 故此处假设最小稳定值 $V_{av} = 5\%$, 同时设 $\pm 10\%$ 为 V_{av} 变化的富裕度. 在参数变化步长为 $p/80000$ 时, 确定出各个参数所对应的最小变化量如表 2 所示.

表 2 导致电场剧变的参数最小变化量

Tab. 2 The smallest change of relative parameters

参数 P	P_-	P_+	V_{av}
f	$f * (1 - 1/3200)$	$f * (1 + 3/8000)$	5.42%; 5.21%
ϵ_r	$\epsilon_r * (1 - 3/400)$	$\epsilon_r * (1 + 1/100)$	5.12%; 5.46%
l_x	$l_x * (1 - 19/4000)$	$l_x * (1 + 9/16000)$	5.09%; 4.59%

5 结 论

建立了多模微波加热腔电场积分方程,通过推演得出了原本形式上为第二类 Fredholm 积分方程的场方程,在微波加热应用下将退化为第一类 Fredholm 积分方程.从而,根据退化条件和第一类 Fredholm 积分方程解的特性,得出了腔体内电场稳定性的主要影响因素和特点,并进一步给出了导致电场剧变的微波频率、介电常数或腔体几何参数所对应的最小变化量.本文分析过程基于严格的物理原理和数学理论,有助于从更深层次理解并掌握多模微波加热腔电场特性,为防止热点、热失控的产生和实现均匀加热奠定理论基础.

参考文献:

- [1] 金钦汉,戴树珊,黄卡玛.微波化学[M].北京:科学出版社,1999.
- [2] Wu X, Thomas Jr J R, Davis W A. Control of thermal runaway in microwave resonant cavities [J]. J Appl Phys, 2002, 92(6): 3374.
- [3] Osepchuk J M. A history of microwave heating applications [J]. IEEE Trans Microw Theory, 1984, 32(9): 1200.
- [4] Hill D A. Electromagnetic fields in cavities: deterministic and statistical theories [M]. USA: John Wiley & Sons, 2009.
- [5] 刘逸飞,陈永光,程二威,等.频率搅拌嵌套混响室场分布的统计特性[J].强激光与粒子束,2014, 26(2): 219.
- [6] Lu M, Bredow J W, Jung S, *et al.* Evaluation of Green's functions of rectangular cavities around resonant frequencies in the method of moments [J]. IEEE Antenn Wirel Pr, 2009, 8: 204.
- [7] 张文聪,黄卡玛.考虑磁控管不稳定性的微波德拜介质加热[J].四川大学学报:自然科学版,2014, 51(5): 983.
- [8] Torres F, Jecko B. Complete FDTD analysis of microwave heating processes in frequency-dependent and temperature-dependent media[J]. IEEE Trans Microw Theory, 1997, 45(1): 108.
- [9] Geedipalli S S R, Rakesh V, Datta A K. Modeling the heating uniformity contributed by a rotating turntable in microwave ovens [J]. J Food Eng, 2007, 82(3): 359.
- [10] Collin RE. Field theory of guide waves [M]. 2nd ed. New York: IEEE, 1991.
- [11] Tai C T, Rozenfeld P. Different representations of dyadic Green's functions for a rectangular cavity [J]. IEEE Trans Microw Theory, 1976, 24: 597.
- [12] Alessandri F, Chiodetti M, Giugliarelli A, *et al.* The electric-field integral-equation method for the analysis and design of a class of rectangular cavity filters loaded by dielectric and metallic cylindrical pucks [J]. IEEE Trans Microw Theory, 2004, 52(8): 1790.
- [13] Laurita C, Mastroianni G. Condition numbers in numerical methods for Fredholm integral equations of the second kind [J]. J Integral Equ Appl, 2002, 14(3): 311.
- [14] Rainer Kress. Linear integral equations [M]. 3rd ed. New York: Springer, 2013.
- [15] Budko N V, Samokhin A B. Spectrum of the volume integral operator of electromagnetic scattering [J]. SIAM J Sci Comput, 2006, 28(2): 682.
- [16] Press W H. Numerical recipes: The art of scientific computing [M]. 3rd ed. UK: Cambridge university press, 2007.
- [17] Phillips D L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind [J]. J ACM, 1962, 9(1): 84.
- [18] Du H, Cui M. Representation of the exact solution and a stability analysis on the Fredholm integral equation of the first kind in reproducing kernel space [J]. Appl Math Comput, 2006, 182(2): 1608.
- [19] Kabanikhin S I. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems [J]. J Inver Ill-Posed Problems, 2008, 16(4): 317.