

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.02.015

分抗的 F 特征逼近性能分析原理与应用

余波¹, 何秋燕², 袁晓², 杨丽贤³

(1. 成都师范学院物理与工程技术学院, 成都 611130; 2. 四川大学电子信息学院, 成都 610065;
3. 四川大学出版社有限责任公司, 成都 610065)

摘要: F 特征函数是描述分抗逼近电路集总特征值的新概念. 为全面定量分析与表征分抗逼近电路的 F 特征逼近性能, 在 F 特征函数基础上, 提出 F 特征逼近性能分析的相对误差、精度、带宽、带宽指数、K 线斜率图、F 指标和逼近效益等一系列概念及相应的数学函数. 并将其应用到 Oldham 分形链分抗逼近电路的 F 特征逼近性能分析, 以证明其有效性.

关键词: 分数微积分; 分数阶系统; 运算特征; 误差与精度

中图分类号: TN60 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2018)02-0301-06

Approximation performance analyses and applications of F characteristics in fractance approximation circuit

YU Bo¹, HE Qiu-Yan², YUAN Xiao², YANG Li-Xian³

(1. College of Physics and Engineering, Chengdu Normal University, Chengdu 611130, China;
2. College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China;
3. Sichuan University Press Limited Liability Company, Chengdu 610065, China)

Abstract: F-frequency characteristics function is a new concept about lumped characteristics quantity of the fractance approximation circuit. In order to quantitatively describe the approximation performance of F-frequency characteristic of the fractance approximation circuit, a series of concepts and corresponding mathematical functions about approximation performance analyses of F-frequency characteristic are proposed in this paper based on F-frequency characteristic function, including relative error, approximation accuracy, approximation bandwidth, approximation bandwidth exponent, K-diagram, F-index, approximation benefit, etc. And these concepts are used to analyze the Oldham fractal fractance approximation circuit to verify its effectiveness.

Keywords: Fractional calculus; Fractional-order system; Fractal fractance; Operational characteristic; Error and accuracy

1 引言

分抗 (Fractance) 是分数阶阻抗的简称^[1-3], 越来越广泛的应用在混沌电路^[4]、控制系统^[5]、神经网络^[6]、构造新器件^[7] 以及实现对信号的分数阶微积分运算^[8] 等方面. 分抗元 (Fractor) 是一种新的

二端电路元件. 使用分抗, 再结合运算放大器、OTA 等有源器件, 就可以实现具有分数阶微分、积分运算功能的电路与系统——分数阶电路与系统^[1,3,9].

理想分抗元 (ideal fractor), 电路符号如图 1 所示, 其阻抗函数

收稿日期: 2016-12-07

基金项目: 成都师范学院科研资助项目 (CS16ZC01)

作者简介: 余波 (1988-), 男, 四川宜宾人, 硕士, 讲师, 研究方向为分数阶电路与系统. E-mail: analogyb@foxmail.com

通讯作者: 杨丽贤. E-mail: 958559103@qq.com

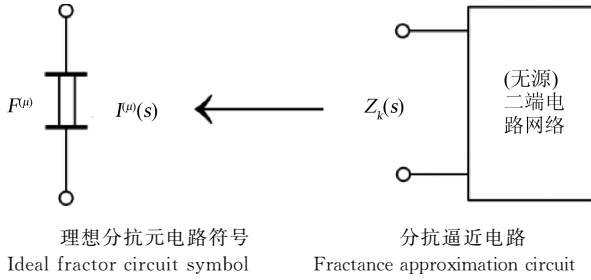
$$I^{(\mu)}(s) = F^{(\mu)} s^\mu (0 < |\mu| < 1, \mu \in \mathbf{Q}), \quad (1)$$

其中, s 为拉普拉斯变量, 亦称运算变量; $F^{(\mu)}$ 是与 s 无关的集总特征量. 阻抗函数 $I^{(\mu)}(s)$ 是一个无理函数. 理想的分抗还不存在, 人们通常的做法是使用无源二端网络(如图 1 所示)——分抗逼近电路, 在一定频率范围内实现分抗的分数阶微积分运算性能. 即构造一个收敛的有理阻抗函数序列^[1,10]

$$Z_k(s) = \frac{N_k(s)}{D_k(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_k} \beta_{ki} s^i}{\sum_{i=0}^{d_k} \alpha_{ki} s^i} (k = N) \quad (2)$$

使其极限阻抗 $Z(s)$ 在一定频率范围逼近理想分抗.

$$Z(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k(s) \xrightarrow{\text{附加条件}} I^{(\mu)}(s) \quad (3)$$



理想分抗元电路符号
Ideal fractor circuit symbol
分抗逼近电路
Fractance approximation circuit
图 1 理想分抗元与分抗逼近电路

Fig. 1 Ideal fractor and fractance approximation circuit

为定量分析阻抗函数序列 $Z_k(s)$ 的运算性能与逼近性能, 文献[1]在幅频特征函数(令 $s = j\Omega = j2\pi \cdot 10^{\varpi}, \varpi = \lg(\Omega/(2\pi))$ 称为频率指数变量, $\varpi \in \mathbf{R}$),

$$\Lambda_k(\varpi) = \lg |Z_k(j2\pi \cdot 10^{\varpi})| (\varpi \in \mathbf{R}) \quad (4)$$

与相频特征函数

$$\theta_k(\varpi) = \text{Arg} \{Z_k(j2\pi \cdot 10^{\varpi})\} (\varpi \in \mathbf{R}) \quad (5)$$

之上, 引入阶频特征函数

$$\mu_k(\varpi) = \frac{d\Lambda_k(\varpi)}{d\varpi} (\varpi \in \mathbf{R}) \quad (6)$$

表征与刻画分抗逼近电路的运算阶(数).

为在频域定量分析分抗逼近电路的集总特征值 $F^{(\mu)}$, 根据幅频特征 $\Lambda_k(\varpi)$ 与阶频特征 $\mu_k(\varpi)$, 文献[11]提出新的 F 特征函数:

$$F_k(\varpi) = \frac{|Z_k(j2\pi \cdot 10^{\varpi})|}{|2\pi \cdot 10^{\varpi}|^{\mu_k(\varpi)}} \quad (7a)$$

或

$$\begin{aligned} \Gamma_k(\varpi) &= \lg F_k(j2\pi \cdot 10^{\varpi}) \\ &= \Lambda_k(\varpi) - \mu_k(\varpi)[\varpi + \lg(2\pi)] (\varpi \in \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (7b)$$

F 特征函数满足了分抗逼近电路设计、理论分

析的实际需求, 特别是实验测试的需要^[12,13].

为定量对比分析众多不同形式的分抗逼近电路的性能, 文献[1]以相频特征、阶频特征为基础, 提出分抗逼近电路的频域性能分析的一般数学原理及方法、性能指标与流程, 并在 Roy 分形链分抗、Oustaloup 分抗有理逼近、Oldham 分形链分抗等的逼近性能分析中得到有效的应用^[14-16].

理想分抗元的阻抗函数 $I^{(\mu)}(s)$ 完全由集总特征常量 $F^{(\mu)}$ 与运算阶 μ 所确定, 因此分抗逼近电路的 F 特征逼近性能与相频特征、阶频特征逼近性能同样重要.

2 分抗逼近电路的 F 特征逼近性能分析原理

本节提出分抗逼近电路的 F 特征逼近性能分析原理, 并应用到经典的负半阶 Oldham I 型与 I 型分形链分抗逼近电路(如图 2)^[1,17-20].

2.1 Oldham 分形链的运算特征

Oldham I 型分形链分抗电路(如图 2(a))的输入阻抗函数序列的迭代算法公式为

$$Z_k(s) = R + \frac{1}{Cs + 1/Z_{k-1}(s)} (k \in \mathbf{N}^+), \quad (8)$$

其极限阻抗(令 $\Omega_0 = 1/(RC)$, 称之为特征频率)

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k(s) = \frac{R}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\Omega_0}{s}} \right) \\ &\xrightarrow{|s| \rightarrow 0} \sqrt{\frac{R}{C}} s^{-1/2} \end{aligned} \quad (9)$$

改进的 I 型电路(图 2(b))^[1]的阻抗函数 $\bar{Z}_k(s)$ 与极限阻抗 $\bar{Z}_1(s)$ 分别是

$$\bar{Z}_k(s) = Z_k(s) - \frac{1}{2}R (k \in \mathbf{N}^+), \quad (10)$$

$$\bar{Z}_1(s) = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \frac{4\Omega_0}{s}} \xrightarrow{|s| \rightarrow 0} \sqrt{\frac{R}{C}} s^{-1/2}. \quad (11)$$

从式(8)~式(11)可知, I 型与 I 型都是低频有效的 RC 网络. 它们在低频段($0 < \Omega < \Omega_0$)逼近特征值

$$F^{(-1/2)} \approx \sqrt{R/C} \quad (12)$$

的理想负半阶分抗.

Oldham I 型分形链分抗逼近电路的阶频特征与 F 特征函数曲线如图 3(a)和(b)所示. 从 F 特征函数曲线 $\Gamma_k(\varpi)$ 可知, 在特征频率点的低频段逼近分抗特征值 $F^{(-1/2)}$. 本文分析 Oldham 分形链分抗逼近电路向特征频率点的低频逼近理想分抗特征值 $F^{(-1/2)}$ (如式(12))的性能.

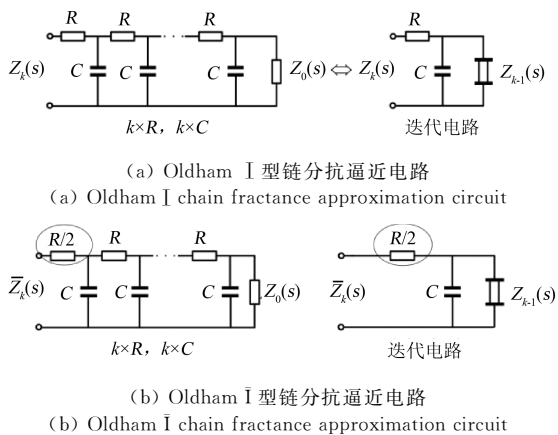


图 2 k 级 Oldham 链分抗逼近电路

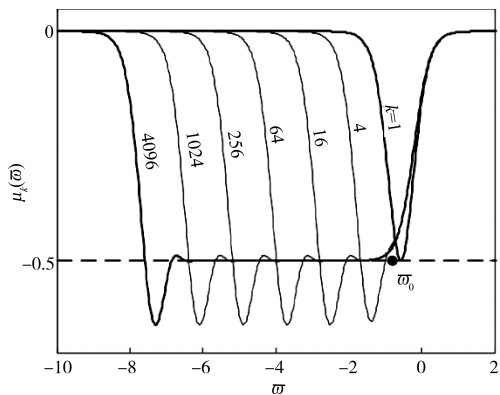
2.2 F 特征的相对误差

分抗逼近电路的 F 特征逼近误差函数

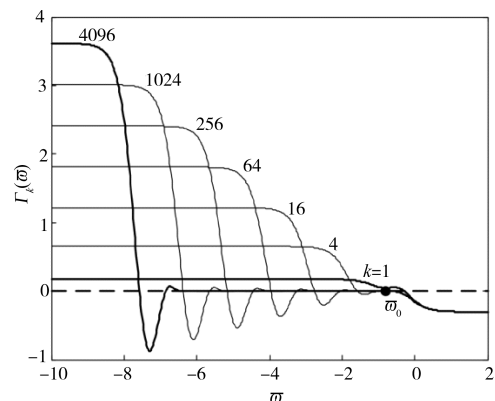
$$\epsilon_{Fk}(\omega) = \left| \sqrt{R/C} - 10^{\Gamma_k(\omega)} \right| \quad (\omega \in \mathbf{R}) \quad (13)$$

误差函数 $\epsilon_{Fk}(\omega)$ 反映分抗 F 特征逼近程度. 为定量表示 F 特征逼近程度, 定义分抗逼近电路的 F 特征相对误差

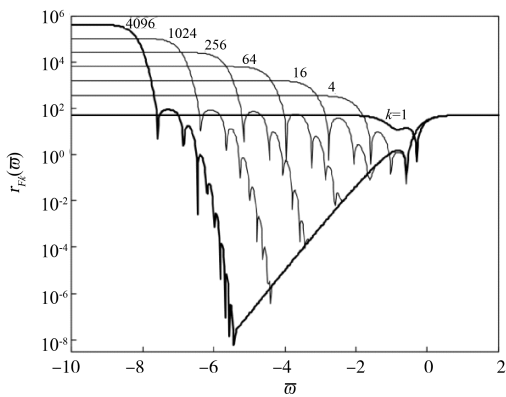
$$r_{Fk}(\omega) = \left| 1 - \frac{10^{\Gamma_k(\omega)}}{\sqrt{R/C}} \right| \times 100\%. \quad (14)$$



(a) 阶频特征
(a) Order-frequency characteristic



(b) F 特征
(b) F characteristic



(c) F 特征的相对误差
(c) Relative error of F characteristic

图 3 Oldham I 型链分抗逼近电路: $R = 1, C = 1, Z_0(s) = 1$

Fig. 3 Chain fractance approximation circuit of Oldham I type

Oldham I 型分形链分抗逼近电路的 F 特征相对误差曲线如图 3(c) 所示.

2.3 F 特征的逼近带宽指数

在逼近精度 r_i 下, 依据相对误差 $r_{Fk}(\omega)$, 定义 F 特征逼近带宽指数

$$\beta_{Fi}(k) = \lg \frac{f_{FUi}(k)}{f_{FLi}(k)} = \lg f_{FUi}(k) - \lg f_{FLi}(k) \quad (i=0, 1, 2, 3) \quad (15a)$$

$f_{FUi}(k)$ 与 $f_{FLi}(k)$ 分别称为 F 特征的上限频率与下限频率. i 表示逼近精度等级指标 ($r_0 = 1\%$ 为超级精度, $r_1 = 5\%$ 为一级精度, $r_2 = 10\%$ 为二级精度, $r_3 = 20\%$ 为三级精度).

根据频率指数 $\omega = \lg(\Omega/2\pi)$ 、级次指数 $j = \log_2(k)$, 式(15a)可等价地写成

$$\beta_{Fi}(j) = \omega_{FUi}(j) - \omega_{FLi}(j) \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (15b)$$

式中, ω_{FUi} 称为 F 特征上限频率指数, ω_{FLi} 称为 F 特征下限频率指数.

Oldham I 型分形链分抗逼近电路 F 特征逼近带宽指数曲线如图 4 所示, 随着级次指数 j 的增加, 逼近带宽指数 $\beta_{Fi}(j)$ 逐渐增大.

2.4 K 线斜率图——F 指标

对 F 特征逼近带宽指数序列

$$\beta_{Fi} = \{ \beta_{Fi}(j) \}_{j=0,1,2,\dots,J} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (16)$$

进行差分运算, 得到 F 特征逼近带宽指数的斜率序列

$$K_{Fi}(j) = \beta_{Fi}(j) - \beta_{Fi}(j-1) \quad (j = 1, 2, \dots, J; i = 0, 1, 2, 3) \quad (17)$$

$K_{Fi}(j)$ 曲线图称为分抗逼近电路的 K 线斜

率图.

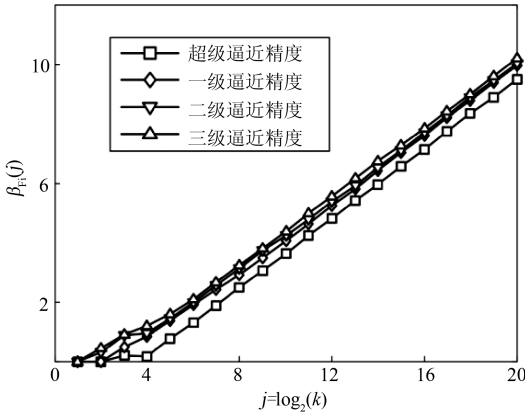


图 4 Oldham I 型链分抗的逼近带宽指数曲线图
Fig. 4 Bandwidth Index of Oldham I chain fractance approximation circuit

当级次指数 j 大于某一正整数值时, F 特征逼近带宽指数 $\beta_{Fi}(j)$ 曲线为直线, 简单近似为

$$\beta_{Fi}(j) \approx K_{Fi}(j - j_{Fi}) (j > j_{Fi}, i=0,1,2,3) \quad (18)$$

式中, j_{Fi} 是常数, 由逼近电路的类型所确定, 其几何意义是 F 特征逼近带宽指数 $\beta_{Fi}(j)$ 曲线的直线段延长线与横坐标的交点位置值. j_{Fi} 越小, 逼近性能越好.

为描述整体的逼近性能, 使用斜率 K_{Fi} 平均值

$$K_F = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 K_{Fi}, \quad (19)$$

作为分抗逼近电路的 K_F 指标.

由式(18)有

$$\beta_{Fi}(j) \approx jK_{Fi} - j_{Fi}K_{Fi} = jK_{Fi} + F_i (j > j_{Fi}, i=0,1,2,3) \quad (20a)$$

式中

$$F_i \approx -j_{Fi}K_{Fi} (i=0,1,2,3) \quad (20b)$$

是一些确定常数, 其几何意义是 F 特征逼近带宽指数 $\beta_{Fi}(j)$ 曲线的直线段延长线与纵坐标的交点位置值. 为了表征 F 特征的整体逼近性能, 使用 F_i 的平均值.

$$F = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 F_i, \quad (21)$$

作为分抗逼近电路的 F 特征指标—— F 指标.

F 指标与 K_F 指标共同表征 F 特征逼近带宽指数曲线直线段的整体特征

$$\beta_F(j) = jK_F + F_r (j > j_F = -\frac{F_r}{K_F}) \quad (22)$$

F 指标与 K_F 指标越大, F 特征逼近性能越好; 而 j_F 越小, F 特征逼近性能越好. 称方程(22)所绘制

的曲线图为 F 特征逼近带宽简化指数曲线图——简化 K 线图.

图 5 为 Oldham I 型分形链分抗逼近电路 F 特征逼近的 K 线斜率图, 随着频率的增大不同精度的 K 线斜率图趋于稳定. F 指标与特征 K_F 指标如表 1 所示. 由此表可知 I 型的 F 特征逼近性能更好.

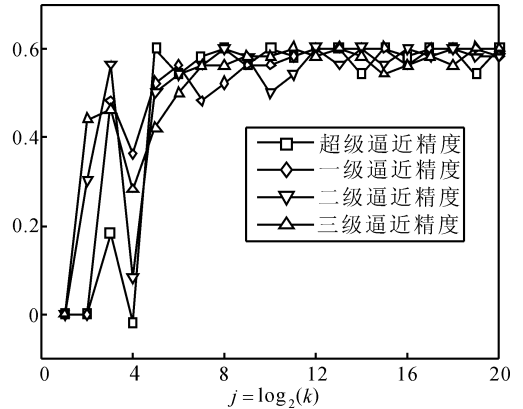


图 5 Oldham I 型链分抗的 K 线斜率图
Fig. 5 K-index of Oldham I chain fractance approximation circuit

表 1 Oldham 链分抗逼近电路的 F 指标与特征 K_F 指标
Tab. 1 F -index and K_F -index of Oldham chain fractance approximation circuit

类型	K_F	F_r
I 型	0.5837	-3.9803
I 型	0.5829	-1.7550

2.5 F 特征的逼近效益

分抗逼近电路的级次数 k 或级次指数 j 越大, 电路的复杂度越大. 在 F 特征逼近带宽指数相同的情况下, 级次数 k 或级次指数 j 越小, 电路复杂度也就越小, 电路 F 特征逼近效益越高. 为整体衡量分抗逼近电路的 F 特征逼近效益, 定义 F 特征逼近带宽指数与电路级次数之比

$$\eta_F(j) = \frac{\beta_F(j)}{k} \quad (23)$$

为分抗逼近电路的 F 特征逼近效益.

Oldham I 型分形链分抗逼近电路 F 特征逼近效益曲线如图 6 所示. 由 F 特征逼近效益曲线可以看出, Oldham 分形链分抗逼近电路不仅存在最佳逼近效益比, 而且随着级次的增加逼近效益越来越小.

3 结论

在 F 特征函数基础上, 提出分抗 F 特征逼近

性能分析的相对误差、精度、带宽、带宽指数、K 线斜率图、F 指标逼近效益等一系列概念及相应的数学函数, 定量表征分抗逼近电路的逼近性能, 并用于分析 Oldham I 型与 \bar{I} 型分形链分抗逼近电路的逼近性能, 也印证 Oldham \bar{I} 型分抗比 I 型分抗有更好的逼近效果。

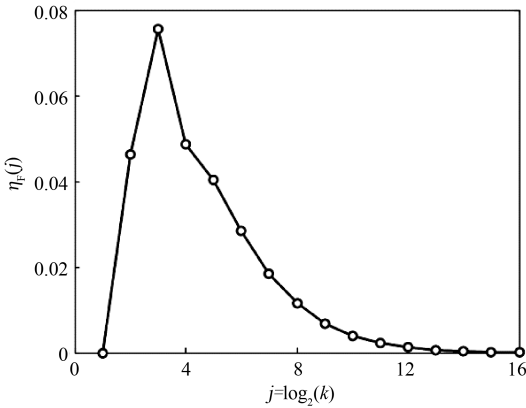


图 6 Oldham I 型链分抗的逼近效益

Fig. 6 Approximation benefits curves of Oldham I chain fractance approximation circuit

在分抗逼近电路的逼近性能分析中, 不仅要分析相频特征、阶频特征逼近性能, 还应该分析 F 特征逼近性能, 以达到全面考查分抗逼近电路逼近性能的目的。

单位制和量纲是物理学的重要基础^[21,22]。分抗集总特征值 $F^{(\rho)}$ 的单位和量纲也是值得详细研究的问题, 文献[23-26]提出并论证了容性分抗和感性分抗的单位和量纲。由式(2)可知, Oldham 分形链分抗 F 特征值的单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A}^2 \text{s}^{3.5})$, 即 $[F^{(-1/2)}] = \Omega \text{s}^{-1/2}$ (读作欧姆每平方根秒^[27]), 量纲可为 $\text{L}^2 \text{T}^{-3.5} \text{MI}^{-2}$ 。有关问题值得继续研究。

参考文献:

[1] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[2] Ortigueira M D. An introduction to the fractional continuous-time linear systems; the 21st century systems[J]. IEEE Circ Syst Mag, 2008, 8: 19.

[3] Elwakil A S. Fractional-order circuits and systems; an emerging interdisciplinary research area [J]. IEEE Circ Syst Mag, 2010, 10: 40.

[4] Wu G C, Baleanu D, Zeng S D. Discrete chaos in fractional sine and standard maps[J]. Phys Lett A, 2014, 378: 484.

[5] Saidi B, Amairi M, Najar S, et al. Bode shaping-

based design methods of a fractional order PID controller for uncertain systems[J]. Nonlinear Dynam, 2015, 80(4): 1817.

[6] Pu Y F. Analog circuit realization of arbitrary-order fractional hopfield neural networks; a novel application of fractor to defense against chip cloning attacks [J]. IEEE Access, 2016, 4: 5417.

[7] Pu Y F, Yuan X. Fracmemristor: fractional-order memristor[J]. IEEE Access, 2016, 4:1872.

[8] 陈喆, 彭钰林, 王舒文, 等. 从离散到连续——分数阶信号处理的理论、方法与应用[J]. 电子学报, 2012, 40: 2282.

[9] Kaczorek T, Rogowski K. Fractional linear systems and electrical circuits [M]. Switzerland: Springer International Publishing, 2015.

[10] 何秋燕, 袁晓. Carlson 迭代与任意阶分数微积分算子的有理逼近[J]. 物理学报, 2016, 65: 25.

[11] 余波, 袁晓, 陶磊. 分抗逼近电路的 F 特征分析原理与应用实例[J]. 电子与信息学报, 2015, 37: 21.

[12] Tao Lei, Yuan Xiao, Yu Bo. Frequency response solution for a fractional-order linear single degree-of-freedom oscillator based on Roy fractance [J]. J Comput Complex Appl, 2016, 2: 124.

[13] 余波. 分抗与半阶微分运算电路的实现与测试[D]. 成都: 四川大学, 2016.

[14] 陶磊, 袁晓, 易舟, 等. Roy 分形分抗逼近电路的运算特征与逼近性能分析[J]. 科学技术与工程, 2015, 15: 81.

[15] 刘盼盼, 袁晓, 陶磊, 等. Oustaloup 分抗电路的运算特征与逼近性能分析[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 353.

[16] 易舟. 分形分抗逼近电路零极点求解与性能分析 [D]. 成都: 四川大学, 2016.

[17] Grenness M, Oldham K B, Chem. A. Semiintegral electroanalysis. Theory and verification [J]. Anal Chem, 1972, 44: 1121.

[18] Oldham K B, Chem. A. Semiintegral electroanalysis. Analog implementation [J]. Anal Chem, 1973, 45: 39.

[19] Goto M, Oldham K B, Chem. A. Semiintegral electroanalysis. Shapes of neopolarograms [J]. Anal Chem, 1973, 45: 2043.

[20] 易舟, 袁晓, 陶磊, 等. Oldham RC 链分抗逼近电路零极点精确求解 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2015, 52: 1255.

[21] 胡友秋. 电磁学单位制 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2012.

[22] 张常山. 国际单位制与基本物理常数 [M]. 南京: 东

南大学出版社, 2014.

- [23] Pu Y F. Material performance measurement of a promising circuit element: fractor-part I: driving-point impedance function of the arbitrary-order fractor in its natural implementation[J]. *Mater Res Innov*, 2015, 19: 176.
- [24] Pu Y F. Material performance measurement of a promising circuit element: fractor-part II: measurement units and physical dimensions of fractance and rules for fractors in series and parallel [J]. *Mater Res Innov*, 2015, 19: 183.
- [25] Pu Y F. Measurement units and physical dimensions of fractance-part I: position of purely ideal fractor in chua's axiomatic circuit element system and fractional-order reactance of fractor in its natural implementation[J]. *IEEE Access*, 2016, 4: 3379.
- [26] Pu Y F. Measurement units and physical dimensions of fractance-part II: fractional-order measurement units and physical dimensions of fractance and rules for fractors in series and parallel[J]. *IEEE Access*, 2016, 4: 3398.
- [27] He Q Y, Yu B, Yuan X. Carlson iterating rational approximation and performance analysis of fractional operator with arbitrary order[J]. *Chinese Physics B*, 2017, 26: 040202.