

分形塔分抗逼近电路——标度拓展与优化设计原理

张月荣¹, 袁 晓¹, 郭钊汝²

(1. 四川大学电子信息学院, 成都 610064; 2. 新疆农业大学计算机与信息工程学院, 新疆 830052)

摘 要: 分析 B 型分形塔分抗逼近电路的特征, 该电路只具有负半阶运算性能. 结合标度拓展理论, 获得具有任意实数阶微积算子的分抗逼近电路——标度分形塔分抗逼近电路, 并用非正则双重标度方程进行描述. 分析该分抗逼近电路的运算性能和逼近性能. 运用典型的数值求解算法分析频域特征及运算特征, 对比不同初始阻抗值对零极点分布及频域曲线的影响. 结合运算特征曲线与标度特征参量的不同取值情形, 理论分析标度分形塔分抗逼近电路的优化原理并给出具体优化方法. 对比分析标度分形塔分抗优化前后的逼近性能, 定量分析运算振荡现象. 介绍标度分形塔分抗的实际电路设计方案并给出实例, 使用电阻电容与有源器件将该分抗的运算阶由 $-1 < \mu < 0$ 推广为 $0 < |\mu| < 2$. 标度分形塔分抗逼近电路及其优化电路为分抗的构造与应用提供新思路.

关键词: 标度分形塔; 优化设计; 分数阶微积分; 标度拓展; 运算阶

中图分类号: TP211+5 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2021.023004

Fractal-pyramid fractance approximation circuit—scaling extension and optimization design principle

ZHANG Yue-Rong¹, YUAN Xiao¹, GUO Zhao-Ru²

(1. College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610064, China;

2. College of Computer and Information Engineering, Xinjiang Agricultural University, Xinjiang 830052, China)

Abstract: Analyze the characteristics of B-type fractal-pyramid fractance approximation circuit, which has only negative half-order operational performance. According to scalingextension theory, a fractance approximation circuit with arbitrary real-order calculus operator is obtained—a scaling fractal-pyramid fractance approximation circuit, which then can be described by anirregular double-scaling equation. The operational performance and approximation performance of this fractance approximation circuit is analyzed. The typical numerical solution algorithmsare used to analyze the frequency-domain characteristics and operational characteristics, the effects of different initial impedance values on the pole-zero distributions and frequency-domain curves are compared. By combining the operational characteristic curves and thedifferent values of scalingfeature parameters, the optimization principle of the scaling fractal-pyramid fractance approximation circuit is theoretically analyzed and a specific optimization method is given. The approximation performance before and after the optimization of the scaling fractal-pyramid fractance approximation circuit is comparatively analyzed, and the operational oscillation phenomenon isquantitatively analyze. The actual circuit design scheme of the scaling fractal-pyramid fractance approximation circuit

收稿日期: 2020-07-22
基金项目: 国家自然科学基金委员会-中国工程物理研究院 NSAF 联合基金(U1730141)
作者简介: 张月荣(1994—), 男, 湖北大悟人, 硕士研究生, 研究方向为信号与信息处理.
通讯作者: 袁晓. E-mail:yuanxiao@scu.edu.com

is introduced and an example is given. Resistors, capacitors, and active devices are used to generalize the operational order of this fractance from $-1 < \mu < 0$ to $0 < |\mu| < 2$. Scaling fractal-pyramid fractance approximation circuit and its optimized circuit provide new ideas for the construction and application of fractance.

Keywords: Scaling fractal pyramid; Optimization design; Fractional calculus; Scaling extension; Operational order

1 引言

分数阶微积分已逐步发展为数学分析中的一个重要领域^[1]. 近年来,随着分数阶微积分研究的深入,分数阶线性系统,分数阶混沌系统,分数阶流变模型,分数阶忆阻器^[2]等相关电路模型的研究与应用越来越广泛^[3]. 分数阶电路与系统更能刻画实际的物理工程现象. 分数阶电路与系统中的核心电路元件就是分抗(元)^[4]. 理想分抗(元)的阻抗(或导纳)函数可表示为

$$I^{(\mu)}(s) = F^{(\mu)} \cdot s^{\mu}, (0 < |\mu| < 1), s \in \mathbb{C} \quad (1)$$

式中, s 为拉普拉斯变量,也称频率运算变量; μ 表示分抗元的运算阶,当运算阶取值为分数时,称 s^{μ} 为分数阶算子; $F^{(\mu)}$ 为分抗元的集总特征参量,称为分抗值(简称分抗, fractance). 为便于数学分析而又不失一般性,往往将分抗元的阻抗函数进行归一化处理. 定义归一化运算变量

$$\omega = \tau s = \frac{s}{\Omega_{\tau}} \quad (2)$$

式中, $\tau = RC$, 表示时间常数; Ω_{τ} 为特征频率值. 归一化后分抗元的阻抗函数为

$$\iota^{(\mu)}(\omega) = \frac{I^{(\mu)}(\omega/\tau)}{F^{(\mu)}/\tau^{\mu}} = \omega^{\mu}, (0 < |\mu| < 1, \omega \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

鉴于实际因素和现有的工艺制作手段,工程上主要考虑由整数阶电路元件(电阻,电容,电感)构建具有分数阶运算性能的无源网络来近似实现分抗元的运算功能^[5],这类电路模型被称为分抗逼近电路. 现有的许多经典无源分抗逼近电路(例如 Oldham 分形链分抗, Sierociuk 分形链分抗, Carlson 分形格分抗等)都能在特定的频率范围或条件下实现分数阶运算性能. 这种在特定频率范围或一定条件下逼近理想分抗的过程被称为非理想分抗逼近过程.

文献[6]在对比分析 Oldham 分形链分抗与 Liu-Kaplan 分形链分抗的基础上,发现描述 Liu-Kaplan 分形链分抗的代数迭代方程可由描述 Old-

ham 分形链分抗的代数迭代方程标度化得到. 由此,袁晓提出标度拓展理论. 标度拓展可将原负半阶逼近的分抗拓展为任意阶分抗逼近,降低电路设计成本. 另外,逼近性能的提升也可由对原电路的优化实现^[7-8]. 例如改进 Oldham I 型分形链分抗^[4],对比原电路,改变第一个电阻的取值能够极大提高逼近效益. 经典的分抗大多为容性分抗(运算阶为负),感性分抗(运算阶为正)具有同等应用价值. 然而电感自身具有不适宜集成的特性,尤其单片集成电路不能制作电感,因此感性分抗极少被研究及应用. 如何构造感性分抗逼近电路也是分抗实际应用时急需解决的问题^[9].

本文在分析负半阶 B 型分形塔分抗电路的基础上,根据标度拓展理论,分析原电路标度拓展后的分数阶运算性能,得到具有任意分数算子的标度分形塔分抗逼近电路. 并针对标度拓展后的电路在一定频段处逼近失真的问题,探寻标度分形塔分抗的优化原理及方法. 分析标度拓展后电路的振荡现象. 提出由电阻,电容和运算放大器构建的有源电路网络实现感性分抗($0 < \mu < 2$)的方法. 通过理论分析与仿真实验,证明塔形分抗标度拓展的运算有效性和电路优化方法的可行性.

2 标度拓展——任意阶标度分形塔分抗

2.1 B 型分形塔分抗逼近电路及其标度拓展

文献[5]提出了一种不同于经典 Oldham 分形链分抗和 Carlson 分形格分抗的负半阶分抗逼近电路——B 型分形塔分抗逼近电路. 该 RC 分抗逼近电路是实现负半阶积分算子的理想逼近,其迭代电路原理图及归一化迭代电路如图 1.

B 型分形塔分抗迭代算法公式为

$$y_k(\omega) = \frac{2 + (1 + \omega)y_{k-1}(\omega)}{1 + \omega + y_{k-1}(\omega)} \quad (4)$$

式中, k 表示电路的迭代次数,也是电路级数. 正如 Oldham 分形链分抗与 Liu-Kaplan 分形链分抗,标度拓展后,描述半阶算子的代数迭代方程可

转化为描述任意阶算子的非正则标度方程.

代数迭代方程非正则标度方程

$$y(\omega)=F(y(\omega))\xrightarrow[\substack{0<\alpha<\infty\\0<\beta<\infty\\{\sigma=\alpha\beta}}]{\text{标度拓展}}y(\omega)=F(\alpha^{\pm 1}y(\sigma^{\pm 1}\omega))\tag{5}$$

式(5)中的 α, β 称为电路的标度特征参量, 取正实数. $\sigma=\alpha\beta$ 称为标度因子. 当 $1<\sigma<\infty$ 时为正比标度拓展, 简称正比拓展; 当 $0<\sigma<1$ 时为反比标度拓展, 简称反比拓展. 根据拓展理论, B 型分形塔分抗标度拓展后, 理论上可以实现任意阶分数算子的有理逼近. B 型分形塔分抗归一化迭代电路及其标度拓展后的迭代电路如图 2, 对应的非正则标度方程如式(6).

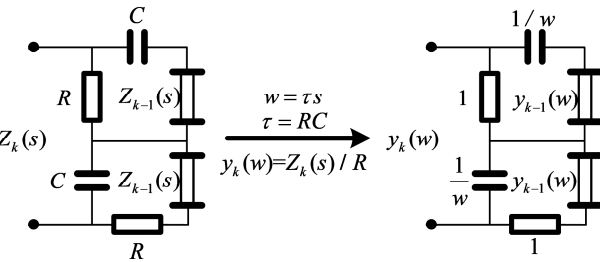


图 1 B 型分形塔分抗迭代电路与归一化迭代电路
Fig. 1 B-type fractal-pyramid fractance iterating circuit and normalized iterating circuit

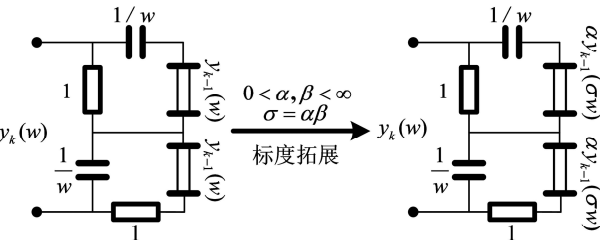


图 2 B 型分形塔分抗标度拓展电路图
Fig. 2 Scaling extension circuit diagram of B-type fractal-pyramid fractance approximation circuit

图 2 在正文没有描述, 请先描述再有图出现.

$$y(\omega)=\frac{2+(1+\omega)\cdot\alpha y(\sigma\omega)}{1+\omega+\omega\cdot\alpha y(\sigma\omega)},\quad k\in\mathbb{N}^+\tag{6}$$

非正则标度方程(6)是一种双重标度方程. 该代数迭代方程完全表征和描述了标度分形塔分抗逼近电路的运算性能和电气响应特征^[10], 标度分形塔分抗逼近电路的结构特征蕴含在该双重标度方程中. 该电路的极限阻抗必定为式(6)中方程的一个真实解. 求解该方程对分析分抗电路特征具有重要作用^[11].

2.2 分形塔分抗的运算有效性及频域特征函数

归一化有理阻抗函数序列 $y_k(\omega)$ 中, 取 $\omega = j \cdot 10^{\bar{\omega}}$, ($j = \sqrt{-1}, \bar{\omega} \in \mathbb{R}$), 得到频域特征函数^[4]:

$$y_k(j \cdot 10^{\bar{\omega}}) = A_k(\bar{\omega}) \cdot e^{j\theta_k(\bar{\omega})}, \quad k \in \mathbb{N}, \bar{\omega} \in \mathbb{R}\tag{7}$$

式中幅频特征函数:

$$A_k(\bar{\omega}) = |y_k(j \cdot 10^{\bar{\omega}})|\tag{8a}$$

$$\text{或 } \Lambda_k(\bar{\omega}) = \lg(A_k(\bar{\omega})), \bar{\omega} \in \mathbb{R}\tag{8b}$$

相频特征函数

$$\theta_k(\bar{\omega}) = \arg\{y_k(j \cdot 10^{\bar{\omega}})\}, \bar{\omega} \in \mathbb{R}\tag{9}$$

阶频特征函数

$$\mu_k(\bar{\omega}) = \frac{d\Lambda_k(\bar{\omega})}{d\bar{\omega}}, \bar{\omega} \in \mathbb{R}\tag{10}$$

为便于在频域定量分析分抗逼近电路的集总特征值 $F^{(\omega)}$, 文献[12]提出 F 特征函数:

$$F_k(\bar{\omega}) = \frac{y_k(j \cdot 10^{\bar{\omega}})}{|10^{\bar{\omega}}|^{\mu_k(\bar{\omega})}}, \bar{\omega} \in \mathbb{R}\tag{11}$$

幅频特征函数和相频特征函数表征了分抗逼近电路阻抗函数的频域特征. 阶频特征和相频特征可完全表征分抗逼近电路的运算特征. 对于一个给定的分数阶系统, 首先应该考虑它的运算阶^[9]. 阶频特征是幅频特征的微分, 因此阶频特征包含了幅频特征的信息. F 特征描述分抗集总特征参量与频率 ω 的依存关系, 在分抗逼近电路具体设计及实际应用中具有重要作用.

运算有效性^[4]是指给定的分抗逼近电路, 其极限阻抗, 即描述其有理逼近过程的非正则标度方程 $y(\omega) = F(\alpha y(\sigma\omega))$ 的解 $y(\omega)$ 中, 是否含有代数因子 ω^μ ($0 < |\mu| < 1$) 也即分数算子. 标度分形塔分抗逼近电路显然是物理可实现的. 运算有效性的判定是研究分抗有理逼近问题或研究标度方程描述的过程或系统的核心问题之一. 判定标度分形塔分抗的运算有效性需求解方程(6), 该非正则标度方程的解析求解^[13]具有一定的挑战性, 还不知道如何实现. 因此, 可考虑近似求解法.

2.3 近似求解与数值求解

根据近似求解结果可从理论上判断标度拓展后的 B 型标度分形塔分抗的运算有效性^[14]. 数值求解^[15]则可验证近似求解的正确性, 并利于直观分析运算性能和逼近性能. 当电路迭代次数 $k \rightarrow \infty$, 在较低频段时 $|\omega| \rightarrow 0$, 电路中的电容容抗 $1/\omega \rightarrow \infty$, 此时电容近似开路状态. 根据归一化迭代电路, 此时的归一化阻抗函数

$$y(\omega) \approx 2 + \alpha y(\sigma\omega) \xrightarrow{\alpha y(\sigma\omega) \gg 2} \alpha y(\sigma\omega)\tag{13}$$

在较高频段时,电路中的电容容抗 $1/\omega \rightarrow 0$,此时电容近似为短路状态. 由归一化迭代电路近似求解的阻抗函数为:

$$y(\omega) \approx \frac{\alpha y(\sigma \omega)}{1 + \alpha y(\sigma \omega)} \xrightarrow{1 \gg \alpha y(\sigma \omega)} \alpha y(\sigma \omega) \quad (14)$$

正则标度方程(13),(14)有近似解析解——Liu 氏粗解

$$y(\omega) = \kappa \omega^{\mu_{\text{Liu}}}, \mu_{\text{Liu}} = -\frac{\lg \alpha}{\lg \alpha + \lg \beta} \quad (15)$$

近似解(15)表明拓展后,标度分形塔分抗理论上可实现任意负分数阶算子的有理逼近. 运算阶只与 α, β 有关.

分抗逼近电路阻抗函数的数值求解常用算法有三种:传输参量矩阵法^[10],系数矢量迭代法^[16]和标度矩阵迭代法^[17]. 鉴于标度分形塔分抗电路结构特点,传输参量矩阵法不易于求解,因此考虑系数矢量迭代法或标度矩阵迭代法^[18]. 不同初始阻抗下,两种算法的初始迭代参数如表 1.

表 1 初始阻抗对应的初始迭代参数

Tab. 1 Initial iterating parameters corresponding to initial impedance

初始阻抗 y_0		∞	0	r_0	$1/c_0\omega$
系数矢量	β_0	[1]	[0]	$[r_0]$	$[0,1]$
迭代法	a_0	[0]	[1]	[1]	$[c_0,0]$
标度矩阵	$[N_k(\omega)]$	1	0	r_0	1
迭代法	$[D_k(\omega)]$	0	1	1	$c_0\sigma^k\omega$

初始阻抗取值会影响标度分形塔分抗的零极点个数和分布情况,进而影响运算特征曲线的形状^[19]. 初始阻抗为开路和短路时,两种算法求解的正比拓展时负半阶标度分形塔分抗运算特征曲线关于直线 $\mu_{\text{Liu}} = -1/2$ 对称(图 3(a)和(b)). 当 $y_0(\omega) = 1/\omega$ 时,由系数矢量迭代法求解的运算特征曲线偏离真实值(图 3(d)),此时求解的零极点分布极不均匀. $y_0(\omega) = 1$ 时,两种算法求解的运算特征曲线几乎重合(图 3(c)).

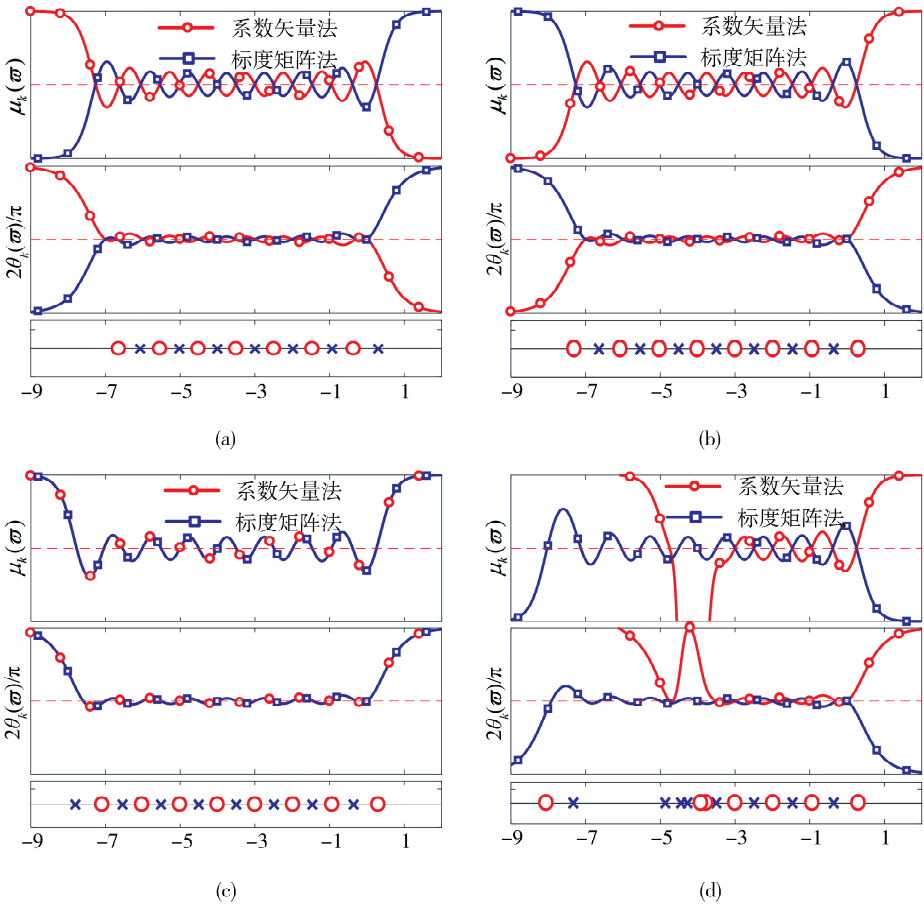


图 3 正比拓展时不同初始阻抗下运算特征和零极点分布($\mu_{\text{Liu}} = -0.5, k=12, \sigma=5, \sigma=10$)
(a) $y_0(\omega) = \infty$; (b) $y_0(\omega) = 0$; (c) $y_0(\omega) = 1$; (d) $y_0(\omega) = 1/\omega$

Fig. 3 Operational characteristics and zero-pole distributions under different initial impedances in direct proportion extension ($\mu_{\text{Liu}} = -0.5, k=12, \sigma=5$)
(a) $y_0(\omega) = \infty$; (b) $y_0(\omega) = 0$; (c) $y_0(\omega) = 1$; (d) $y_0(\omega) = 1/\omega$

对比分析发现, 系数矢量迭代法计算速度较快^[15], 当电路迭代次数 k 的取值较大时, 标度矩阵迭代法将不太适用. 且表 1 中标度矩阵迭代法的初始阻抗迭代参数与电路迭代次数 k 有关, 当迭代

次数变化时, 需要对初始阻抗中的 σ^k 进行指数调整^[19]. 考虑到标度调整, 优先选用系数矢量迭代法. 取 $y_0(\omega) = 1$, 由系数矢量迭代法求解拓展前后的分抗运算特征曲线如图 4.

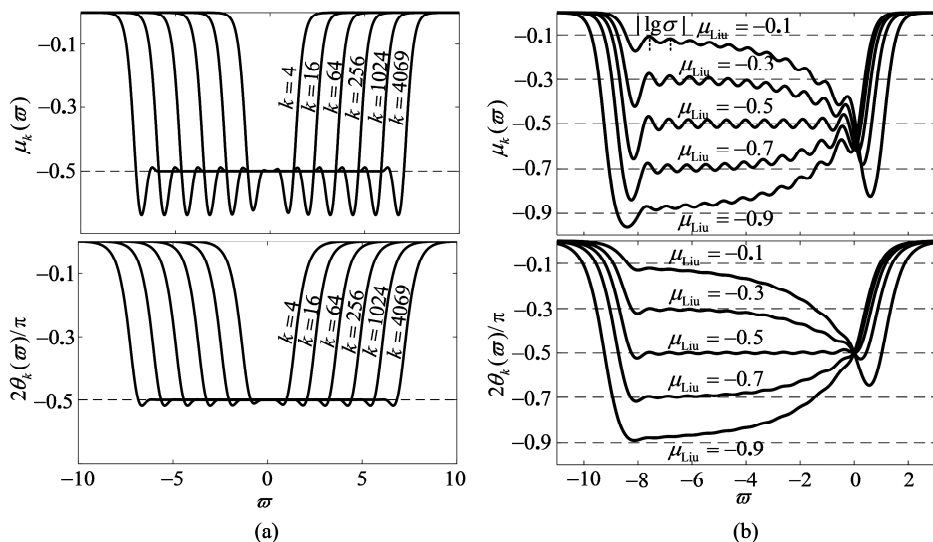


图 4 标度拓展前后运算特征曲线对比图 ($y_0(\omega) = 1$)

(a) 标度拓展前; (b) 正比拓展 ($k=12, \sigma=5$)

Fig. 4 Comparison of operational characteristic curves before and after scaling extension ($y_0(\omega) = 1$)

(a) Before scaling extension; (b) Direct proportion extension ($k=12, \sigma=5$)

数值仿真结果表明, 标度拓展前 B 型分形塔分抗是全频有效的半阶积分算子的理想逼近. 标度拓展后, 该分抗可实现任意阶负分数算子的非理想逼近.

3 标度分形塔分抗的优化

很多经典的半阶分形塔分抗标度拓展后都能实现任意阶分数算子的逼近. 例如标度分形格分抗^[1], 标度分形梯分抗^[2-3], 标度分形串分抗^[9], 标度分形链分抗类^[16]等. 这些标度拓展后分抗的逼近效果都有待优化. 图 4(b) 中的运算特征曲线表明, 正比拓展较高频段 (反比拓展较低频段) 时, 逼近效率不甚理想. 因此, 通过电路优化^[4] 改善分抗逼近性能显得尤为必要^[5]. 例如改进 Oldham I 型分形链分抗, 电路上的微小改进便可获得逼近性能的极大改善.

3.1 电路优化理论分析

正比拓展时, 随着迭代次数 k 的增加, 逼近带宽向低频段延伸. 且频率取值越小, 逼近性能越好. 反比拓展时, 随迭代次数的增加, 逼近带宽向高频段延伸. 频率取值越大, 逼近性能越好. 但两种拓展情况下在 $\omega = 1$ (频率指数 $\bar{\omega} = 0$) 附近的逼

近效果都有待优化. 根据不同运算阶下运算特征曲线的形状不同, 结合运算阶 μ_{Liu} 及不同频段内电阻和电容的电学特性, 分正, 反比拓展两个方面理论分析标度分形塔分抗逼近电路的优化原理.

正比拓展 ($1 < \alpha, \beta, \sigma < \infty$) 逼近频段向低频延伸. 当 $-0.5 < \mu_{Liu} < 0$ 时, 在逼近频带的较高频段, 运算特征曲线向 $\mu_{Liu} = -0.5$ 方向偏移, 偏向电容的运算特征 (电容的运算阶为 -1 阶), 优化补偿元件选用电阻 (电阻的运算阶为 0 阶). 当 $-1 < \mu_{Liu} < -0.5$ 时, 在较高频段运算特征曲线向 $\mu_{Liu} = -0.5$ 方向偏移, 偏向电阻的运算特征, 优化补偿元件选择电容. 考虑较高频段时串联电容的容抗几乎可忽略, 故选用并联电容, 串联电阻的优化补偿网络.

反比拓展 ($0 < \alpha, \beta, \sigma < 1$) 逼近频段向高频延伸. 当 $-0.5 < \mu_{Liu} < 0$ 时, 在较低频段运算特征曲线向 $\mu_{Liu} = -0.5$ 方向偏移, 即偏向电容的运算特征, 优化元件选用电阻. 当 $-1 < \mu_{Liu} < -0.5$ 时, 在较低频段运算特征曲线向 $\mu_{Liu} = -0.5$ 方向偏移, 偏向电阻的运算特征, 优化元件选择电容. 而较低频段时并联电容的容抗几乎可忽略, 故采用串联电容, 并联电阻的优化补偿网络.

3.2 优化电路及优化频域曲线

选择对称阻容 T 型节对原电路进行补偿(如图 5 所示),正比拓展时优化电路的补偿元件参数

$$R_0 = \sum_{i=-\infty}^{-1} \alpha^i = \frac{1}{\alpha - 1}, C_0 = \frac{1}{\sum_{i=-\infty}^{-1} \beta^i \omega} = \frac{\beta - 1}{\omega}$$

(16)

反比拓展时电路优化原理图如图 6,优化元件参数

$$R_0 = \frac{1}{\sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{1}{\alpha^i}} = \frac{1 - \alpha}{\alpha},$$
$$C_0 = \sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{1}{\beta^i \omega} = \frac{\beta}{(1 - \beta)\omega}$$

(17)

取初始阻抗 $y_0(\omega) = 1$,正比拓展时优化后的运算特征曲线如图 7,其中黑色曲线为标度分形塔原型电路的运算特征曲线,红色为电路优化后的运算特征曲线.反比拓展时优化电路具有相同的频域优化效果.

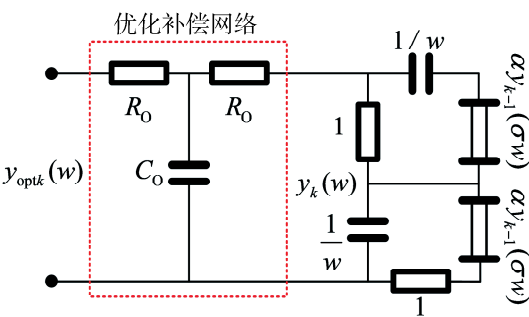


图 5 正比拓展优化原理图

Fig. 5 Optimization schematic diagram of direct proportion extension

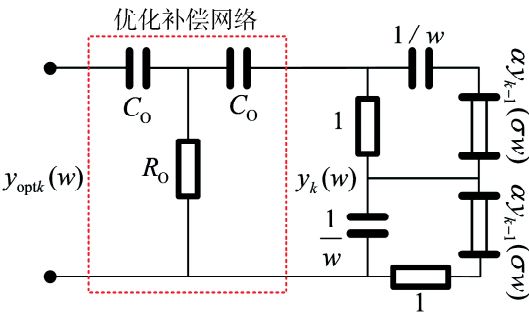


图 6 反比拓展优化原理图

Fig. 6 Optimization schematic diagram of in-verse proportion extension

对比分析图 7,优化后的电路相比原型电路逼近理想分抗元的效果更好^[6].尤其是运算阶 $\mu_{Liu} \neq -0.5$ 时,优化后的逼近性能得到显著提升.

4 优化标度分形塔分抗的频域特征及逼近性能

4.1 频域特征——运算振荡现象

电路的优化并无法消除或减弱逼近频带内的振荡现象,振荡现象是标度分形塔分抗所固有的^[7].在工程应用中,必须考虑频域的振荡现象带来的逼近误差,因此需定性与定量分析标度分形塔分抗的运算振荡现象^[8].

以正比拓展为例,在有效逼近频带范围内(如图 8 所示),优化前后频域振荡波形具有固定振荡周期 $W = |\lg \sigma|$.

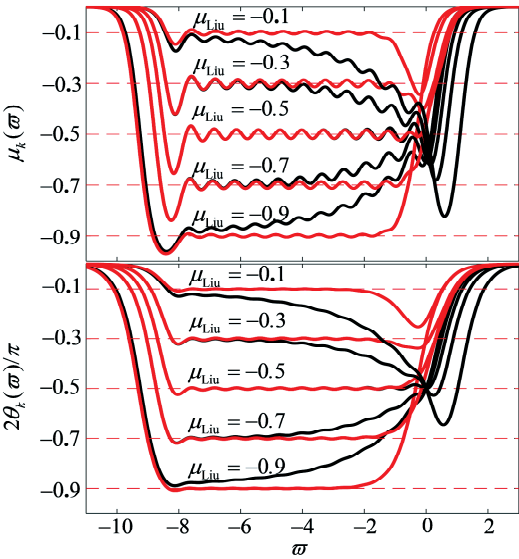


图 7 正比拓展优化前后运算特征曲线对比图
($k=12, \sigma=5$)

Fig. 7 Comparison of operational characteristic curves before and after optimization in direct proportion extension($k=12, \sigma=5$)

随着标度因子的增加,逼近频带内波形振荡幅度也在增加(图 8(b)).标度因子 σ 取定值时振荡波形的幅度 ξ 与运算阶 μ_{Liu} 有关(图 4(b)).图 9 分别展示了频域振荡波形幅度 ξ 与标度因子 σ 和运算阶 μ_{Liu} 之间的关系曲线.

运算阶 μ_{Liu} 一定时,振荡波形的幅度 ξ 与标度因子 σ 近似为线性关系(图 9(a)).且运算阶 μ_{Liu} 为 $(-1 < \mu_{Liu} < 0)$ 与 $(-1 - \mu_{Liu})$ 时运算特征曲线的振荡幅度曲线几乎重合.阶频特征曲线与相频特征曲线的振荡幅度的拟合直线函数表达式为

$$\xi_O(\mu_{Liu}, \sigma) = K_O(\mu_{Liu}) \cdot \sigma + b_O(\mu_{Liu})$$

(18a)

$$\xi_P(\mu_{Liu}, \sigma) = K_P(\mu_{Liu}) \cdot \sigma + b_P(\mu_{Liu})$$

(18b)

式中, $K(\mu_{Liu})$ 为拟合直线的斜率; $b(\mu_{Liu})$ 为拟合直

线与纵轴的交点. 拟合直线函数的斜率 $K_O(\mu_{Liu})$, $K_P(\mu_{Liu})$, 截距 $b_O(\mu_{Liu})$, $b_P(\mu_{Liu})$ 与运算阶 μ_{Liu} 的函数关系拟合式为

$$K_O(\mu_{Liu})=0.0228 \cdot \sin(\pi(\mu_{Liu}-1)) \tag{19a}$$

$$b_O(\mu_{Liu})=-0.0787 \cdot \sin(\pi(\mu_{Liu}-1)) \tag{19b}$$

$$K_P(\mu_{Liu})=0.0055 \cdot \sin(\pi(\mu_{Liu}-1)) \tag{19c}$$

$$b_P(\mu_{Liu})=-0.0220 \cdot \sin(\pi(\mu_{Liu}-1)) \tag{19d}$$

函数表达式中参数的取值由数值拟合求得. 拟合函数中参数的图像如图 10.

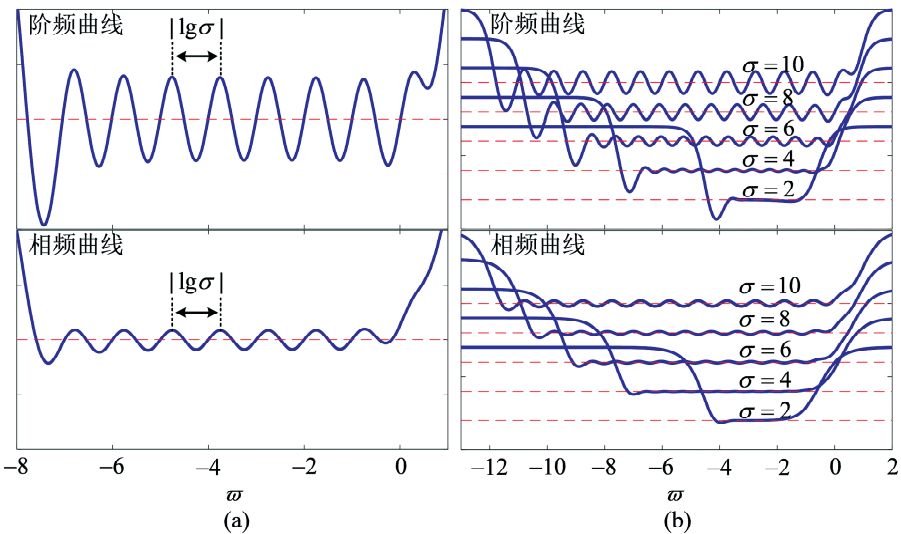


图 8 优化标度分形塔分抗的运算特征曲线的振荡现象

(a) 负半阶优化标度分形塔分抗频域特征的振荡周期($k=8,\sigma=10$); (b) 振荡幅度与标度因子的关系($k=12$)
Fig. 8 Oscillation phenomenon of operational characteristic curves of optimized scaling fractal-pyramid FAC
(a) Oscillation period of Frequency-domain characteristics of negative half-order optimization scaling fractal-pyramid ($k=8,\sigma=10$); (b) Relationship between oscillation amplitude and scaling factor ($k=12$)

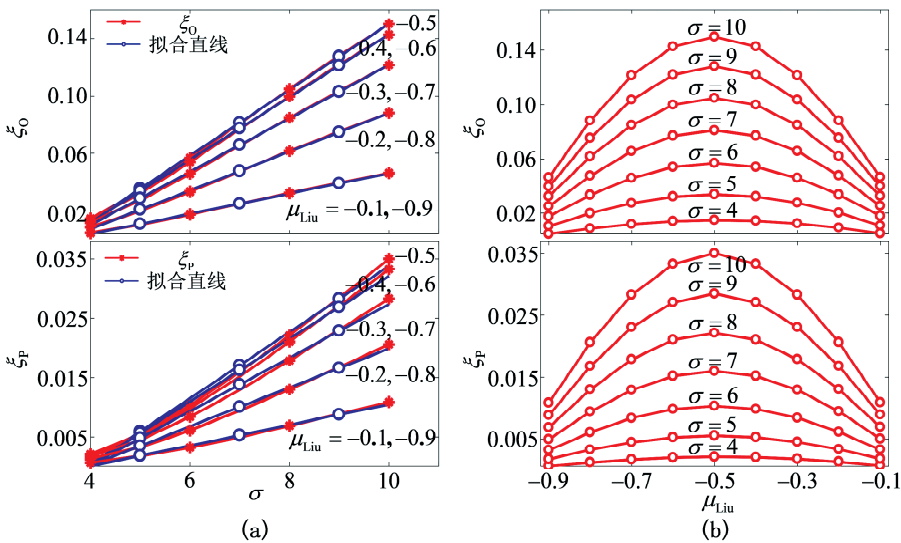


图 9 振荡幅度与标度因子和运算阶的关系

(a) 振荡幅度与标度因子的关系曲线; (b) 振荡幅度与运算阶之间的关系曲线
Fig. 9 The relationship between oscillation amplitude and scaling factor and operational order
(a) The relationship between oscillation amplitude and scaling factor;
(b) The relationship between oscillation amplitude and operational order

当标度因子一定时,运算阶为 $\mu_{Liu}(-1<\mu_{Liu}<0)$ 时振荡幅度与 $-1-\mu_{Liu}$ 时相等(图 9(b)). 振荡幅度关于 $\mu_{Liu}=-0.5$ 对称分布. 已知频域振荡曲线的振荡周期 W 和振荡幅度(18),阶频振荡曲线

与相频振荡振荡曲线可表示为

$$\mu_k(\bar{\omega}) \approx \mu_{Liu} + \xi_O(\mu_{Liu}, \sigma) \cdot \sin(\frac{2\pi}{|\lg \sigma|}(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0) + \varphi_O(\mu_{Liu}, \sigma)) \tag{20}$$

$$\frac{2}{\pi} \theta_k(\bar{\omega}) \approx \mu_{\text{Liu}} + \xi_P(\mu_{\text{Liu}}, \sigma) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{|\lg \sigma|}(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0) + \varphi_P(\mu_{\text{Liu}}, \sigma)\right) \quad (21)$$

式中,初相位 $\varphi_O(\mu_{\text{Liu}}, \sigma)$, $\varphi_P(\mu_{\text{Liu}}, \sigma)$ 的取值可由数值仿真精确求解. 当标度因子 σ 的取值小于 4 时,负半阶标度分形塔分抗的阶频特征曲线的振荡幅度小于 0.012 8,相频特征曲线的振荡幅度小于 $3.363\,5 \times 10^{-4}$. 阶频和相频特征曲线在一个周期内的积分为

$$\frac{1}{W} \int_0^W \mu_k(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \approx \mu_{\text{Liu}} \quad (22)$$

$$\frac{1}{W} \int_0^W \theta_k(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \approx \frac{\pi}{2} \mu_{\text{Liu}} \quad (23)$$

运算特征曲线的积分特性表明,尽管式(15)是阻抗函数在特定极限频率条件下的近似取值,但该计算结果同时表示逼近频带内运算阶的平均值^[4].

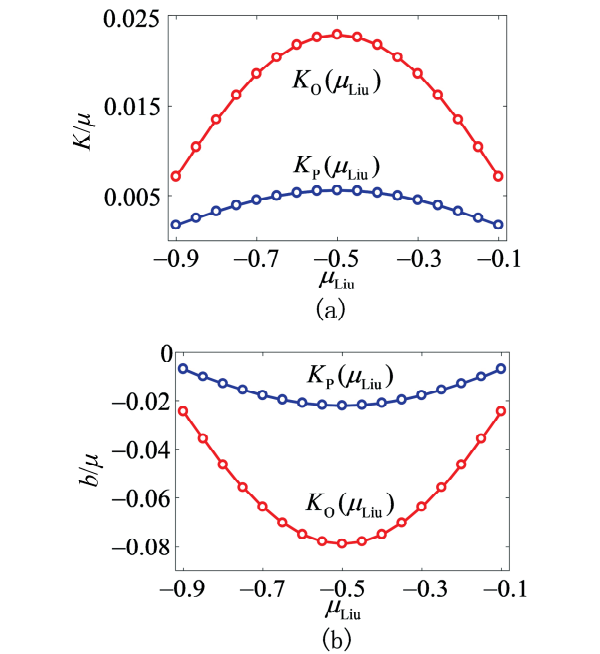


图 10 振荡幅度函数表达式中的参数
(a) 斜率 K ; (b) 截距 b
Fig. 10 Parameters in the expression of the oscillation amplitude function
(a) slope K ; (b) intercept b

4.2 逼近性能分析

在研究分抗逼近性能的相关问题时,通常需要考虑相对误差函数和 4 种逼近精度取值^[4].

阶频相对误差函数:

$$\varepsilon_O(\bar{\omega}) = \left| \frac{\mu - \mu_k(\bar{\omega})}{\mu} \right| \times 100\% \quad (24)$$

相频相对误差函数:

$$\varepsilon_P(\bar{\omega}) = \left| \frac{\mu - \frac{2}{\pi} \mu_k(\bar{\omega})}{\mu} \right| \times 100\% \quad (25)$$

逼近精度 r_i :

$$r_0 = 1\%; r_1 = 5\%; r_2 = 10\%; r_3 = 20\% \quad (26)$$

优化前后的电路复杂度与迭代次数的关系分别为

$$\zeta_\sigma[k] = 2^{k+1} - 2 \quad (27a)$$

$$\zeta_{\sigma-O}[k] = 2^{k+1} - 2 + 2 = 2^{k+1} \quad (27b)$$

$\mu_{\text{Liu}} = -0.5$ 时,由图 7 和图 8 可得标度分形塔分抗优化前后的逼近带宽指数为

$$\pi_\sigma[k] = \pi_{\sigma-O}[k] \approx (k-1) \cdot |\lg \sigma| \quad (28)$$

由此可求出优化前后的逼近效益——逼近带宽指数与电路复杂度之比

$$\eta_\sigma^{-1/2}[k] = \frac{\pi_\sigma[k]}{\zeta_\sigma[k]} \approx \frac{k-1}{2^{k+1}-2} \cdot |\lg \sigma| \quad (29a)$$

$$\eta_{\sigma-O}^{-1/2}[k] = \frac{\pi_{\sigma-O}[k]}{\zeta_{\sigma-O}[k]} \approx \frac{k-1}{2^{k+1}} \cdot |\lg \sigma| \quad (29b)$$

式(29)表明当 k 取值较大时,负半阶标度分形塔分抗优化前后的逼近效益近似相等. 因为当 $\mu_{\text{Liu}} = -0.5$ 时,标度分形塔分抗的运算特征曲线能够较好地逼近理想分抗. $\mu_{\text{Liu}} \neq -0.5$ 时,该分抗逼近电路有待优化.

$\mu_{\text{Liu}} \neq -0.5$ 时,由图 4(b)可知,优化前的逼近带宽指数为

$$\pi_\sigma[k] \approx [k - \kappa(\mu_{\text{Liu}})] \cdot |\lg \sigma| \quad (30)$$

$\kappa(\mu_{\text{Liu}})$ 是由 μ_{Liu} 确定的正实数. 优化后,以正比拓展不同运算阶 μ_{Liu} 下的阶频特征曲线为例,根据图 11 可知逼近带宽指数.

$$\pi_{\sigma-O}[k] \geq (k-4) \cdot |\lg \sigma| \quad (31)$$

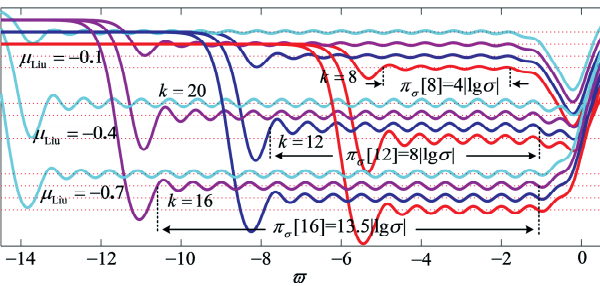


图 11 正比拓展时阶频曲线的逼近带宽指数: $\sigma=5$
Fig. 11 The approximate frequency bandwidth exponent of order-frequency curves in direct proportion extension: $\sigma=5$

此时求出的优化前后标度分形塔分抗的逼近效益为

$$\eta_{\sigma}^{\mu_{\text{Liu}}}[k] = \frac{\pi_\sigma[k]}{\zeta_\sigma[k]} \approx \frac{k - \kappa(\mu_{\text{Liu}})}{2^{k+1} - 2} \cdot |\lg \sigma| \quad (32a)$$

$$\eta^{\mu_{Liu}-0}[k]=\frac{\pi_{\sigma-0}[k]}{\zeta_{\sigma-0}[k]}\geqslant\frac{k-4}{2^{k+1}}\cdot|\lg\sigma| \quad (32b)$$

显然 $\kappa(\mu_{Liu})>4$, 即 $\mu_{Liu}\neq-0.5$ 时, 优化后的标度分形塔分抗逼近效益值明显大于优化前.

5 优化标度分形塔分抗电路的实现与运算阶扩展

5.1 电路设计与仿真

当标度因子 σ 一定时, 运算阶为 μ_{Liu} ($-0.5<\mu_{Liu}<0$) 时运算特征曲线的振荡幅度与运算阶为 $-1-\mu_{Liu}$ 时的相同(图 9(b)). 当 $-0.5<\mu_{Liu}<0$ 时, 振荡幅度随运算阶 μ_{Liu} 的增大而减小. 因此, 可先分析 $-0.5<\mu_{Liu}<0$ 的情形.

在实际的工程应用中, 往往需要在指定频段内运算有效的分抗元^[1]. 对于给定的逼近带宽, 若要降低分抗的电路复杂度, 减少电路规模和设计成本, 必须考虑合适的标度特征参量取值^[2]. 尤其在给定逼近精度的条件下, 标度因子 σ 太大将无法满足不同实际需求. 由式(20), 式(21), 式(24) 和式(25)知, 标度因子的取值必须满足条件.

$$\sigma_0\leqslant\frac{|\mu_{Liu}|\cdot r_i-b_0(\mu_{Liu})}{K_0(\mu_{Liu})} \quad (33a)$$

$$\sigma_P\leqslant\frac{|\mu_{Liu}|\cdot r_i-b_P(\mu_{Liu})}{K_P(\mu_{Liu})} \quad (33b)$$

该不等式可由式(34)等价变换得到.

$$\frac{\hat{\xi}_0(\mu_{Liu},\sigma)}{|\mu_{Liu}|}\leqslant r_i,\frac{\hat{\xi}_P(\mu_{Liu},\sigma)}{|\mu_{Liu}|}\leqslant r_i \quad (34)$$

当 $-0.5<\mu_{Liu}<0$ 时, 根据式(15)、式(33), 可求出不同逼近精度下给定运算阶时, 标度特征参量对数 $\lg\alpha_0, \lg\alpha_P$ 的最大取值. 数值拟合得到的函数关系为

$$\begin{aligned} r_0:\lg\alpha_0&\approx-0.6536\cdot\mu_{Liu}-0.0291, \\ \lg\alpha_P&\approx-0.9213\cdot\mu_{Liu}-0.0766 \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} r_1:\lg\alpha_0&\approx-0.9456\cdot\mu_{Liu}-0.0939, \\ \lg\alpha_P&\approx-1.4314\cdot\mu_{Liu}-0.1646 \end{aligned} \quad (35b)$$

$$\begin{aligned} r_2:\lg\alpha_0&\approx-1.1599\cdot\mu_{Liu}-0.1328, \\ \lg\alpha_P&\approx-1.7100\cdot\mu_{Liu}-0.1958 \end{aligned} \quad (35c)$$

$$\begin{aligned} r_3:\lg\alpha_0&\approx-1.4156\cdot\mu_{Liu}-0.1702, \\ \lg\alpha_P&\approx-2.0027\cdot\mu_{Liu}-0.2174 \end{aligned} \quad (35d)$$

当 $-1<\mu_{Liu}<-0.5$ 时, α 的取值同样可由式(35)确定, 此时(35)式中的 μ_{Liu} 需替换为 $-1-\mu_{Liu}$. 优化标度分形塔分抗逼近电路的应用设计步骤如下.

- (1) 由工程需求选择运算阶 μ_{Liu} .
- (2) 根据实际问题中逼近精度要求, 由式(35)计算标度特征参量 α ; 或根据振荡幅度要求, 由式

(33) 计算标度因子 σ , 然后由式(15)求解标度特征参量 α, β .

(3) 由工程应用中工作频段要求, 计算逼近带宽. 根据公式(31)计算优化标度分形塔分抗的电路级数 k .

(4) 根据特定电路的频率下限和阻抗范围, 确定 R 和 C 的取值.

(5) 根据 α, β, R 和 C 的取值, 设计优化标度分形塔分抗逼近电路.

由上述步骤, 以 $\mu_{Liu}=-0.2, -0.5, -0.7$ 为例, 根据逼近带宽和逼近精度等条件参数计算电路参数, 设计实际优化标度分形塔分抗逼近电路. 条件参数及计算参数如表 2.

Multisim14 中仿真的幅频特征曲线和相频特征曲线(如图 12)表明, 设计的优化标度分形塔分抗逼近电路可逼近具有目标运算阶的理想分抗.

表 2 标度分形塔分抗逼近电路设计参数表

Tab. 2 Scalingfractal-pyramid fractance approximation circuit design parameter table

条件参数			计算参数			
μ_{Liu}	B/Hz	r_i	α_P	k	T	β
-0.2	$1.1028\cdot10^3$	0.05	1.3234	5	0.6085	3.0677
-0.5	$1.8672\cdot10^6$	0.20	6.0803	5	1.5678	6.0796
-0.7	$1.9392\cdot10^3$	0.20	2.4176	6	0.5477	1.4599

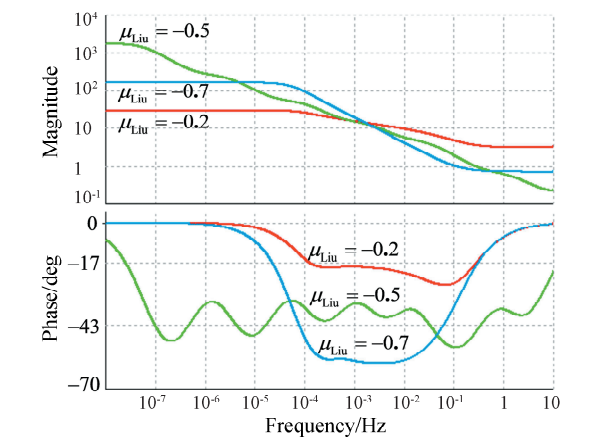


图 12 不同运算阶的频域仿真曲线

Fig. 12 Frequency-domain simulation curves of different operational orders

5.2 运算阶的扩展

以上讨论的标度分形塔分抗都是容性分抗且运算阶 $-1<\mu_{Liu}<0$. 结合通用阻抗转换器^[20-24], 使用电阻, 电容和优化标度分形塔分抗构成有源电路网络, 便可实现运算阶为 $-2<\mu_{Liu}<-1$ 的容性

分抗及 $0 < \mu_{Liu} < 2$ 的感性分抗. 通用阻抗转换器的典型电路和等效阻抗表达式为

$$Z_{GIC} = \frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5}{Z_2 \cdot Z_4} \tag{36}$$

A, B 为理想运算放大器. 当 Z_5 为 μ_{Liu} 阶优化标度分形塔分抗, Z_3 为电容时便可构成 $(\mu_{Liu} - 1)$ 阶分抗. 将 Z_4 替换为优化标度分形塔分抗, 能够实现 $(-\mu_{Liu})$ 阶分抗. 若将 Z_2 替换为电容, Z_4 为优化标度分形塔分抗可实现 $(1 - \mu_{Liu})$ 阶分抗. 以运算阶为 $\mu_{Liu} = -0.2, -0.5, -0.7$ 的优化标度分形塔分抗为基础, 设计运算阶为 $-2 < \mu_{Liu} < 2$ 的分抗. 设计参数如表 3 和表 4.

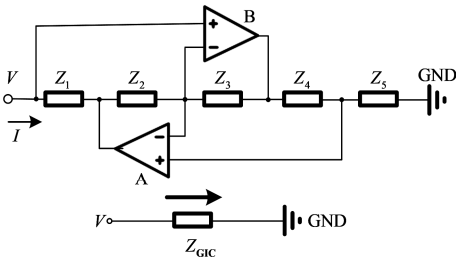


图 13 接地通用阻抗转换器(GIC)典型电路
Fig. 13 Typical circuit of grounded general impedance converter (GIC)

模拟电路的频域仿真曲线(如图 14)表明,以

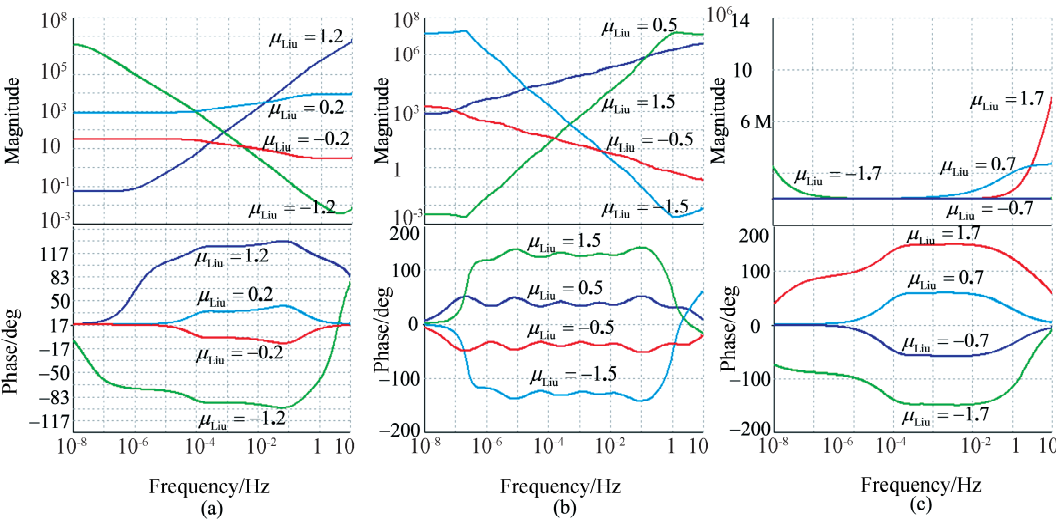


图 14 不同运算阶的频域仿真曲线图: $-2 < \mu_{Liu} < 2$

Fig. 14 Frequency-domain simulation curves of different operational orders $-2 < \mu_{Liu} < 2$

6 结 论

标度拓展 B 型分形塔分抗逼近电路, 获得具有任意分数阶运算性能的标度分形塔分抗逼近电路, 并由双重标度方程(6)式描述. 根据(16)式选

优化标度分形塔分抗为基础, 结合通用阻抗转换器设计感性分抗的方法是有效的, 该方法克服了实际电路设计中电感不易集成等问题.

表 3 运算阶为 $-2 < \mu_{Liu} < -1$ 的设计参数

Tab. 3 Design parameters with operational order $-2 < \mu_{Liu} < -1$

μ_{Liu}	Z_1/Ω	$Z_2/\text{k}\Omega$	Z_3/mF	Z_4/Ω
-1. 2	500	1	50	500
-1. 5	500	1	30	500
-1. 7	500	1	100	500

表 4 运算阶为 $0 < \mu_{Liu} < 2$ 的设计参数

Tab. 4 Design parameters with operational order $0 < \mu_{Liu} < 2$

μ_{Liu}	Z_1/Ω	Z_2	Z_3/Ω	Z_5/Ω
0. 2	500	1 k Ω	500	100
0. 5	500	100 Ω	500	500
0. 7	500	51 Ω	500	500
1. 2	500	1 mF	1 000	100
1. 5	500	25 mF	1 000	100
1. 7	500	20 mF	1 000	100

择合适的标度特征参量 α, β 能够设计任意阶分抗逼近电路. 定量分析标度拓展后的频域振荡波形并给出振荡模型函数. 根据标度因子取值, 结合频域曲线的形状特征及电阻电容的电气响应特性, 理论分析标度分形塔分抗逼近电路的优化方法. 对

比分析优化前后分抗的逼近性能. 由于电感不宜集成,提出不使用电感的条件下将优化标度分形塔分抗的运算阶由 $-1 < \mu_{\text{Liu}} < 0$ 推广到 $0 < |\mu_{\text{Liu}}| < 2$ 的设计方法 $0 < |\mu| < 2$. 由实际工程需求介绍优化标度分形塔分抗实际应用设计方案并给出实例. 理论和实验证明,本文提出的标度分形塔分抗的优化方法可行,优化标度分形塔分抗具有优良的应用价值.

标度分形塔分抗只是分抗逼近电路的一种,关于该分抗电路的优化还有如下需深入研究的问题:

(1) 是否存在优于本文的标度分形塔优化方法及优化元件参数值.

(2) 其他标度分形分抗电路同样存在频域曲线优化问题.

(3) 本文提出的优化方法是否具有普适性. 其他如四类 Liu-Kaplan 分形链分抗,标度分形格分抗等具有与标度分形塔分抗类似的频域曲线形状特征,本文的对称 T 型节是否同样可用于这些分抗的优化.

(4) 如何解析求解非正则标度方程(6). 如果能够获得该非正则标度方程解的解析表达式,或许可从数学解析的角度探讨电路优化方法及优化参数.

参考文献:

- [1] 何秋燕,袁晓. Carlson 迭代与任意阶分数微积分算子的有理逼近[J]. 物理学报, 2016, 65: 25.
- [2] Petras I. Fractional-order memristor-based chua's circuit [J]. IEEE T Circuits-II Expr, 2010, 57: 975.
- [3] Lin T C, Lee T Y. Chaos synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with time delay based on adaptive fuzzy sliding mode control [J]. IEEE T Fuzzy Syst, 2011, 19: 623.
- [4] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [5] He Q Y, Pu Y F, Yu B, *et al.* A class of fractal-chain fractance approximation circuit [J]. Int J Electron, 2020, 10: 1588.
- [6] 袁晓,冯国英. Oldham 分形链分抗类与新型 Liu-Kaplan 标度方程[C]//2015 年中国电子学会电路与系统分会第二十六届学术年会论文集. 长沙: 中国电子学会, 2015.
- [7] Matsuda K, Hironori F. H (infinity) optimized wave-absorbing control-Analytical and experimental results [J]. J Guid Control Dynam, 1993, 16: 1146.
- [8] He Q Y, Pu Y F, Yu B, *et al.* Scaling fractal-chain fractance approximation circuits of arbitrary order [J]. Circ Syst Signal Pr, 2019, 38: 4933.
- [9] Pu Y F. Analog circuit realization of arbitrary-order fractional Hopfield neural networks: a novel application of fractor to defense against chip cloning attacks [J]. IEEE Access, 2016, 4: 5417.
- [10] Wadwha C L. Network analysis and synthesis (Including Linear System Analysis) [M]. Tunbridge Wells: UK Anshan Ltd, 2008.
- [11] Pu Y F, Yuan X, Yu B. Analog circuit implementation of fractional-order memristor: arbitrary-order lattice scaling fracmemristor [J]. IEEE T Circuits-I, 2018, 65: 2903.
- [12] 余波,何秋燕,袁晓,等. 分抗的 F 特征逼近性能分析原理与应用[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 301.
- [13] Atangana A, Gómez-Aguilar J F. Decolonisation of fractional calculus rules: Breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena [J]. Eur Phys J Plus, 2018, 133: 166.
- [14] Gomez-Aguilar J F, Yopez-Martinez H, Escobar-Jimenez R F, *et al.* Series solution for the time-fractional coupled mKdV equation using the homotopy analysis method [J]. Math Probl Eng, 2016, 11: 1.
- [15] 高小龙,袁晓,施卜椿. Oldham 分形链与 Liu-Kaplan 分形链分抗的阻纳函数求解[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2019, 17: 474.
- [16] 施卜椿,高小龙,袁晓. 标度分形分抗逼近电路的零极点分布规律[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 57.
- [17] 兰永红,刘潇. 分数阶线性系统二阶 P 型迭代学习控制收敛性分析[J]. 控制工程, 2016, 3: 341.
- [18] 袁子,袁晓. 规则 RC 分形分抗逼近电路的零极点分布[J]. 电子学报, 2017, 45: 2511.
- [19] 易舟,袁晓,陶磊,等. Oldham RC 链分抗逼近电路零极点精确求解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2015, 52: 1255.
- [20] 余波,何秋燕,袁晓. 任意阶标度分形格分抗与非正则格型标度方程 [J]. 物理学报, 2018, 67: 070202.
- [21] Domansky O, Roman S, Lukas L, *et al.* Practical design of RC approximants of constant phase elements and their implementation in fractional-order PID regulators using cmos voltage differencing current conveyors [J]. Circ Syst Signal Pr, 2019, 38: 1520.

[22] Valsa J, Vlach J. RC models of a constant phase element [J]. Int J Circ Theor App, 2013, 41: 59.

[23] Ray P K, Paitar S R, Mohanty A, *et al.* A hybrid firefly-swarm optimized fractional order interval type-2 fuzzy PID-PSS for transient stability improvement [J]. IEEE T Ind Appl, 2019, 55: 6486.

[24] Adhikary A, Choudhary S, Sen S. Optimal design for realizing a grounded fractional order inductor using GIC [J]. EEE T Circuits-I, I2018, 56: 2411.

[25] Wu L, Xuan D D, Sang G L, *et al.* A self-powered and optimal SSHI circuit integrated with an active rectifier for piezoelectric energy harvesting [J]. IEEE T Circuits-I, 2017, 64: 537.

[26] Carlson G, Halijak C. Approximation of fractional-capacitors $(1/s)^{(1/n)}$ by a regular newton process [J]. IEEE T Circ Theor, 1964, 11: 494.

[27] Avishek A, Siddhartha S, Karabi B. Design and hardware realization of a tunable fractional-order series resonator with high quality factor [J]. Circ Syst Signal Pr, 2017, 36: 3457.

[28] Badri V, Tavazoei M S. Achievable performance region for a fractional-order proportional and derivative motion controller [J]. IEEE T Ind Elect, 2015, 62: 7171.

[29] Nooshin B, Hossein Z. Design of fractional robust adaptive intelligent controller for uncertain fractional-order chaotic systems based on active control technique [J]. Nonlin Dyn, 2017, 87: 1703.

引用本文格式:

中 文: 张月荣, 袁晓, 郭钊汝. 分形塔分抗逼近电路——标度拓展与优化设计原理[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2021, 58: 023004.

英 文: Zhang Y R, Yuan X, Guo Z R. Fractal-pyramid fractance approximation circuit—scaling extension and optimization design principle [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 023004.