

复合材料广义热弹性问题格点型有限体积法研究

刘琦^{1,2}, 肖光明¹, 齐文亮³, 杜雁霞¹, 刘磊¹

- (1. 中国空气动力研究与发展中心空气动力学国家重点实验室, 绵阳 621000;
2. 哈尔滨工程大学动力与能源工程学院, 哈尔滨 150001;
3. 中国航空工业集团公司西安航空计算技术研究所, 西安 710068)

摘 要: 基于 Lord-Shulman (L-S 理论)、Green-Lindsay (G-L 理论) 及经典热弹性耦合理论 (T-C 理论), 本文发展了一种适用于二维复合材料广义热弹性问题的格点型有限体积法 (CV-FVM). 运用交错网格技术, 待解变量存储在单元节点, 物性参数存储在单元中心, 控制方程空间项采用双线性四边形单元进行离散, 时间项采用欧拉隐式进行离散. 针对均质无限大方板热冲击问题, 本文对 CV-FVM 进行了数值验证, 计算结果表明, 本文发展的数值方法可以很好地捕捉热波波前和弹性波前的温度阶跃特性及热弹耦合特征. 本文采用 CV-FVM 进一步研究了不同梯度系数 p 下钛合金/氮化硅复合板的热冲击问题, 发现 L-S 理论复合板 $p=1$ 时预测的功能梯度界面应力最小; T-C、G-L 理论下, 复合板 $p=10$ 时预测的功能梯度界面应力最小, 不同耦合理论选系数 p 对界面热弹性行为影响规律并不相同, 并非材料线性分布 ($p=1$) 时界面应力幅值最小. 本文发展的 CV-FVM 可作为复合材料热波问题和广义热弹性问题求解的一种备用工具.

关键词: 有限体积法; 非傅里叶热传导; 复合材料; 热冲击; 广义热弹性理论

中图分类号: O341; O343.6 **文献标识码:** A **DOI:** 10.19907/j.0490-6756.2022.024001

Vertex-centerfinite element method for generalized
thermoelastic analysis of composite materials

LIU Qi^{1,2}, XIAO Guang-Ming¹, QI Wen-Liang³, DU Yan-Xia¹, LIU Lei¹

- (1. State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China;
2. College of Power and Energy Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;
3. Xi'an Aeronautics Computing Technique Research Institute, AVIC, Xi'an 710068, China)

Abstract: To analyze the generalized thermoelastic problem in two-dimensional composite material, a new two-dimensional vertex-center finite volume method (CV-FVM) has been developed based on Lord-Shulman (L-S)、Green-Lindsay (G-L) and traditional coupled theories. Using the staggered grid technique, the unknown variable is defined at the cell vertex, while the material property is defined at the cell center. The space terms of governing equations are discretized by bilinear quadrilateral element, and the time terms are discretized by Euler implicit formula. Thermal shock problem in infinite plate with homogeneous material is studied by CV-FVM, The results show that the present method can effectively capture the temperature jump and thermoelastic coupling characteristics at the front of the thermal wave and elastic wave. Then, the developed CV-FVM was used to study the thermal shock problem in com-

收稿日期: 2021-08-05

基金项目: 国家自然科学基金(11972359, 11972361); 国家数值风洞工程; 陕西省自然科学基金(2022JQ-564)

作者简介: 刘琦(1989—), 男, 博士, 主要研究热弹耦合、广义热冲击等. E-mail: liuqi202@hrbeu.edu.cn

posite with Ti-6Al-4V/ZrO₂ with different material constant p , the results show that the value $p=1$ minimizes the maximum (tensile) stress applied at the middle of the functionally graded layer under L-S theory, and the value $p=10$ minimizes the maximum (tensile) stress under G-L and T-C theories. The effects of p on interfacial thermoelastic response is different under different coupling theories, one cannot conclude that a linear variation of the properties minimizes the maximum stress. The developed method can be used as an alternative tool for solving thermal wave and generalized thermoelastic problems.

Keywords: Finite volume method; non-Fourier heat conduction; non-uniform composite materials; Thermal shock; Generalized thermoelastic theory

1 引言

在航空航天领域,作为热障涂层而发展的功能梯度材料(FGM)目前已被广泛应用到在各种极端高温环境下工作的机器部件,如压力容器、排气管、核工程以及飞机引擎等。宏观尺度下,FGM 的传热行为和热弹性行为的研究目前已经取得了一定的研究成果。随着纳米技术的出现,FGM 的尺度达到了微/纳米级别。伴随着激光脉冲和微/纳米尺度加工技术的发展,高热流密度冲击下 FGM 界面挠曲脱粘断裂破坏已成为各国学者关注的热点,准确描述时间极短情形下 FGM 的热力学行为尤为重要。

近几十年来,广义热弹性问题的研究主要是针对均匀材料进行开展,层和材料以及 FGM 的广义热弹性问题的研究相对较少。Nowruzpour 等^[1]基于 L-S 理论,采用状态空间法以及 Laplace 变换方法研究了 FGM 板的广义热弹性响应。他们假设材料力学性能沿板厚度方向变化,对比了不同热松弛时间以及 FGM 材料系数下的温度、位移、应力响应分布,热波波前位置处的温度没有明显阶跃。Bahtui 等^[2]基于 L-S 理论,联合 FEM 以及 Laplace 变化方法研究了热冲击下的圆柱形薄壳 FGM 体积分数对热弹性响应分布的影响。He 等^[3]基于 G-L 理论,联合 Laplace 积分变换和 FEM 方法,研究了无限大厚压电板的广义热弹-压电耦合问题,给出了温度、位移以及电势能的分布规律。Sur 等^[4]基于 G-N II 型、III 型以及三相延迟热弹模型,采用 Laplace 方法研究了 FGM 的材料非均匀系数以及热粘对温度、位移、应力及应变的影响,温度在热波波前无显著阶跃,未能体现广义热弹性理论中的热的波动特性。Chen 等采用 FVM 和 Laplace 变换方法的混合方法分析了材料温度非线性热波问题^[5],并采用相同的计算方法研

究了热辐射边界条件下的广义热弹性耦合问题^[6]。以上研究大多采用 Laplace 变换方法进行求解,然而由于 Laplace 在逆变换过程中离散和截断误差造成了精度损失,导致热波或弹性波在波前位置处可能没有显著的阶跃^[1-4]。此外,对于 FGM 的广义热弹性问题,Laplace 变换方法在逆变换过程中存在数值不稳定的问题^[7]。为了避免数值变换方法在变换过程中带来的计算误差以及数值求解过程的复杂性,Tian 等^[8]发展了时域直接求解 FEM 用于广义热弹性问题研究,获得了显著波动特性的温度分布,准确反映广义热弹性问题的热波动特性。基于 G-L 理论,熊启林等^[9]采用时域直接求解 FEM 对比研究了双层复合板在不同材料参数下界面处的热弹性行为,发现材料参数的不同将导致热穿过界面时界面的温度、位移、应力发生突变。基于 Green-Naghdi 理论 II 型和 III 型,Xiong 等^[10]研究了材料热力学性能沿径向变化的 FGM 固体的热弹性行为,发现热冲击下 FGM 的材料参数以及 G-N 理论 III 型的阻尼系数对热弹性响应有明显的影响,相比于 Laplace 变换方法,直接 FEM 计算结果在热波波前有明显的阶跃现象。基于 L-S 理论,Antonios 等^[7]采用直接 FEM 研究了表面受均匀热冲击下几种陶瓷/金属功能梯度材料的位移、温度以及应力分布,发现 FGM 材料属性从陶瓷到金属线性过渡时($P=1$),在功能梯度材料界面处的拉应力峰值最小,但对其它广义热弹理论下 FGM 界面处的热弹性行为未进行讨论。

迄今为止,在计算流体力学领域发展的有限体积分法(FVM),由于其实施简单,离散方程具有强守恒性,以及离散后方程的各项具有明确物理意义等优点,被国内外学者不断发展并成功地应用到计算固体力学领域^[11-15]。在计算复合材料热弹性问题上,相比于 FEM,FVM 获得的应力分布更为真实连续,而 FEM 无论是基于高阶单元或是基于低阶

单元, 均存在明显的应力不连续问题^[12]. 时域直接求解 FEM 已经被成功应用于广义热弹性问题的求解, 然而, 直接时域求解 FVM 在此方面上的研究工作还相对较少, Liu 等^[13]基于 L-S 理论建立了适用于 FGM 广义热弹问题时域直接求解的 FVM, 结果表明 FVM 可以和直接 FEM 一样有效捕捉热波动效应下温度在波前处的阶跃现象, 准确反映广义热弹性问题的波动特性. 本文基于 G-L 及 T-C 理论对 FVM 进一步扩展, 讨论不同热弹耦合理论下 FGM 材料系数对界面处的温度、位移和应力响应的影响.

2 控制方程

基于任意控制体 Ω 建立热传导方程和平衡方程, 其中, 控制体 Ω 的体积为 V , 控制体的边界面为 S . 研究稳态下各向同性线弹性复合材料热应力问题.

2.1 热传导方程

Ω 中能量守恒方程为:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho c \theta dV}_{\text{内能}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[t_0 \left(\theta \frac{\partial \rho c}{\partial t} \right) + (t_0 + t_2) \left(\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \right] dV}_{\text{热波存储能}} + \underbrace{\int_V \left(\frac{\partial t_0}{\partial x_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} \right) dV}_{\text{变形功}} - \underbrace{\int_V T_0 \Gamma \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + t_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right] dV}_{\text{热源}} + \underbrace{\int_V \left(Q + t_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \right) dV}_{\text{Fourier 导热}} + \oint_S k \frac{\partial \theta}{\partial x_i} n_i dS \quad (4)$$

式中, $n_i(n_x, n_y)$ 为微元面外法矢量.

边界条件:

$$\theta = \theta_B, \text{边界 } S_D \quad (5)$$

$$q = q_B, \text{边界 } S_N \quad (6)$$

式中, 下角标“B”表示边界; θ_B 为 Dirichlet 边界上给定的温度; q_B 表示 Neumann 边界上给定的热流.

温度场初始条件为:

$$\theta(x, y, 0) = 0, \frac{\partial \theta(x, y, 0)}{\partial t} = 0, q(x, y, 0) = 0 \quad (7)$$

2.2 热弹性方程

Ω 中运动平衡方程为:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{u}$ 为位移矢量; $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量; $\mathbf{f}$ 为单位质量体积力矢量.

线弹性体本够关系为^[14]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Gamma} \left(\theta + t_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = Q - T_0 \frac{\partial S_T}{\partial t} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{q}$ 为热流密度矢量; Q 为体积热源生成热; S_T 为体积熵; T_0 为参考温度.

熵平衡方程为^[14]:

$$S_T = \left(\frac{\rho c}{T_0} \right) \left(\theta + t_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \frac{\hat{\mathbf{C}}}{T_0} \cdot \nabla \theta + \boldsymbol{\Gamma} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

式中, ρ 为密度; c 为比热容; $\theta = T - T_0$ 为温度 T 与参考温度 T_0 的变化量; t_2 和 $\hat{\mathbf{C}}$ 分别为 G-L 理论引入的热松弛因子和材料系数矢量; $\boldsymbol{\Gamma}$ 为热弹性系数矩阵; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变张量.

热传导方程为^[14]:

$$\mathbf{q} + t_0 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{k} \nabla \theta - \hat{\mathbf{C}} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3)$$

式中, t_0 为 CV 模型引入的热松弛时间; $\mathbf{k}$ 为导热系数矩阵.

针对各向同性材料($\hat{\mathbf{C}}=0$), 对式(1)~式(3)简单换算后可得 Ω 内待解热传导控制方程:

针对各向同性体, 弹性模量张量 $\mathbf{C}$ 可简化为:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (10)$$

应变-位移关系为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (11)$$

式(9)和式(10)中, t_1 为 G-L 理论引入的热松弛因子; $\mathbf{C}$ 为四阶弹性模量张量; μ, λ 和 Γ 分别为材料的拉梅系数和热弹性系数, 可采用材料弹性模量 E 、泊松比 ν 以及热膨胀系数 α_i 进行表示.

$$\text{平面应变问题: } \begin{cases} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \Gamma = \frac{\alpha_i E}{1-2\nu} \end{cases}$$

$$\text{平面应力问题:} \begin{cases} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)} \\ \Gamma = \frac{\alpha E}{1-\nu} \end{cases} \quad (12)$$

将式(9)~式(11)带入式(8),可得:

$$\underbrace{\int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV}_{\text{惯性力}} = \underbrace{\oint_S \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} n_i \delta_{ij} - \Gamma \left(\theta + t_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \delta_{ij} n_j \right] dS}_{\text{表面力}} + \underbrace{\int_V \rho f_i dV}_{\text{体积力}} \quad (14)$$

边界条件:

$$u_i = u_{iB} \quad (15)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_{nB} \quad (16)$$

式中, u_{iB} 为 Dirichlet 边界上给定的位移; σ_{nB} 为 Neumann 边界上给定的力载荷。

位移场初始条件为:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

3 数值方法

本文采用双线性四边形单元划分计算域。图 1 为交错网格示意图,其中实心点为单元节点,空心点为单元中心。我们将待解变量(温度)存储在单元节点,并假设其在单元内分布一致,其余物理量(密度、比热、导热系数、热松弛时间、弹性模量等)存在单元中心,并假设在单元内分布一致;以内部节点 N_1 为例,连接相邻边中点以及单元中心建立控制体 $\Omega_{1\sim 6}$ 。

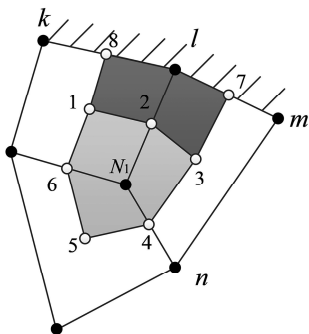


图 1 单元网格及控制体示意图^[15]

Fig. 1 Sketch map of grid and control volume^[15]

3.1 热传导方程离散

借鉴 FEM,单元内任意变量 φ 采用形函数进行插值近似:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n N_i \varphi_i \quad (18)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Gamma \nabla \left(\theta + t_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \rho \mathbf{f} \quad (13)$$

将式(13)写为张量形式并在控制体 Ω 内进行积分,得 T-C、L-S 和 G-L 理论热弹性问题待解平衡方程:

式中 N_i 为形函数; n_s 为单元内的节点数,对于 4 点四边形单元 $n_s=4$ 。四边形单元的形函数表达式为:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta_i \eta), \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (19)$$

式中 ξ_i, η_i 为四边形单元所对应的局部坐标。

为了更清晰地表达能量方程式,将其改写成如下格式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho c \theta dV &= \oint_S k \frac{\partial \theta}{\partial x_a} n_a dS - \\ &\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[t_0 \left(\theta \frac{\partial \rho c}{\partial t} \right) + (t_0 + t_2) \left(\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \right] dV + \\ &\int_V \frac{\partial t_0}{\partial x_a} \frac{\partial q_a}{\partial t} dV + \int_V \left(Q + t_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \right) dV - \\ &\int_V \Gamma T_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) + t_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \right] dV \end{aligned} \quad (20)$$

将式(19)带入式(20),将其离散为:

$$\oint_S k \frac{\partial \theta}{\partial x_a} n_a dS = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 k_{ij} \theta_{ij} \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_a} n_a dS \quad (21)$$

式中, n_c 为节点 n 周围的单元总数; θ_{ij} 为第 i 个单元的第 j 个节点的温度变化量; S_i 为第 i 个单元内控制体边界面的长度。

式(20)中左端一阶时间项采用向后差分法进行离散、二阶时间项采用向中心差分法进行离散、其余项采用节点 n 处的值进行近似,同时引入边界条件,则式(4)离散为:

$$\left(\frac{K^{t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{K_1^{t+\Delta t} + K_2^{t+\Delta t}}{\Delta t^2} \right) \theta_n^{t+\Delta t} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \psi_{ij} + Q^T \quad (22)$$

其中,

$$\begin{aligned} K^{t+\Delta t} &= \sum_{i=1}^n V_{ni} (\rho_i c_i)^{t+\Delta t}, \\ K_1^{t+\Delta t} &= \sum_{i=1}^n V_{ni} t_{0i} (\rho_i c_i)^{t+\Delta t}, \\ K_2^{t+\Delta t} &= \sum_{i=1}^n V_{ni} t_{2i} (\rho_i c_i)^{t+\Delta t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^t &= \sum_{i=1}^{nc} V_{ni} (\rho_i c_i)^t, \\ K_1^t &= \sum_{i=1}^{nc} V_{ni} t_{0i} (\rho_i c_i)^t, \\ K_2^t &= \sum_{i=1}^{nc} V_{ni} t_{2i} (\rho_i c_i)^t, \\ K_1^{t-\Delta} &= \sum_{i=1}^{nc} V_{ni} t_{0i} (\rho_i c_i)^{t-\Delta}, \\ \psi_{ij} &= k_i \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\alpha} n_\alpha dS, \\ Q^T &= \left(\frac{K^t}{\Delta t} + \frac{2K_1^t + K_2^{t+\Delta} + K_2^t}{\Delta t^2} \right) \theta_n^t - \\ &\quad \left(\frac{K_1^{t-\Delta} + K_2^t}{\Delta t^2} \right) \theta_n^{t-\Delta} + \left(\frac{dt_0}{dx_\alpha} \frac{q_\alpha^{t+\Delta} - q_\alpha^t}{\Delta t} \right)_n \sum_{i=1}^{nc} V_{ni} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{nc} V_{ni} \left(Q_i + t_{0i} \frac{Q_i^{t+\Delta} - Q_i^t}{\Delta t} \right) - \\ &\quad T_0 \sum_{i=1}^{nc} \Gamma_i V_{ni} \sum_{j=1}^{ns} \left[\frac{u_{\beta j}^{t+\Delta} - u_{\beta j}^t}{\Delta t} \left(\frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\gamma} \right)_n + \right. \\ &\quad \left. t_{0i} \frac{u_{\beta j}^{t+\Delta} - 2u_{\beta j}^t + u_{\beta j}^{t-\Delta}}{\Delta t^2} \left(\frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\gamma} \right)_n \right] - \\ &\quad \sum_{i=1}^{nN} \left(q_B^{t+\Delta} + t_{0i} \frac{q_B^{t+\Delta} - q_B^t}{\Delta t} \right) |A_{Bi}| \end{aligned} \tag{23}$$

其中, $|A_{Bi}|$ 为处于边界上第 i 个单元的面积矢量的模; n_N 为处于 Neumann 边界上的单元个数.

3.2 热弹性方程离散

采用类似处理方法, 热弹性方程离散为:

$$\begin{aligned} M \frac{u_{\alpha i}^{t_{n+1}}}{\Delta t^2} &= \sum_{i=1}^{nc} \sum_{j=1}^{ns} (\Psi_{ij}^1 u_{\alpha j}^{t_{n+1}} + \Psi_{ij}^2 u_{\beta j}^{t_{n+1}}) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{nc} \sum_{j=1}^{ns} (\Psi_{ij}^3 u_{\gamma j}^{t_{n+1}}) + Q^F \end{aligned} \tag{24}$$

式中

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}^1 &= \mu_i \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\beta} n_\beta dS, \\ \Psi_{ij}^2 &= \mu_i \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\alpha} n_\beta dS, \\ \Psi_{ij}^3 &= \lambda_i \int_{S_i} \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_\gamma} n_\alpha dS, \\ \Theta_{ij} &= -\Gamma_i \int_{S_i} N_{ij} n_\alpha dS, \\ Q^F &= \sum_{i=1}^{nc} V_{ni} \rho_i f_\alpha^{t_{n+1}} + \sum_{i=1}^{nN} \sigma_{q\beta} A_{Bi} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{nc} \sum_{j=1}^{ns} \left\{ \Theta_{ij} \left[\theta_j^{t_{n+1}} + t_{1i} \left(\frac{\theta_j^{t_{n+1}} - \theta_j^{t_n}}{\Delta t} \right) \right] \right\} + \\ &\quad M \frac{2u_{\alpha i}^{t_n} - u_{\alpha i}^{t_{n-1}}}{\Delta t^2} \end{aligned} \tag{25}$$

式(23)和式(25)中有关形函数及其空间导数的积分项在标准坐标系下进行计算, 具体计算流程可见

文献[15].

为方便数值计算, 引入以下无量纲参数:

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{x_i}{\xi_m} m, \quad u_i^* = \frac{(2\mu_m + \lambda_m) u_i}{\xi_m \Gamma_m T_0}, \quad t^* = \frac{t c_m}{\xi_m}, \\ \sigma_{ij}^* &= \frac{\sigma_{ij}}{\Gamma_m T_0}, \quad \theta^* = \frac{\theta}{T_0}, \quad q_i^* = \frac{\xi_m q_i}{k_m T_0} \end{aligned} \tag{26}$$

式中, C_E 表示弹性波波速; 下角标“m”表示金属基体. 特征长度 ξ_m 及特征速度 c_m 为:

$$\xi_m = \frac{k_m}{C_{Em} \sqrt{\rho_m (\lambda_m + 2\mu_m)}}, \quad c_m = \sqrt{\frac{\lambda_m + 2\mu_m}{\rho_m}} \tag{27}$$

为方便表示, 下文不显示无量纲角标“*”.

4 数值求解和数值算例

采用 FORTRAN 语言实现本文计算方法, 开始计算之前, 将与网格信息相关的形函数导数、积分点位置、形函数积分作为几何常数进行一次性存储, 减少计算量. 对于临近单元存在 Dirichlet 边界的节点采用置大数法将其导热系数矩阵或刚度矩阵相应的行进行处理. 离散后的热传导及热弹性方程采用直接求解法进行求解.

4.1 热弹性耦合理论 CV-FVM 算法验证

针对一半无限大方板热冲击问题^[16-18]进行数值验证, 采用三种耦合理论进行求解. 计算模型如图 2 所示, 计算过程中不考虑热波和弹性波在方板边界处的反射. 方板左侧受 $\theta = H(t) \theta_0$, $\theta_0 = 1$ 的热冲击作用, 其余三个边界绝热, 方板右侧施加固支约束. 为节省计算资源, 将计算域沿 x 轴方向分为两部分, 仅将区域 1 内 ($0 \leq x \leq 2$) 的网格进行加密, 采用均匀四边形网格进行网格划分, 网格密度为 60×30 . 区域 2 内采用非均匀四边形网格进行划分, 网格增长率为 1.1, 网格密度为 60×30 , 网格模型如图 2b 所示. 材料选取为不锈钢, 其物性参数见表 1. 根据波动方程性质, 无量纲热波和弹性波波速分别为 $C_T = 1/(t_0 + t_2)^{1/2}$, $C_E = 1$. 针对 T-C 理论下热弹性问题, 选取 $\delta_e = 0$ 和 $\delta_e = 1$ 进行算法验证; 针对 L-S 和 G-L 理论下热弹性问题选取 $\delta_e = 0$, $\delta_e = 0.05$ 和 $\delta_e = 0.36$ 进行算法验证.

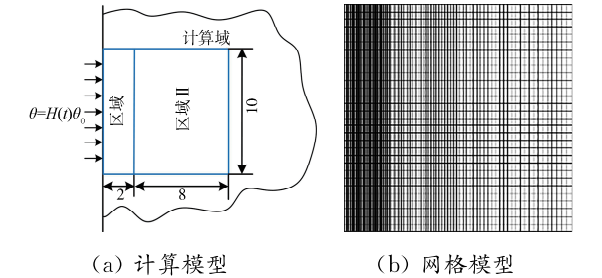


图 2 半无限大方板热冲击作用下耦合热弹性响应问题
Fig. 2 Semi-infinite square plate subjected to a step surface heating

计算初始条件为:

$$\theta(x,y,0)=0,\frac{\partial \theta(x,y,0)}{\partial t}=0,$$
$$q(x,y,0)=0,u(x,y,0)=0,\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0$$

(28)

表 1 不锈钢物性参数

Tab.1 Material properties of stainless steel

$k/(W\cdot m^{-1}\cdot ^\circ C^{-1})$	λ/GPa	μ/GPa	$\rho/(kg\cdot m^{-3})$	$c/(J\cdot kg^{-1}\cdot ^\circ C^{-1})$	$T_0/^\circ C$
12.14	142	75.8	8166	396	300

4.1.1 T-C 理论 CV-FVM 算例验证 图 3 给出了方板 $x=1$ 处(弹性波 $t=1$ 时刻波前位置)的无量纲温度、位移以及应力随时间的变化规律. 从图

3 可以看出 CV-FVM 结果与 FEM 和解析解^[16]得到的结果吻合良好. 相比于无耦合计算结果,热弹性耦合作用导致温度、位移以及应力响应峰值明显降低. 从图 3a 可以看出,耦合作用加速了弹性波波前位置处温度扩散速度,在弹性波波前产生了一个“负”的温度梯度,导致区域($x=1$)内温度降低. 在弹性波经过该区域后温度扩散速度逐渐降低,温度逐渐恢复并趋近无耦合作用的温度结果. 发生上述现象的原因是热能和机械能转换主要发生在波前位置处. 从图 3b, 3c 可以看出,相比于 CV-FVM 结果,FEM 得到的位移和应力幅值明显偏低,同时应力在弹性波波前位置处存在明显的振荡现象.

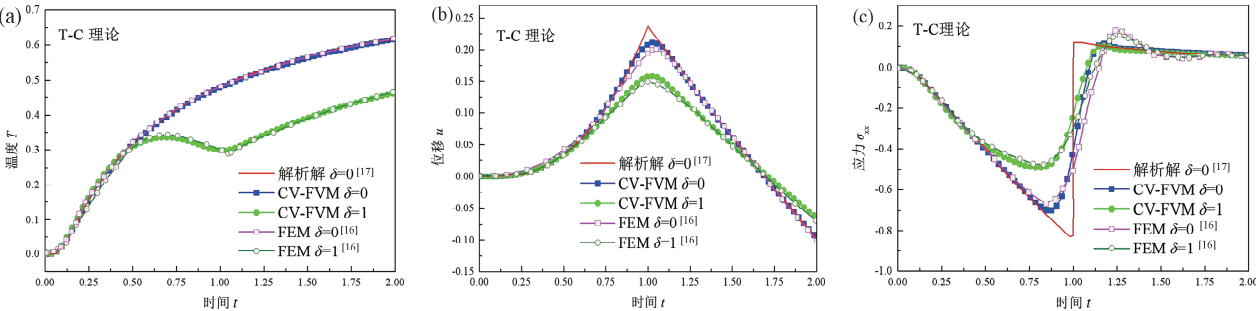


图 3 $x=1$ 处不同时刻的热弹性响应(无量纲)
Fig. 3 The thermoelastic response at $x=1$ versus time

4.1.2 L-S、G-L 理论 CV-FVM 算例验证 图 4 为方板沿 x 轴方向不同时刻温度分布. 从图 4 可以看出,L-S 和 G-L 理论的热波在波前均有明显突跳现象,二者预测的温度形式无明显区别,随着时间的推进,热波强度逐渐降低. 不同耦合系数下 L-

S 和 G-L 理论下的得到温度曲线中均出现了两个激烈的温度波动,分别由弹性波(靠前)和热波(靠后)引起. 随着耦合系数的增大,弹性波引起的温度扰动越提前,热扰动越强烈,影响范围越大,同时热波引起的温度扰动幅值降低.

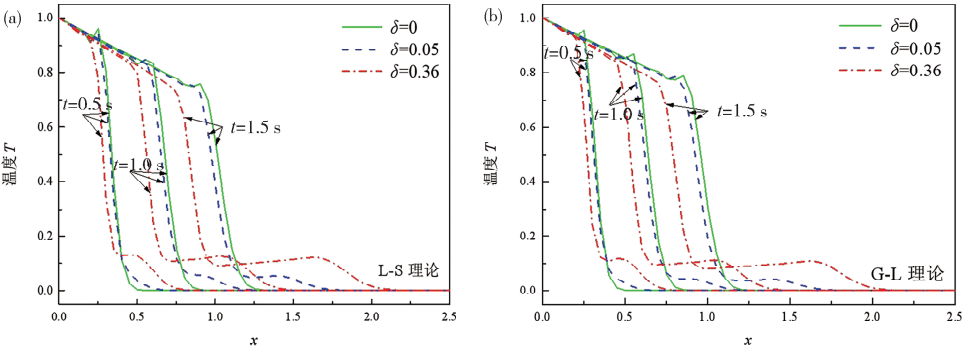


图 4 沿 x 轴方向不同时刻温度 T 的变化规律(无量纲)
Fig. 4 The temperature T distributions at different times along the x direction

图 5 为基于 L-S 和 G-L 理论下方板 $x=1$ 处不同时刻下温度分布曲线. 对比图 5 和图 3 可以发现,受热波效应的影响,L-S 和 G-L 理论下方板内 $x=1$ 处的温度分布形式明显区别于 T-C 理论计算

结果(图 3a). L-S 和 G-L 理论下热波速度分别为 $C_T^L = \sqrt{1/t_0} = \sqrt{1/2}$ 和 $C_T^G = \sqrt{1/t_2} = \sqrt{1/2.25}$,热波到达 $x=1$ 处所需时间 t 约为 1.414 s 和 1.5 s. 当耦合系数 $\delta_e=0$ 时, $x=1$ 处的

温度完全由热波波前决定,热波未到达区域处的温度保持为 0;当耦合系数 $\delta_e \neq 0$ 时,热弹性耦合作用导致 $x=1$ 处温度提前出现阶跃,由弹性波引起,这

和从图 4 中观察到的现象一致. 同时,从图 5 可以看出 CV-FVM 温度计算结果与 BEM^[17] 算结果吻合较好.

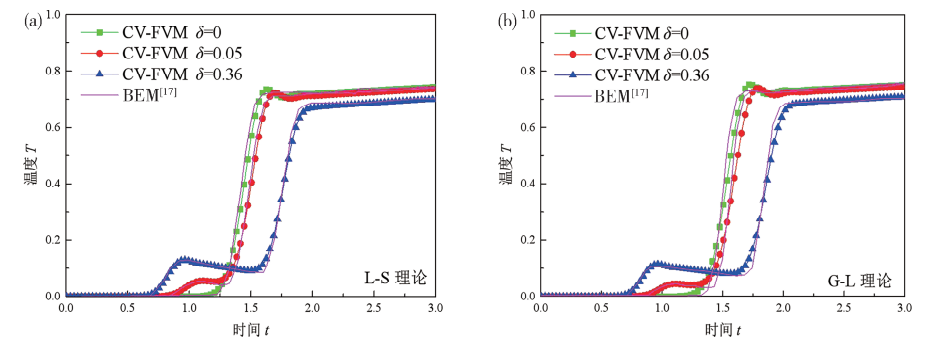


图 5 $x=1$ 处温度 T 随时间的变化规律(无量纲)
Fig. 5 The temperature T distributions versus time at $x=1$

图 6 和图 7 为基于 L-S 和 G-L 理论下沿 x 轴方向和 $x=1$ 位置处不同时刻位移分布. 从图 6 和图 7 可以看出,L-S 和 G-L 理论下的位移响应幅值均随着耦合系数的增大而降低,但二者位移响应分布规律明显不同. G-L 理论下的位移响应较 L-S

理论下的结果更为剧烈,对应位移峰值更高. G-L 理论下应力松弛时间 t_1 的引入明显改变了位移响应的分布形式,使得温度波动对位移和应力的作用更加明显. CV-FVM 预测的位移响应与 BEM 结果吻合较好.

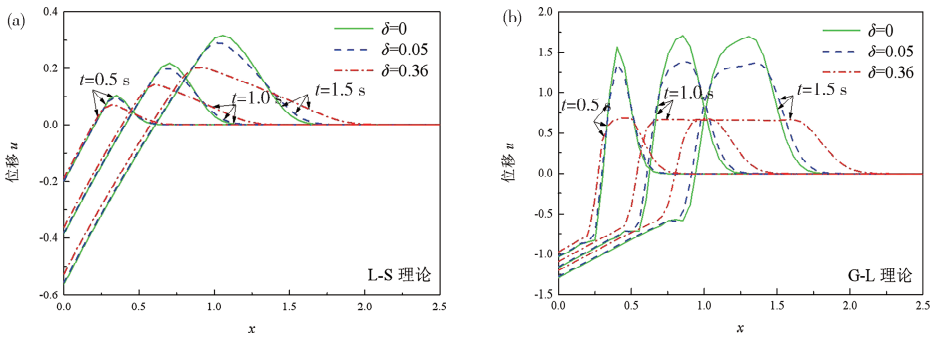


图 6 沿 x 轴方向不同时刻位移 u 的变化规律(无量纲)
Fig. 6 Distributions of displacement u at different times along the x direction

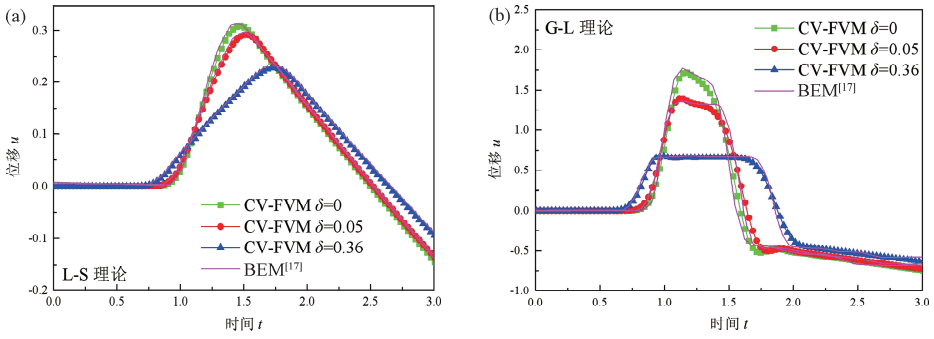


图 7 $x=1$ 处位移 u 随时间的变化规律(无量纲)
Fig. 7 The displacement u distributions versus time at $x=1$

图 8 和图 9 给出了方板沿 x 轴方向和 $x=1$ 处的应力分布规律. 从图 8 和图 9 可以看出,耦合系数对 L-S 和 G-L 理论下的应力分布的影响与对位移分布的影响相一致,相比于 L-S 理论计算结果,G-L 理论下的应力响应更为剧烈,峰值更高. 图9b

给出了 Prevosr^[16] 及 Chen^[18] 耦合系数 $\delta_e=0$ 时计算结果,对比发现,基于 G-L 理论采用 CV-FVM 预测的应力结果与文献预测结果分布规律相同,仅在应力峰值上存在差别.

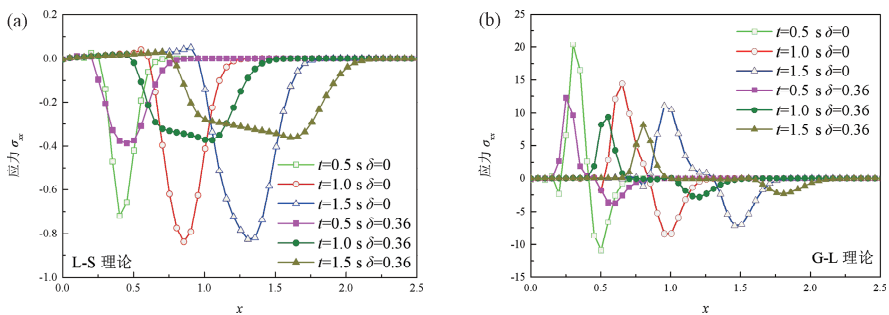


图 8 沿 x 轴方向应力 σ_{xx} 随时间的变化规律(无量纲)
Fig. 8 Distributions of stress σ_{xx} at different times along the x direction

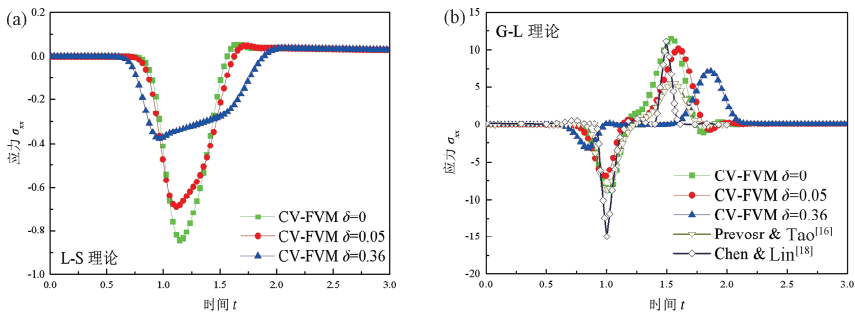


图 9 $x=1$ 处应力 σ_{xx} 随时间的变化规律(无量纲)
Fig. 9 The stress σ_{xx} distributions versus time at $x=1$

4.2 FGM 复合板热弹性行为的研究

考虑文献[7]陶瓷/金属功能复合板上端面($x=0$)受热冲击下瞬态热冲击问题(图 10),本文采用 G-L、T-C 理论对其进行进一步研究. 冲击强度 $\theta=1$. 计算时我们考虑了热波和弹性波在矩形板下端面($x=1$)的反射. 模型无量纲计算域为 $H\times L=1\times 10$,我们采用均匀四边形单元对其进行网格划分. 我们采用平面应变假设进行求解,计算过程中不考虑界面热松弛时间 t_0 的空间梯度对热弹性分布的影响. 计算初始条件为:

$$\theta(x,y,0)=0, \frac{\partial \theta(x,y,0)}{\partial t}=0$$

$$q(x,y,0)=0, u(x,y,0)=0, \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0 \tag{29}$$

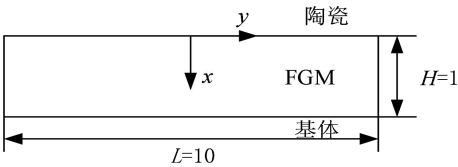


图 10 陶瓷/金属复合板热冲击作用下热弹性问题
Fig. 10 The thermoelastic response problem of the ceramic/metal composite plate under thermal shock

表 2 涂层、基体物性参数^[13](参考温度为 300 K)

材料	$k/(\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1})$	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$c/(\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1})$	E/GPa	ν	$\alpha/(10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1})$	$t^0/\text{无量纲}$
氧化铬	1.78	5700	529.27	168	0.298	8.20	1.56
钛合金	6.26	4429	586.46	106	0.298	6.27	0.64

物性参数采用 Voigt 混合律模型进行计算,其有效物性参数 $P_{\text{eff}}(x)$ 表示为:
$$P_{\text{eff}}(x)=P_{\text{m}}V_{\text{m}}(x)+P_{\text{c}}(1-V_{\text{m}}(x)) \tag{30}$$

式中, P_{m} 为金属材料物性; P_{c} 为陶瓷材料物性; V_{m} 为沿 x 方向金属材料体积分数. V_{m} 的表达式采用 Sigmoid 函数给出:

$$V_{\text{m}}(x)=\begin{cases} 1-\frac{(2x)^p}{2}, & 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ \frac{(2-2x)^p}{2}, & \frac{1}{2}<x\leq 1 \end{cases} \tag{31}$$

式中, p 为描述材料空间变化的指数系数. 数值模拟选取 $p=0.1, 1, 10$.
任意层内的弹性波波速 C_{E} 和热波波速 C_{T} 为:

$$C_E = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho c_m^2}}, C_T = \sqrt{\frac{k}{\rho c \xi_m c_m (t_0 + t_2)}} \quad (32)$$

根据式(32)可以得到双层金属/涂层复合板内的弹性波 C_E 和热波波速 C_T (表 3).

表 3 全陶瓷/金属双层复合板金属域和陶瓷域内特征长度、特征速度、热波速度和弹性波速度

Tab. 3 The characteristic length, the characteristic speed, thermal and elastic wave speeds in different materials

材料	特征长度 ξ /(10 ⁻¹⁰ m)	特征速度 C /(10 ³ m/s)	热波速度 C_T /无量纲	弹性波速度 C_E /无量纲
氧化铬	4.28	5.65	0.395	1.111
钛合金	4.28	5.65	1.25	1.0

图 10 和图 11 给出了基于 L-S 理论材料指数系数 $p=1$ 时不同时间的位移响应和温度响应分布. 根据表 3, 氧化铬涂层内 $C_E^{ZrO_2} = 1.111$, 金属基体内 $C_E^{Ti-6Al-4V} = 1.0$. 由于两种材料内弹性波的波速无明显区别, 使得弹性波在 FGM 介质的传播速度基本保持不变, 如图 10 所示. 由于两种材料内热波的波速存在明显区别, 氧化铬涂层内 $C_T^{ZrO_2} = 0.395$, 金属基体内 $C_T^{Ti-6Al-4V} = 1.25$. 沿 x 轴方向随着金属材料体积分数的不断增大, FGM 复合板内的热波速度逐渐增加并趋近于金属基体的热波波速, 如图 11 所示. 在 $t \approx 1.5$ 时热波到达右端面 $x=1$ 处, 并经右端面向左端面进行反射.

基于 L-S 理论, 图 12 给出了 $p=0.1$, $p=1$ 和 $p=10$ 时 Ti-6Al-4V/ZrO₂ 复合功能型材料交界面 $x=0.5$ 处的温度、位移以及应力随时间的变化曲线. 从图 14a 和 14b 可以看出, 随着材料指数系数 p 的增大, 热波传播速度明显降低, 热强度峰值明显降低, 同时热波达到稳定时的温度降低. 产生这种现象的原因主要是随着 p 的增大, 在 $0 \leq x \leq 0.5$

区域内导热系数降低, 沿 x 方向温度梯度增大, 导致 $x=0.5$ 处温度幅值降低 (如图 15). 从图 14b 可以看出, 随着 p 的增大, $x=0.5$ 处的位移响应降低. 相比于位移响应, 温度扰动更快达到稳定. 从图 14c 应力响应分布可以看出, $p=1$ 时复合材料界面处的拉应力峰值最小, 这和文献[7]中应力变化规律一致.

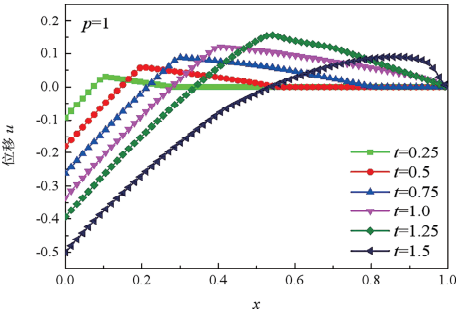


图 10 不同时刻位移 u 的分布 (无量纲)
Fig. 10 Displacement distributions at different times

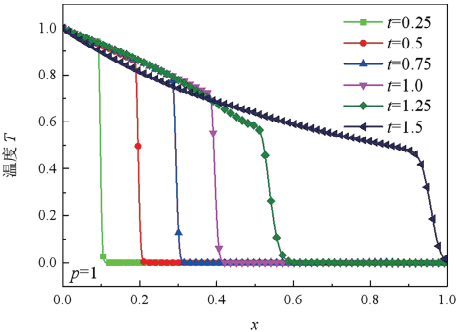


图 11 不同时刻温度 T 的分布 (无量纲)
Fig. 11 Temperature distributions at different times

为了体现研究的广义热弹性问题的热波动以及热-机耦合特性, 在 $t=0$ 时刻陶瓷端施加压力 $F=1$ 的机械冲击并与热冲击载荷计算结果进行对比, 对比结果如图 12 和图 13 所示.

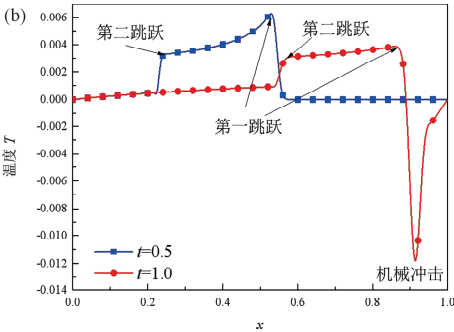
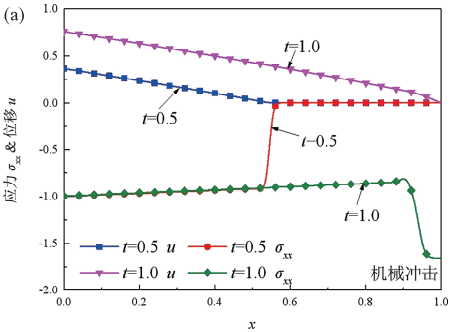


图 12 机械冲击作用下沿 x 轴方向不同时刻位移 u 、应力 σ_{xx} 和温度 T 的分布规律 (无量纲)
Fig. 12 Displacement u , stress σ_{xx} and temperature T distributions along the x direction under mechanical shock

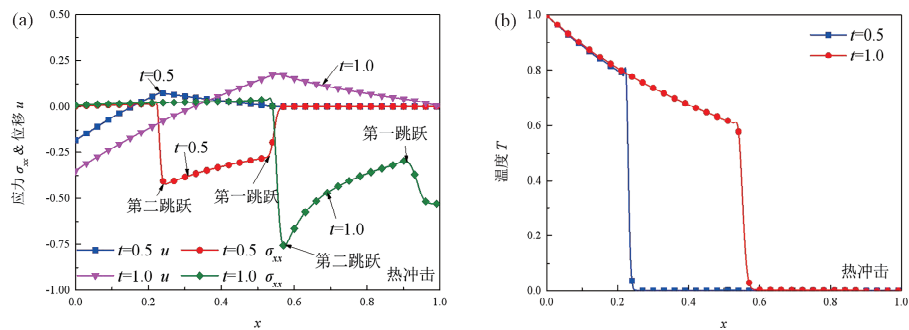


图 13 热冲击作用下沿 x 轴方向不同时刻位移 u 、应力 σ_{xx} 和温度 T 的分布规律(无量纲)
Fig. 13 Displacement u , stress σ_{xx} and temperature T distributions along the x direction under thermal shock

从图 12 中可以看出,机械冲击仅在弹性波波前产生应力阶跃,同时机械冲击由于热弹性耦合作用而引起的温度波动十分微小,但仍然存在由弹性波和热波引起的温度阶跃现象. 从图 13 中可以看出热冲击载荷下应力波和热波波前存在两次阶跃,温度响应在热波波前位置处仅存在一次阶跃. 热冲击作用下,冲击作用面($y=0$)由于温度的升高产生膨胀作用,同时由热波诱导产生的机械波也会产生压缩作用,导致热冲击作用面具有最大的膨胀位移,并随着 x 的增加不断减小,变成压缩位移,最终在弹性波波前位置处消失.

图 16 给出了 G-L 理论下的计算结果. 假设 G-L 理论下的热松弛时间 $t_1=t_2=t_0$,从图 15a 可以看出 G-L 理论下的温度响应和 L-S 理论下的温度响应(图 14a)基本一致,当 $p=0.1$ 时的温度响应峰值最大. 从图 16b 可以看出,G-L 理论下的位移响应结果明显高于 L-S 理论计算结果(图 14b),同时,当 $p=1$ 时的位移的响应峰值最大. G-L 理论下的应力响应峰值的预测规律与 L-S 理论明显不同,这是由应力松弛时间 t_1 的引入所致. 当 $p=10$ 时 G-L 理论下的拉应力响应峰值最小.

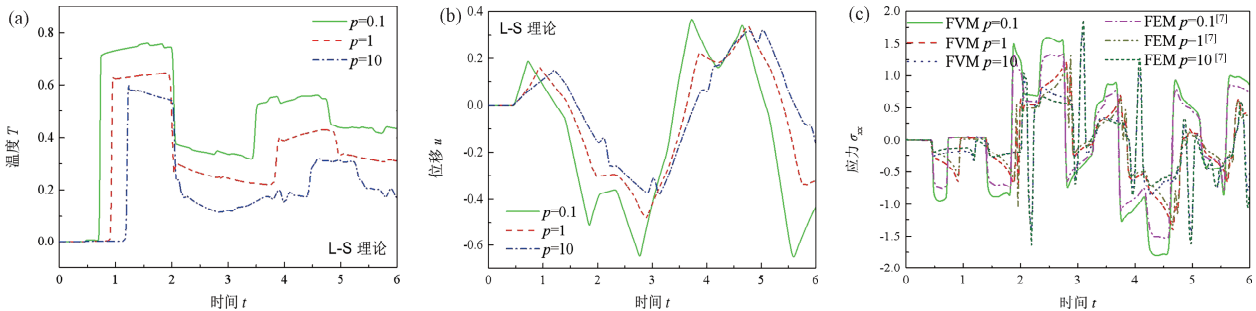


图 14 $x=0.5$ 处温度 T 、位移 u 和应力 σ_{xx} 随时间的变化规律(无量纲)
Fig. 14 Variation of temperature T , displacement u and stress σ_{xx} versus time at $x=0.5$

图 17 给出了 T-C 理论下温度、位移以及应力响应计算结果. 由于 T-C 理论假设热波的传播速度为无限大, $x=0.5$ 处的温度很快趋于稳定,与 L-S 理论和 G-L 理论预测的温度响应规律一致. 在

$0 < x < 0.5$ 区域内的陶瓷含量越大(p 越大),温度响应峰值越小(如图 17a). 同时,从图 17b 和图 17c 中可以看出, $p=10$ 时的位移响应峰值和拉应力响应峰值最小.

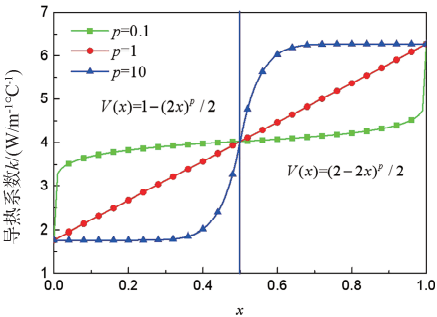


图 15 导热系数 k 沿 x 轴方向的变化规律
Fig. 15 Variation of thermal conductivity k in the x direction

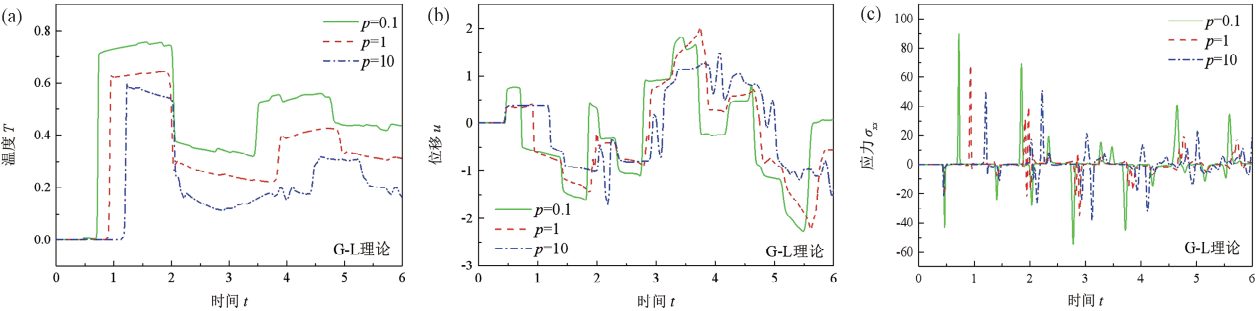


图 16 $x=0.5$ 处温度 T 、位移 u 和应力 σ_{xx} 随时间的变化规律(无量纲)
Fig. 16 Variation of temperature T , displacement u and stress σ_{xx} versus time at $x=0.5$

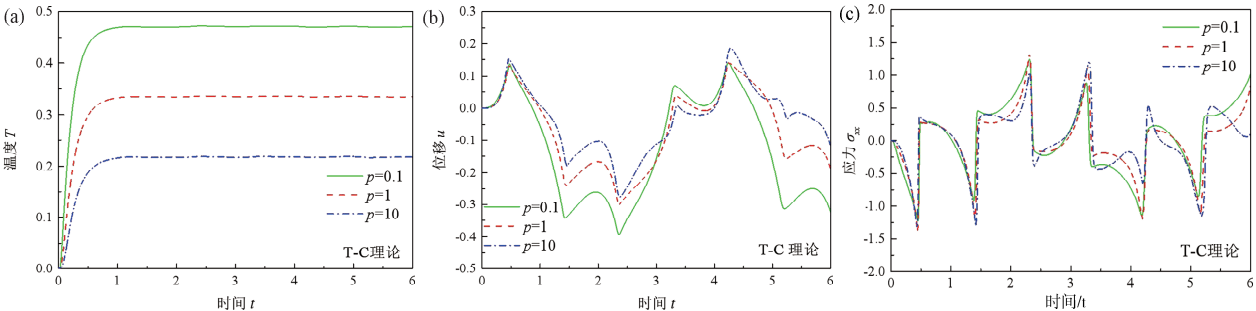


图 17 $x=0.5$ 处温度 T 、位移 u 和应力 σ_{xx} 随时间的变化规律(无量纲)
Fig. 17 Variation of temperature T , displacement u and stress σ_{xx} versus time at $x=0.5$

表 4 Ti-6Al-4V/ZrO₂ 复合板 $x=0.5$ 处温度 T 、位移 u 和应力 σ_{xx} 的分布(无量纲)
Tab. 4 Distributions of temperature T , displacement u and stress σ_{xx} for the Ti-6Al-4V/ZrO₂ composite plate at $x=0.5$

耦合理论	$p=0.1$			$p=1$			$p=10$		
	$T_{\max}$	$u_{\max}$	$\sigma_{\max}$	$T_{\max}$	$u_{\max}$	$\sigma_{\max}$	$T_{\max}$	$u_{\max}$	$\sigma_{\max}$
L-S	0.758	0.365	1.5979	0.645	0.335	1.231	0.598	0.32	1.662
G-L	0.757	1.82	89.692	0.644	2.003	66.851	0.598	1.505	50.54
T-C	0.472	0.140	1.242	0.335	0.141	1.321	0.218	0.185	1.231

从图 14、图 16 和图 17 的对比结果中可以看出,基于三种耦合理论的计算结果存在明显区别.当材料的梯度系数 p 增大时,三种耦合理论下的温度峰值变化一致,随着陶瓷层内陶瓷体积分数 p 增加,温度响应峰值降低,同时温度扰动达到稳定的速度要快于位移扰动达到稳定的速度.不同指数系数 p 下,G-L 理论下的位移响应和应力响应峰值最大. L-S 理论下 $p=1$ 时交界面处的拉应力峰值最小;G-L 理论和 T-C 理论下 $p=10$ 时交界面处的拉应力峰值最小(表 4). 相比与 L-S 和 T-C 理论下的计算结果,G-L 理论由于热松弛时间 t_1 的引入导致位移和应力响应幅值显著增强,幅值变化更为剧烈.

5 结 论

本文基于 L-S、G-L、T-C 耦合理论,发展了一

种适用于复合材料广义热弹性问题时域直接求解的 CV-FVM 方法. 基于双线性四边形单元,对控制方程的离散过程进行了详细推导. 针对均质无限大方板热冲击问题对 CV-FVM 的求解过程进行了数值验证. 计算结果表明,本文发展的数值方法可以很好地捕捉热波波前和弹性波前的阶跃特性,以及热弹耦合特性. 相比于 FEM,本文的计算应力分布在弹性波波前位置处更为稳定. 本文采用三种热弹性耦合理论对不同梯度系数 p 下钛合金/氮化硅复合板的热冲击问题进行了对比研究,针对本文算例,我们发现 L-S 理论复合板 $p=1$ 时预测的界面应力最小;T-C、G-L 理论下,复合板 $p=10$ 时预测的界面应力最小. G-L 理论由于热松弛时间 t_1 的引入导致位移和应力响应幅值显著增强,应力变化更为剧烈.

参考文献:

- [1] Nowruzpour M S M, Naei M H, Mehrian S Z. Dynamic response for a functionally graded rectangular plate subjected to thermal shock based on LS theory [J]. Appl Mech Mater, 2013; 332: 381.
- [2] Bahtui A, Eslami M R. Generalized coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells [J]. Int J Numer Meth Eng, 2007, 69: 676.
- [3] He T, Tian X, Shen Y. Two-dimensional generalized thermal shock problem of a thick piezoelectric plate of infinite extent [J]. Int J Eng Sci, 2002, 40: 2249.
- [4] Sur A, Kanoria M. Thermoelastic interaction in a viscoelastic functionally graded half-space under three-phase-lag model [J]. Eur J Comput Mech, 2014, 23: 179.
- [5] Chen H T, Lin J Y. Numerical solution of two-dimensional nonlinear hyperbolic heat conduction problems [J]. Numer Heat Tr B: Fund, 1994, 25: 287.
- [6] Chen H T, Lin H J. Study of transient coupled thermoelastic problems with relaxation times [J]. J Appl Mech, 1995, 62: 208.
- [7] Nikolarakis A M, Theotokoglou E E. Transient analysis of a functionally graded ceramic/metal layer considering Lord-Shulman theory [J]. Math Probl Eng, 2018, 2018: 7371016.
- [8] Tian X G, Shen Y P. Study on generalized magneto-thermoelastic problem by FEM in time domain [J]. Acta Mech Sinica, 2005, 21: 380.
- [9] 熊启林, 田晓耕, 沈亚鹏, 等. 瞬态热冲击下层合材料板界面的热弹性行为[J]. 力学学报, 2011, 43: 630.
- [10] Xiong Q L, Tian X G. Thermoelastic study of an infinite functionally graded body with a cylindrical cavity using the Green-Naghdi model [J]. J Therm Stresses, 2012, 35: 718.
- [11] Liu Q, Ming P J. A high-order control volume finite element method for 3-D transient heat conduction analysis of multilayer functionally graded materials [J]. Numer Heat Tr B: Fund, 2018, 73: 363.
- [12] Chareonsuk J, Vessakosol P. Numerical solutions for functionally graded solids under thermal and mechanical loads using a high-order control volume finite element method [J]. Appl Therm Eng, 2011, 31: 213.
- [13] Liu Q, Peng Q, Ming P J. A control volume finite element method for the thermoelastic problem in functional graded material with one relaxation time [J]. P I Mech Eng C: J Mec, 2021, 235: 254.
- [14] Bagri A, Eslami M R. A unified generalized thermoelasticity; solution for cylinders and spheres [J]. Int J Mech Sci, 2007, 49: 1325.
- [15] 刘琦, 明平剑, 张文平. 二维不可压材料线弹性有限体积法的研究[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 795.
- [16] Prevost J H, Tao D. Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems with relaxation times [J]. J Appl Mech, 1983, 50: 817.
- [17] Chen J, Dargush G F. Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analyses [J]. Int J Solids Struct, 1995, 32: 2257.
- [18] Chen H T, Lin H J. Study of transient coupled thermoelastic problems with relaxation time [J]. J Appl Mech, 1995, 62: 208.

引用本文格式:

中文: 刘琦, 肖光明, 杜雁霞, 等. 复合材料广义热弹性问题格点型有限体积法研究[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2022, 59: 024001.

英文: Liu Q, Xiao G M, Du Y X, *et al.* Vertex-center finite element method for generalized thermoelastic analysis of composite materials [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 024001.