doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2017. 01. 004

超顶点代数 L_{c_m} 的 σ -正则性

朱晓婧

（四川大学数学学院，成都，610064）

摘　要：设 L_{c_m} 是关于 $N=2$ 超共形代数的超顶点代数，其中 $c_m=\frac{3m}{m+2}$. 2001 年，Adamović 证明了 L_{c_m} 的正则性. 本文考虑超顶点代数 L_{c_m} 和自同构 σ，证明了 L_{c_m} 的 σ -正则性，这里 $\sigma|_{(L_{c_m})_{\bar{0}}}=id$ 且 $\sigma|_{(L_{c_m})_{\bar{1}}}=-id$.

关键词：超顶点代数；σ -正则；σ -twisted 模

中图分类号：O152.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)01-0019-10

σ -regularity of the vertex superalgebra L_{c_m}

ZHU Xiao-Jing

(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Let L_{c_m} is vertex superalgebra associated to the $N=2$ superconformal algebra with $c_m=\frac{3m}{m+2}$. Adamović give the proof of the regularity of L_{c_m} in 2001. In this paper, we consider the vertex superalgebra L_{c_m} and the automorphism σ, which satisfy $\sigma|_{(L_{c_m})_{\bar{0}}}=id$ and $\sigma|_{(L_{c_m})_{\bar{1}}}=-id$. We give the proof of the σ -regularity of L_{c_m}.

Keywords: Vertex superalgebra; σ -regularity; σ -twisted module

(2010 MSC 15A04)

1 引　言

类似于结合代数或李代数的半单性质，顶点代数的正则性是指它的模是完全可约的. 为研究顶点代数的模不变性，我们需要研究顶点代数的正则性. 上世纪末，董崇英等[1]证明了一些特殊的顶点代数的正则性，Virasoro 代数就是其中的一类. 由于超顶点代数在很多方面都和顶点代数相似，于是我们可以考虑超顶点代数是否也具有正则性.

设 A 是 $N=2$ 的超共形代数，基为 $L(n)$，$T(n)$，$G^{\pm}(r)$，C，其中 $n\in\mathbf{Z}$，$r\in\frac{1}{2}+\mathbf{Z}$. 我们考虑由最高权向量 v 与 central charge $c_m=\frac{3m}{m+2}$ 生成的 Verma 模 M_{c_m}，其中 $L(0)v=0$，$T(0)v=0$. 设 J_{c_m} 是 M_{c_m} 的极大 $U(A)$ -子模，其中 $U(\cdot)$ 为包络代数，则 $L_{c_m}=M_{c_m}/J_{c_m}$ 是不可约的最高权模. 由文献[2]知，L_{c_m} 是单的超顶点算子代数，并且具有正则性. 我们知道，对于超顶点代数而言，不仅有一般的模，而且还出现了关于某个自同构 g 的 twisted 模. 为了研究超顶点代数的 g- twisted 模不变性，我们需要考虑超顶点代数是否是 g- 正则的. 由于 L_{c_m} 是很简单的一种超顶点代数，因此在本文中我们取定特殊的自同构 σ 来研究 L_{c_m} 的超顶点代数结构的 σ -正则性.

投稿日期：2014-04-04

基金项目：国家自然科学基金(11126069)

作者简介：朱晓婧(1990－)，女，山西人，硕士，主要研究方向为表示论. E-mail：zxj1008@qq.com

L_{c_m} 的正则性已经得到了证明. 设 $\mathfrak{g}$ 是生成元为x,y,h的李代数 sl_2，关系为 $[x,y]=h,[h,x]=2x,[h,y]=-2y$. 考虑邓肯型为 $A_1^{(1)}$ 的仿射李代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}$. 设 Λ_0 与 Λ_1 为 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 的基本权，对任意的复数 m，j,记不可约的最高权模 $L(m,j)=L((m-j)\Lambda_0+j\Lambda_1)$. 则由文献[3]可知，$L(m,0)$有自然的顶点算子代数的结构. 设 V_L 为由格构造的超顶点代数，若 $L=\mathbf{Z}\alpha$，其中 $(\alpha,\alpha)=n$，则记 $V_{\mathbf{Z}\alpha}=F_n$.

在文献[2]中，作者证明了超顶点代数 $L_{c_m}\otimes F_{-1}$同构于 B_m 的 simple current 扩张 $\bar{B}_m$,其中 $B_m=L(m,0)\otimes F_{-2(m+2)}$,$\bar{B}_m=B_m\oplus\widetilde{B}_m$ 是超顶点代数，满足$(\bar{B}_m)_{\bar{0}}=B_m,(\bar{B}_m)_{\bar{1}}=\widetilde{B}_m$,并利用该构造及 $\bar{B}_m$ 的正则性给出了超顶点算子代数 L_{c_m} 满足正则性的结论. 本文考虑超顶点代数 L_{c_m} 的一个特殊自同构 σ，满足条件 $\sigma|_{(L_{c_m})_{\bar{0}}}=id,\sigma|_{(L_{c_m})_{\bar{1}}}=-id$. 主要结果是按照文献[2]的思路证明了 L_{c_m} 的 σ-正则性.

本文分为五个部分，第二部分回忆了超顶点代数和超顶点代数的 g-twisted 模的定义，并证明了若 V^1 和 V^2 是超顶点代数，M_1 是 σ-twisted V^1-模，M_2 是 σ-stable σ-twisted V^2-模，则 $M=M_1\otimes M_2$ 是 σ-twisted $V^1\otimes V^2$-模. 第三部分回忆了由格构造的超顶点代数的定义，给出了超顶点代数 F_{-1} 的不可约 σ-stable σ-twisted 模. 第四部分证明了 $\bar{B}_m$ 的σ-正则性. 超顶点代数 L_{c_m} 的σ-正则性则在第五部分给出了证明.

2 预备知识

定义 2.1 超顶点代数 V 是一个四元组 $(V,1,D,Y)$，其中 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 是 $\mathbf{Z}_2$ 分次的线性空间，D 是 V 的一个 $\mathbf{Z}_2$-自同态，1 称为 V 的 vacuum vector，Y 是线性态射

$$Y(\cdot,z):V\to(\mathrm{End}V)[[z,z^{-1}]]$$

$$a\to Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_nz^{-n-1},(a_n\in\mathrm{End}V),$$

对任意的 $a,b\in V$，满足下列条件：

(V1) 当 $n\geqslant 0$ 时，$a_nb=0$，

(V2) $Y(1,z)=id_V$，

(V3) $Y(a,z)1\in(V)[[z]]$，并且有 $\lim\limits_{z\to 0}Y(a,z)1=a$，

(V4) $[D,Y(a,z)]=Y(D(a),z)=\dfrac{d}{dz}Y(a,z)$，

(V5) 下面的 Jacobi 等式成立

$$z_0\delta(\frac{z_1-z_2}{z_0})Y(a,z_1)Y(b,z_2)-$$

$$\varepsilon_{a,b}z_0\delta(\frac{z_2-z_1}{-z_0})Y(b,z_2)Y(a,z_1)=$$

$$z_2\delta(\frac{z_1-z_0}{z_2})Y(Y(a,z_0)b,z_2)\qquad(1)$$

其中 $\varepsilon_{a,b}=(-1)^{|a||b|}$，当 $a\in V_{\bar{i}}$时，$|a|=i$.

由文献[4]可知，在超顶点代数 V 中，对任意的 $a,b\in V$，分别存在正整数 m 和 n，使得下面的式子

$$(z_1-z_2)^mY(a,z_1)Y(b,z_2)=$$

$$\varepsilon_{a,b}(z_1-z_2)^mY(b,z_2)Y(a,z_1)\qquad(2)$$

$$(z_1+z_2)^nY(Y(a,z_1)b,z_2)=$$

$$(z_1+z_2)^nY(a,z_1+z_2)Y(b,z_2)\qquad(3)$$

成立. 我们称式(2)为超交换性，式(3)为结合性.

命题 2.2[4] 超顶点代数的 Jacobi 等式与超交换性是等价的.

命题 2.3 若 $V^1=(V^1,1^1,D_1,Y_1)$ 和 $V^2=(V^2,1^2,D_2,Y_2)$ 是超顶点代数,则 $V=V^1\otimes V^2=(V,1,D,Y)$ 也是超顶点代数，其中 $V_{\bar{0}}=(V_{\bar{0}}^1\otimes V_{\bar{0}}^2)\oplus(V_{\bar{1}}^1\otimes V_{\bar{1}}^2),V_{\bar{1}}=(V_{\bar{0}}^1\otimes V_{\bar{1}}^2)\oplus(V_{\bar{1}}^1\otimes V_{\bar{0}}^2)$，$1=1^1\otimes 1^2$，对任意的 $u,u^1,u^2\in V^1,v,v^1,v^2\in V^2,D(u\otimes v)=(u\otimes v)_{-2}1,Y(u^1\otimes v^1,z)(u^2\otimes v^2)=\varepsilon_{u^1,v^2}Y_1(u^1,z)u^2\otimes Y_2(v^1,z)v^2$.

证明 对任意的 $u,u^1,u^2\in V^1,v,v^1,v^2\in V^2$，我们需要验证如下条件：

(V1) 由于

$$Y(\cdot,z):V\to(\mathrm{End}V)[[z,z^{-1}]]$$

$$u^1\otimes v^1\to Y(u^1\otimes v^1,z)=$$

$$\sum_{n\in ?}(u^1\otimes v^1)_nz^{-n-1},((u^1\otimes v^1)_n\in\mathrm{End}V),$$

以及 $Y(u^1\otimes v^1,z)(u^2\otimes v^2)=\varepsilon_{u^1,v^2}Y_1(u^1,z)u^2\otimes Y_2(v^1,z)v^2$，即 $(u^1\otimes v^1)_n(u^2\otimes v^2)=\varepsilon_{u^1,v^2}\sum\limits_{p+q=n-1}u_p^1u^2\otimes v_q^1v^2$，所以当 n 很大时，p 或者 q 必然很大，根据 V^1 和 V^2 的性质，我们有 $(u^1\otimes v^1)_{\mathrm{n}}(u^2\otimes v^2)=0$.

(V2) 因为 $Y(1,z)(u^1\otimes v^1)=Y(1^1\otimes 1^2,z)(u^1\otimes v^1)=Y_1(1^1,z)u^1\otimes Y_2(1^2,z)v^1=u^1\otimes v^1$，所以有 $Y(1,z)=id_V$.

(V3) 因为 $(u^1\otimes v^1)_n(1^1\otimes 1^2)=\sum\limits_{p+q=n-1}u_p^11^1\otimes v_q^11^2$，所以当 $n\geqslant 0$ 时，有 $p\geqslant 0$ 或者 $q\geqslant 0$，根据 V^1 和 V^2 的性质有$(u^1\otimes v^1)_n(1^1\otimes 1^2)=0$. 当 $z\to 0$ 时，$Y(u^1\otimes v^1,z)1=Y_1(u^1,z)1^1\otimes$

$$Y_2(v^1,z)1^2=u^1\otimes v^1.$$

(V4) $D(u^1\otimes v^1)=(u^1\otimes v^1)_{-2}1=\sum\limits_{p+q=-3}u_p^11^1$

$\otimes v_q^1 1^2 = (u^1)_{-2}1^1 \otimes (v^1)_{-1}1^2 + (u^1)_{-1}1^1 \otimes (v^1)_{-2}1^2 = D_1(u^1) \otimes v^1 + u^1 \otimes D_2(v^1)$. 由于 V^1 和 V^2 都是 $\mathbf{Z}_2$ -分次的，所以有

$$|D(u)| = |u_{-2}1| = |u|.$$

我们首先证明

$$Y(D(u^1 \otimes v^1), z)(u^2 \otimes v^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y(u^1 \otimes v^1, z)(u^2 \otimes v^2).$$

实际上，

$$\begin{aligned}
&Y(D(u^1 \otimes v^1), z)(u^2 \otimes v^2) = \\
&Y(D_1(u^1) \otimes v^1, z)(u^2 \otimes v^2) + \\
&Y(u^1 \otimes D_2(v^1), z)(u^2 \otimes v^2) = \\
&\varepsilon_{u^1, v^2} Y_1(D_1(u^1), z)u^2 \otimes Y_2(v^1, z)v^2 + \\
&\varepsilon_{u^1, v^2} Y_1(u^1, z)u^2 \otimes Y_2(D_2(v^1), z)v^2 = \\
&\varepsilon_{u^1, v^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y_1(u^1, z)u^2 \otimes Y_2(v^1, z)v^2 + \\
&\varepsilon_{u^1, v^2} Y_1(u^1, z)u^2 \otimes \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y_2(v^1, z)v^2 = \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\varepsilon_{u^1, v^2} Y_1(u^1, z)u^2 \otimes Y_2(v^1, z)v^2) = \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y(u^1 \otimes v^1, z)(u^2 \otimes v^2).
\end{aligned}$$

然后证明

$$[D, Y(u^1 \otimes v^1, z)](u^2 \otimes v^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y(u^1 \otimes v^1, z)(u^2 \otimes v^2).$$

实际上，

$$\begin{aligned}
&[D, Y(u^1 \otimes v^1, z)](u^2 \otimes v^2) = \\
&[D_1 \otimes id_{V^1}, Y(u^1 \otimes v^1, z)](u^2 \otimes v^2) + \\
&[id_{V^2} \otimes D_2, Y(u^1 \otimes v^1, z)](u^2 \otimes v^2) = \\
&(D_1 \otimes id_{V^1}) Y(u^1 \otimes v^1, z)(u^2 \otimes v^2) - \\
&Y(u^1 \otimes v^1, z)(D_1 \otimes id_{V^1})(u^2 \otimes v^2) + \\
&(id_{V^2} \otimes D_2) Y(u^1 \otimes v^1, z)(u^2 \otimes v^2) - \\
&Y(u^1 \otimes v^1, z)(id_{V^2} \otimes D_2)(u^2 \otimes v^2) = \\
&\varepsilon_{u^1, v^2}(DY_1(u^1, z)u^2 \otimes Y_2(v^1, z)v^2 - \\
&Y_1(u^1, z)D(u^2) \otimes Y_2(v^1, z)v^2) + \\
&\varepsilon_{u^1, v^2}(Y_1(u^1, z)u^2 \otimes DY_2(v^1, z)v^2 - \\
&Y_1(u^1, z)u^2 \otimes Y_2(v^1, z)D(v^2)) = \\
&\varepsilon_{u^1, v^2}[D, Y_1(u^1, z)]u^2 \otimes Y_2(v^1, z)v^2 + \\
&\varepsilon_{u^1, v^2} Y_1(u^1, z)u^2 \otimes [D, Y_2(v^1, z)]v^2 = \\
&\varepsilon_{u^1, v^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y_1(u^1, z)u^2 \otimes Y_2(v^1, z)v^2 + \\
&\varepsilon_{u^1, v^2} Y_1(u^1, z)u^2 \otimes \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y_2(v^1, z)v^2 = \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\varepsilon_{u^1, v^2} Y_1(u^1, z)u^2 \otimes Y_2(v^1, z)v^2) = \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y(u^1 \otimes v^1, z)(u^2 \otimes v^2).
\end{aligned}$$

即有 $Y(D(u^1 \otimes v^1), z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y(u^1 \otimes v^1, z) = [D, Y(u^1 \otimes v^1, z)]$.

（V5）由命题 2.2，知 Jacobi 等式成立等价于超交换性成立，即要说明对任意的 $u^1, u^2 \in V^1$，$v^1, v^2 \in V^2$，存在正整数 m，使得

$$(z_1 - z_2)^m Y(u^1 \otimes v^1, z_1) Y(u^2 \otimes v^2, z_2) = \varepsilon_{u^1 \otimes v^1, u^2 \otimes v^2}(z_1 - z_2)^m Y(u^2 \otimes v^2, z_2) Y(u^1 \otimes v^1, z_1)$$

成立. 由于 V^1 和 V^2 是超顶点代数，所以满足超交换性，即对任意的 $u^1, u^2 \in V^1, v^1, v^2 \in V^2$，分别存在 m_1 和 m_2，使得

$$(z_1 - z_2)^{m_1} Y_1(u^1, z_1) Y_1(u^2, z_2) = \varepsilon_{u^1, u^2}(z_1 - z_2)^{m_1} Y_1(u^2, z_2) Y_1(u^1, z_1)$$

和

$$(z_1 - z_2)^{m_2} Y_2(v^1, z_1) Y_2(v^2, z_2) = \varepsilon_{v^1, v^2}(z_1 - z_2)^{m_2} Y_2(v^2, z_2) Y_2(v^1, z_1)$$

成立，取 $m = \mathrm{Max}\{m_1, m_2\}$，下面我们只需证明该等式作用在 V 中的任意元上都成立即可，任取 $u^3 \otimes v^3 \in V$.

$$\begin{aligned}
&(z_1 - z_2)^m Y(u^1 \otimes v^1, z_1) Y(u^2 \otimes v^2, z_2)(u^3 \otimes v^3) = \\
&(z_1 - z_2)^m \varepsilon_{u^2, v^3} Y(u^1 \otimes v^1, z_1)(Y_1(u^2, z_2)u^3 \otimes Y_2(v^2, z_2)v^3) = \\
&(z_1 - z_2)^m \varepsilon_{u^2, v^3} \varepsilon_{u^1, v^2 + v^3} Y_1(u^1, z_1) Y_1(u^2, z_2)u^3 \otimes Y_2(v^1, z_1) Y_2(v^2, z_2)v^3 = \\
&\varepsilon_{u^2, v^3} \varepsilon_{u^1, v^2 + v^3}(z_1 - z_2)^m Y_1(u^1, z_1) Y_1(u^2, z_2)u^3 \otimes Y_2(v^1, z_1) Y_2(v^2, z_2)v^3 = \\
&\varepsilon_{u^2, v^3} \varepsilon_{u^1, v^2 + v^3}(z_1 - z_2)^m Y_1(u^2, z_2) Y_1(u^1, z_1)u^3 \otimes Y_2(v^1, z_1) Y_2(v^2, z_2)v^3 = \\
&\varepsilon_{u^2, v^3} \varepsilon_{u^1, v^2 + v^3} Y_1(u^2, z_2) Y_1(u^1, z_1)u^3 \otimes (z_1 - z_2)^m Y_2(v^1, z_1) Y_2(v^2, z_2)v^3 = \\
&\varepsilon_{u^2, v^3} \varepsilon_{u^1, v^2 + v^3} Y_1(u^2, z_2) Y_1(u^1, z_1)u^3 \otimes (z_1 - z_2)^m Y_2(v^2, z_2) Y_2(v^1, z_1)v^3 = \\
&\varepsilon_{u^2, v^3} \varepsilon_{u^1, v^2 + v^3}(z_1 - z_2)^m Y_1(u^2, z_2) Y_1(u^1, z_1)u^3 \otimes Y_2(v^2, z_2) Y_2(v^1, z_1)v^3 = \\
&\varepsilon_{u^2, v^3} \varepsilon_{u^1, v^2 + v^3}(z_1 - z_2)^m \varepsilon_{u^2, v^1 + v^3} Y(u^2 \otimes v^2, z_2)(Y_1(u^1, z_1)u^3 \otimes Y_2(v^1, z_1)v^3) =
\end{aligned}$$

$$(z_1-z_2)^m\varepsilon_{u^2,v^3}\varepsilon_{u^1,v^2+v^3}\varepsilon_{u^2,v^1+v^3}\varepsilon_{u^1,v^3}Y(u^2\otimes v^2,z_2)Y(u^1\otimes v^1,z_1)(u^3\otimes v^3)=$$
$$(z_1-z_2)^m(-1)^{|u^1||v^2|+|v^1||u^2|}Y(u^2\otimes v^2,z_2)Y(u^1\otimes v^1,z_1)(u^3\otimes v^3)=$$
$$\varepsilon_{u^1\otimes v^1,u^2\otimes v^2}(z_1-z_2)^mY(u^2\otimes v^2,z_2)Y(u^1\otimes v^1,z_1)(u^3\otimes v^3).$$

综上所述，$V^1\otimes V^2$ 是超顶点代数. 证毕.

定义 2.4[4] 超顶点代数 V 的自同构 g 是指 V 的一个线性同构，并且满足对任意的 $a\in V$，$gY(a,z)g^{-1}=Y(g(a),z)$. 我们记 V 的自同构群为 $\mathrm{Aut}(V)$.

设 $V=(V,1,D,Y)$ 为超顶点代数，g 是 V 的有限阶自同构，它的阶为 T，我们有如下的特征空间分解

$$V=\oplus_{r\in\mathbf{Z}/T\mathbf{Z}}V_r,$$

其中 $V_r=\{a\in V\mid ga=\mathrm{e}^{-2\pi ir/T}a\}$. 下面我们给出 g- twisted 模的定义.

定义 2.5[5] g- twisted V-模是一个二元组 (M,Y_M)，其中 M 为线性空间，Y_M 为线性态射

$$Y_M(\cdot,z):V\to(\mathrm{End}M)[[z^{1/T},z^{-1/T}]]$$

$$a\to Y_M(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Q}}a_nz^{-n-1},(a_n\in\mathrm{End}M),$$

对任意的 $a\in V$，$w\in M$，满足下列条件：

(M1) 当 $n\geqslant 0$ 时，$a_nw=0$，

(M2) $Y_M(1,z)=id_M$，

(M3) 对任意的 $a\in V_r$，$0\leqslant r\leqslant T-1$，有

$$Y_M(a,z)=\sum_{n\in r/T+?}a_nz^{-n-1},$$

(M4) 对任意的 $a\in V_r$，$b\in V$，下面的 g- twisted Jacobi 等式成立

$$z_0\delta(\frac{z_1-z_2}{z_0})Y_M(a,z_1)Y_M(b,z_2)-$$
$$\varepsilon_{a,b}z_0\delta(\frac{z_2-z_1}{-z_0})Y_M(b,z_2)Y_M(a,z_1)=$$
$$z_2(\frac{z_1-z_0}{z_2})^{-r/T}\delta(\frac{z_1-z_0}{z_2})Y_M(Y(a,z_0)b,z_2)\quad(4)$$

在文献[5]中，作者证明了对于 g- twisted V-模 $M=(M,Y_M)$，任取 $a\in V_r$，$b\in V$，分别存在正整数 m 和 n，使得下面的式子

$$(z_1-z_2)^mY_M(a,z_1)Y_M(b,z_2)=$$
$$\varepsilon_{a,b}(z_1-z_2)^mY_M(b,z_2)Y_M(a,z_1)\quad(5)$$
$$(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{r/T}Y_M(Y(a,z_0)b,z_1)=$$
$$(z_0+z_1)^nY_M^o(a,z_0+z_1)Y_M(b,z_1)\quad(6)$$

成立，其中 $Y_M^o(a,z)=z^{r/T}Y_M(a,z)$. 我们称式(5)为 twisted 超交换性，式(6)为 twisted 结合性.

命题 2.6[6] 设 $V=(V,1,D,Y)$ 为超顶点代数，g 是 V 的有限阶自同构，它的阶为 T，那么 g- twisted Jacobi 等式成立等价于 twisted 超交换性和 twisted 结合性同时成立.

定义 2.7 设 V 是超顶点代数，M 是 g- twisted V-模，若 M 可以分解为不可约的 g- twisted V-模的直和，则称 M 是 g- 正则的.

定义 2.8 设 $M=(M,Y_M)$ 是 g- twisted V-模，$k\in\mathrm{Aut}(V)$. 我们可以定义 kgk^{-1}-twisted V-模 $(k\circ M,Y_{k\circ M})$，使得 $k\circ M$ 与 M 作为线性空间是相等的，并且有

$$Y_{k\circ M}(a,z)=Y_M(k^{-1}a,z),(a\in V).$$

若 $k\circ M$ 与 M 作为 V 模是同构的话，则称 M 是 k-stable 的.

文献[5]指出，如果 $M=(M,Y_M)$ 是 g- twisted V-模，$h\in\mathrm{Aut}(V)$，并且满足 $h\circ M$ 与 M 作为 V 模是同构的，那么存在一个线性态射 $\varphi(h):M\to M$，使得对任意的 $a\in V$，有

$$\varphi(h)Y_M(a,z)\varphi(h)^{-1}=Y_M(g(a),z).$$

以下我们约定 σ 均指超顶点代数 V 的自同构，并且满足 $\sigma|_{V_{\bar{0}}}=1$，$\sigma|_{V_{\bar{1}}}=-1$，显然这时 $V_0=V_{\bar{0}}$，$V_1=V_{\bar{1}}$.

下面我们来讨论 σ-stable σ-twisted V-模 M 的分级，设 $M=(M,Y_M)$ 是 σ-stable σ-twisted V-模，即 $\sigma\circ M$ 与 M 作为 V 模是同构的，且存在线性态射 $\varphi(\sigma):M\to M$，使得对任意的 $a\in V$，有 $\varphi(\sigma)Y_M(a,z)\varphi(\sigma)^{-1}=Y_M(\sigma(a),z)$ 成立，从而有 $\varphi(\sigma)(\varphi(\sigma)Y_M(a,z)\varphi(\sigma)^{-1})\varphi(\sigma)^{-1}=\varphi(\sigma)Y_M(\sigma(a),z)\varphi(\sigma)^{-1}=Y_M(a,z)$，也就是说 $\varphi(\sigma)^2Y_M(a,z)=Y_M(a,z)\varphi(\sigma)^2$，

由于 M 是不可约的，由 Schur 引理可得 $\varphi(\sigma)^2$ 为常数，从而我们可以取到适当的 φ，使得 $\varphi^2=1$. 由于 φ 的特征值为 1 和 -1，从而有 $M=M_{\bar{0}}\oplus M_{\bar{1}}$，其中 $M_{\bar{0}}=\{m\in M\mid\varphi(m)=m\}$，$M_{\bar{1}}=\{m\in M\mid\varphi(m)=-m\}$，这样就给出了 M 的分级. 对任意的 $a\in V$，$w\in M$，有 $\varphi Y_M(a,z)w=Y_M(\sigma(a),z)\varphi(w)$，即 $\varphi(a_nw)=\sigma(a)_n\varphi(w)=(-1)^{|a|}(-1)^{|w|}a_nw=(-1)^{|a|+|w|}a_nw$.

命题 2.9 若 V^1 和 V^2 是超顶点代数，M_1 是 σ-twisted V^1-模，M_2 是 σ-stable σ-twisted V^2-模，则 $M=M_1\otimes M_2$ 是 σ-twisted $V^1\otimes V^2$-模，其中对任意的 $u^1\in V^1$，$v^1\in V^2$，$w_1\in M_1$，$w_2\in M_2$，

$Y_M(u^1\otimes v^1,z)(w_1\otimes w_2)=\varepsilon_{u^1,w_2}Y_{M_1}(u^1,z)w_1\otimes Y_{M_2}(v^1,z)w_2$.

证明　对任意的 $u^1\in V^1,v^1\in V^2,w_1\in M_1,w_2\in M_2$，我们需要验证如下条件：

(M1) 由于

$$Y_M(\cdot,z):V^1\otimes V^2\to(\mathrm{End}(M_1\otimes M_2))[[z^{1/2},z^{-1/2}]]u^1\otimes v^1\to Y_M(u^1\otimes v^1,z)(w_1\otimes w_2)=\varepsilon_{u^1,w_2}Y_{M_1}(u^1,z)w_1\otimes Y_{M_2}(v^1,z)w_2,$$

以及

$$Y_M(u^1\otimes v^1,z)(w_1\otimes w_2)=\varepsilon_{u^1,w_2}Y_{M_1}(u^1,z)w_1\otimes Y_{M_2}(v^1,z)w_2,$$

即

$$(u^1\otimes v^1)_n(w_1\otimes w_2)=\varepsilon_{u^1,w_2}\sum_{p+q=n-1}u^1_pw_1\otimes v^1_qw_2.$$

所以当 n 很大时，p 或者 q 必然很大，根据超顶点代数的性质有 $(u^1\otimes v^1)_n(w_1\otimes w_2)=0$.

(M2) 因为

$$Y_M(1,z)(w_1\otimes w_2)=Y_M(1^1\otimes 1^2,z)(w_1\otimes w_2)=Y_{M_1}(1^1,z)w_1\otimes Y_{M_2}(1^2,z)w_2=w_1\otimes w_2,$$

所以 $Y_M(1,z)=id_M$.

(M3) 下面我们分情况来讨论，当 $u^1\otimes v^1\in(V^1\otimes V^2)_0$ 时，若 $u^1\in V^1_0,v^1\in V^2_0$，则有

$$Y_M(u^1\otimes v^1)(w_1\otimes w_2)=\varepsilon_{u_1,w_2}Y_{M_1}(u^1,z)w_1\otimes Y_{M_2}(v^1,z)w_2=\varepsilon_{u_1,w_2}\sum_{p\in\mathbf{Z}}u^1_pw_1\otimes\sum_{q\in\mathbf{Z}}v^1_qw_2=\varepsilon_{u_1,w_2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{p+q=n-1}u^1_pw_1\otimes v^1_qw_2=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(u^1\otimes v^1)_n(w_1\otimes w_2).$$

若 $u^1\in V^1_1,v^1\in V^2_1$，则有

$$Y_M(u^1\otimes v^1)(w_1\otimes w_2)=\varepsilon_{u_1,w_2}Y_{M_1}(u^1,z)w_1\otimes Y_{M_2}(v^1,z)w_2=\varepsilon_{u_1,w_2}\sum_{p\in 1/2+?}u^1_pw_1\otimes\sum_{q\in 1/2+?}v^1_qw_2=\varepsilon_{u_1,w_2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{p+q=n-1}u^1_pw_1\otimes v^1_qw_2=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(u^1\otimes v^1)_n(w_1\otimes w_2).$$

当 $u^1\otimes v^1\in(V^1\otimes V^2)_1$ 时的结论可类似得出.

(M4) 由命题 2.6 知道，σ-twisted Jacobi 等式成立等价于 twisted 超交换性和 twisted 结合性同时成立，由于 M_1 和 M_2 都是 σ-twisted 模，所以满足 twisted 超交换性，即对任意的 $u^1,u^2\in V^1$，$v^1,v^2\in V^2$，分别存在正整数 m_1 和 m_2，使得

$$(z_1-z_2)^{m_1}Y_{M_1}(a,z_1)Y_{M_1}(b,z_2)=\varepsilon_{a,b}(z_1-z_2)^{m_1}Y_{M_1}(b,z_2)Y_{M_1}(a,z_1)$$

和

$$(z_1-z_2)^{m_2}Y_{M_2}(a,z_1)Y_{M_2}(b,z_2)=\varepsilon_{a,b}(z_1-z_2)^{m_2}Y_{M_2}(b,z_2)Y_{M_2}(a,z_1)$$

成立. 并且 M^1 和 M^2 也同时满足 twisted 结合性，即对任意的 $u^1\in V^1_{r_1},u^2\in V^1,v^1\in V^2_{r_2},v^2\in V^2$，分别存在正整数 n_1 和 n_2，使得

$$(z_0+z_1)^{n_1}(z_1+z_0)^{r_1/2}Y_{M_1}(Y_1(a,z_0)b,z_1)=(z_0+z_1)^{n_1}Y^o_{M_1}(a,z_0+z_1)Y_{M_1}(b,z_1)$$

和

$$(z_0+z_1)^{n_2}(z_1+z_0)^{r_2/2}Y_{M_2}(Y_2(a,z_0)b,z_1)=(z_0+z_1)^{n_2}Y^o_{M_2}(a,z_0+z_1)Y_{M_2}(b,z_1)$$

成立.

取 $m=\mathrm{Max}\{m_1,m_2\},n=\mathrm{Max}\{n_1,n_2\}$. 对任意的 $u^1\otimes v^1\in V_r,w_1\in M_1,w_2\in M_2$，twisted 超交换性可类似命题 2.3 得出，下面来证明 twisted 结合性.

$$\begin{aligned}&(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{\frac{r}{2}}Y_M(Y(u^1\otimes v^1,z_0)u^2\otimes v^2,z_1)(w_1\otimes w_2)=\\&(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{r/2}\varepsilon_{u^1,v^2}Y_M(Y_1(u^1,z_0)u^2\otimes Y_2(v^1,z_0)v^2,z_1)(w_1\otimes w_2)=\\&(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{r/2}\varepsilon_{u^1,v^2}\varepsilon_{u^1+u^2,w_2}Y_{M_1}(Y_1(u^1,z_0)u^2,z_1)w_1\otimes Y_{M_2}(Y_2(v^1,z_0)v^2,z_1)w_2=\\&\varepsilon_{u^1,v^2}\varepsilon_{u^1+u^2,w_2}(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{r/2}Y_{M_1}(Y_1(u^1,z_0)u^2,z_1)w_1\otimes Y_{M_2}(Y_2(v^1,z_0)v^2,z_1)w_2=\\&\varepsilon_{u^1,v^2}\varepsilon_{u^1+u^2,w_2}(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{r/2}Y^0_{M_1}(u^1,z_0+z_1)Y_{M_1}(u^2,z_1)w_1\otimes Y_{M_2}(Y_2(v^1,z_0)v^2,z_1)w_2=\\&\varepsilon_{u^1,v^2}\varepsilon_{u^1+u^2,w_2}Y^0_{M_1}(u^1,z_0+z_1)Y_{M_1}(u^2,z_1)w_1\otimes(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{r/2}Y_{M_2}(Y_2(v^1,z_0)v^2,z_1)w_2=\\&(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{r/2}\varepsilon_{u^1,v^2}\varepsilon_{u^1+u^2,w_2}Y^0_{M_1}(u^1,z_0+z_1)Y_{M_1}(u^2,z_1)w_1Y^0_{M_2}(v^1,z_0+z_1)Y_{M_2}(v^2,z_1)w_2=\\&(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{r/2}\varepsilon_{u^1,v^2}\varepsilon_{u^1+u^2,w_2}\varepsilon_{u^2,w_2}Y^0_M(u^1\otimes v^1,z_0+z_1)Y_M(u^2\otimes v^2,z_1)(w_1\otimes w_2)=\\&(z_0+z_1)^n(z_1+z_0)^{r/2}Y^0_M(u^1\otimes v^1,z_0+z_1)Y_M(u^2\otimes v^2,z_1)(w_1\otimes w_2).\end{aligned}$$

综上所述，$M_1\otimes M_2$ 是 σ-twisted $V^1\otimes V^2$-模. 证毕.

3 F_{-1}的不可约 σ-stable σ-twisted 模

这一部分我们首先根据文献[2]来回忆由格构造的超顶点代数. 格是一个有限秩的自由交换群,并且带有对称的双线性型. 设 L 为格,$\mathfrak{h}=\mathbf{Z}\otimes_{?}L$,将 L 上的 σ-双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 扩充到 $\mathfrak{h}$ 上. 仿射代数 $\overline{\mathfrak{h}}=\mathbf{C}[t,t^{-1}]\otimes\mathfrak{h}\oplus\mathbf{Z}c$,对任意的 $h\in\mathfrak{h},n\in ?$,记 $h(n)=t^n\otimes h$. 考虑 $\overline{\mathfrak{h}}$ 的导出模 $M(1,\lambda)=U(\overline{\mathfrak{h}})\otimes_{U(\mathbf{C}[t]\otimes\mathfrak{h}\oplus\mathbf{C}c)}\mathbf{C}e^{\lambda}$,其中 $U(\cdot)$ 为包络代数. $\overline{\mathfrak{h}}$ 按如下方式作用在 $M(1,\lambda)$ 上:

$$c=id_{M(1,\lambda)},\ h(0)=(h,\lambda),$$

$$h(n)=n\frac{h}{\partial h(-n)},n>0,$$

$$h(-n)=h(-n),n>0 \tag{7}$$

我们记 $M(1,0)=M(1)$. 由文献[3]知 $M(1)$ 是单的顶点算子代数.

设 $\hat{L}$ 是 L 与循环群 $<\pm1>$ 的标准中心扩张 $1\to<\pm1>\to\hat{L}\overline{\to}L\to1$. 令 $e:L\to\hat{L}$ 是 section,$e_0=1$,考虑 $\hat{L}$ 的导出模

$$\mathbf{C}\{L\}=\mathbf{C}[\hat{L}]\otimes_{<\pm1>}\mathbf{C}\simeq\mathbf{C}[L].$$

对任意的 $a\in\hat{L}$,记 $e^a=a\otimes1,he^a=(h,a)e^a$,$e_h$ 与 z^h 作用如下

$$e_he^a=(-1)^{(h,a)}e^{h+a},z^he^a=z^{(h,a)}e^a.$$

记线性空间 $V_L=M(1)\otimes\mathbf{C}\{L\}$,对任意的 $a\in\hat{L}$,定义

$$E^+(a,z)=e^{\sum_{n>0}\frac{a(n)}{n}z^{-n}},$$

$$E^-(a,z)=e^{\sum_{n>0}\frac{a(-n)}{-n}z^{n}},$$

$$Y(e^a,z)=E^-(-a,z)E^+(-a,z)e_az^a.$$

对任意的 $v=h_1(-n_1)h_{(-n_2)}\cdots h_k(-n_k)\otimes e^a\in V_L$,定义

$$Y(v,z)=:(\frac{1}{(n_1-1)!}(\frac{d}{dz})^{n_1-1}h_1(z))\cdots(\frac{1}{(n_k-1)!}(\frac{d}{dz})^{n_k-1}h_k(z))Y(e^a,z),$$

其中:为 normalized ordering. 这样我们就有了一个良定义的线性态射

$$Y(\cdot,z):V_L\to(\mathrm{End}V_L)[[z,z^{-1}]]v\to$$

$$Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}v_nz^{-n-1},(v_n\in\mathrm{End}V).$$

设$\{\alpha_i\,|\,i=1,\cdots,d\}$为 $\mathfrak{h}$ 的一组正交基,令 $1=1\otimes e_0,\omega=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\alpha_i(-1)\alpha_i(-1)\in V_L$,由于$Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}L(n)z^{-n-2}$,从而有

$$L(0)(h_1(-n_1)h_2(-n_2)\cdots h_k(-n_k)\otimes e^a)=(-\frac{1}{2}(a,a)+n_1+\cdots+n_k)(h_1(-n_1)h_2(-n_2)\cdots h_k(-n_k)\otimes e^a.$$

由文献[2]知,V_L 是超顶点代数.

取格 $L=\mathbf{Z}\alpha$,满足 $(\alpha,\alpha)=-1$,记 $V_{\mathbf{Z}\alpha}=F_{-1}$. $(F_{-1})_n=\{v=\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes e^\beta\in F_{-1}\,|\,n=-\frac{1}{2}(\beta,\beta)+n_1+\cdots+n_k\}$,$(F_{-1})_{\bar{0}}=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}(F_{-1})_n$,$(F_{-1})_{\bar{1}}=\bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}}V_n^{(F_{-1})}$. $(F_{-1},1,L(-1),Y)$ 是超顶点代数. 下面我们来找 F_{-1} 的不可约 σ-stable σ-twisted 模,对任意的 $v\in F_{-1}$,定义

$$\overline{Y}(v,z)=Y(z^{h_0}\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{-n}(-z)^{-n})v,z).$$

记 $\widetilde{F}_{-1}=(F_{-1},\overline{Y})$. 接下来我们证明 $\widetilde{F}_{-1}$ 是 F_{-1} 的不可约 σ-stable σ-twisted 模. 首先给出 σ 的具体形式.

引理 3.1 若 $\sigma_h=e^{2\pi i\frac{\alpha(0)}{2}}\in\mathrm{End}F_{-1}$. 则有 $\sigma_h=\sigma$,即 $\sigma_h|_{(F_{-1})_{\bar{0}}}=1,\sigma_h|_{(F_{-1})_{\bar{1}}}=-1$.

证明 对任意的 $v=\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes e^\beta\in F_{-1},\beta=k\alpha,k\in\mathbf{Z}$. 由$(F_{-1})_n$ 的定义我们可以知道,当 $v\in(F_{-1})_{\bar{0}}$ 时,k 为偶数,当 $v\in(F_{-1})_{\bar{1}}$ 时,k 为奇数. 下面我们从 k 的分类来讨论.

当 k 为奇数时,设 $k=2m+1,m\in\mathbf{Z}$,此时 $\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes e^\beta\in(F_{-1})_{\bar{1}}$.

$$\sigma_h(\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes e^{k\alpha})=e^{2\pi i\frac{\alpha(0)}{2}}(\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes e^{(2m+1)\alpha})=$$

$$\sum_{n\geqslant0}\frac{(2\pi i)^n}{n!}(\frac{\alpha(0)}{2})^n(\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes e^{(2m+1)\alpha})=$$

$$\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes\sum_{n\geqslant0}\frac{(2\pi i)^n}{n!}(\frac{\alpha}{2},(2m+1)\alpha)^ne^{(2m+1)\alpha}=$$

$$\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes\sum_{n\geqslant0}\frac{1}{n!}(-2(m+\frac{1}{2})\pi i)^ne^{(2m+1)\alpha}=$$

$$\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes e^{-\pi i}e^{(2m+1)\alpha}=-\alpha(-n_1)\alpha(-n_2)\cdots\alpha(-n_k)\otimes e^{(2m+1)\alpha}.$$

当 k 为偶数时可类似讨论. 即有 $\sigma_h|_{(F_{-1})_{\bar{0}}}=1$，$\sigma_h|_{(F_{-1})_{\bar{1}}}=-1$，$\sigma_h=\sigma$. 证毕.

引理 3.2　令 $h=\frac{\alpha(-1)}{2}\otimes 1$，则 h 满足下列条件：

(i) 对任意的正整数 m 和 n，$[h_m,h_n]=0$；

(ii) $L(n)h=\delta_{n,0}h$.

证明

(i) 由于 $Y(h,z)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\alpha_n z^{-n-1}$，从而有 $h_n=\frac{1}{2}\alpha_n$. 对任意的正整数 m 和 n，由(7)式可知 $[h_m,h_n]=h_m h_n-h_n h_m=0$.

(ii) $Y(\omega,z)h=Y(\frac{1}{2}\alpha(-1)\alpha(-1),z)h=\frac{1}{2}:\alpha(z)\alpha(z):h=\frac{1}{2}:\sum_{p\in\mathbf{Z}}\alpha_p z^{-p-1}\sum_{q\in\mathbf{Z}}\alpha_q z^{-q-1}:h=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{p+q=n-1}:\alpha_p\alpha_q:z^{-n-1}h$.

当 $n=1$ 时，$L(0)h=\omega_1 h=\frac{1}{2}\sum_{p+q=0}:\alpha_p\alpha_q:\frac{\alpha(-1)}{2}\otimes 1$. 因为只有当 $p=1,q=-1$ 或者 $p=-1,q=1$ 的时候，才有 $:\alpha_p\alpha_q:\frac{\alpha(-1)}{2}\otimes 1=h$，所以 $\omega_1 h=\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}h=h$. 当 $n\neq 1$ 时，$\omega_p h=0$. 即 $L(n)h=\delta_{n,0}h$. 证毕.

由文献[6]中命题 5.4 可知，$\widetilde{F}_{-1}=(F_{-1},\bar{Y})$ 是 σ-twisted F_{-1}-模. 下面我们来证明 σ-twisted F_{-1}-模 $\widetilde{F}_{-1}$ 是 σ-stable 的.

命题 3.3　$\widetilde{F}_{-1}$ 是 σ-stable F_{-1}-模.

证明　下面证明 $\sigma:\sigma\circ\widetilde{F}_{-1}\to\widetilde{F}_{-1}$ 是 F_{-1}-模同构，σ 满足：$\sigma|_{(\widetilde{F}_{-1})_{\bar{0}}}=1$，$\sigma|_{(\widetilde{F}_{-1})_{\bar{1}}}=-1$.

首先证明 $\sigma:\sigma\circ\widetilde{F}_{-1}\to\widetilde{F}_{-1}$ 是 F_{-1}-模同态，即证明对任意的 $v\in F_{-1}$，$u\in\widetilde{F}_{-1}$，$\sigma Y_{\sigma\circ\widetilde{F}_{-1}}(v,z)u=Y_{\widetilde{F}_{-1}}(v,z)\sigma(u)$. 等式左边 $=\sigma Y_{\widetilde{F}_{-1}}(\sigma v,z)u$，由于 $\sigma(\sigma(v))(n)u=v(n)\sigma(u)$，所以 $\sigma Y_{\widetilde{F}_{-1}}(\sigma v,z)u=Y_{\widetilde{F}_{-1}}(v,z)\sigma(u)=$ 等式右边. 然后由于 $\sigma^2=1$，因此 $\sigma:\sigma\circ\widetilde{F}_{-1}\to\widetilde{F}_{-1}$ 是 F_{-1}-模同构. 所以 $\widetilde{F}_{-1}$ 是 σ-stable F_{-1}-模. 证毕.

由文献[2]知，F_{-1} 是不可约 F_{-1}-模，又由文献[6]知，$\widetilde{F}_{-1}$ 也是不可约 F_{-1}-模，综上所述，$\widetilde{F}_{-1}$ 是 F_{-1} 的不可约 σ-stable σ-twisted 模.

4　$\bar{B}_m$ 是 σ-正则的

定义 4.1[7]　设 V 是带有 Virasoro 元的顶点代数，M^1,M^2,M^3 是 V-模，$\begin{pmatrix}M^3\\M^1 M^2\end{pmatrix}$ 型的 intertwining operator 是一个线性态射

$$I(\cdot,z):M^1\to\mathrm{Hom}(M^2,M^3)\{z\}$$

$$u\to I(u,z)=\sum_{n\in\mathbf{C}}u_n z^{-n-1},$$

对任意的 $u\in M^1$，$v\in M^2$，满足下列条件：

(i1) 当 $n\geqslant 0$ 时，$u_n v=0$，

(i2) $I(L(-1)u,z)v=\frac{d}{dz}I(u,z)v$，

(i3) 对任意的 $a\in V$，Jacobi 等式成立

$$z_0\delta(\frac{z_1-z_2}{z_0})Y(a,z_1)I(u,z_2)v-\varepsilon_{a,b}z_0\delta(\frac{z_2-z_1}{-z_0})I(u,z_2)Y(a,z_1)v=z_2\delta(\frac{z_1-z_0}{z_2})I(Y(a,z_0)u,z_2)v \tag{8}$$

定义 4.2[7]　设 V 是带有 Virasoro 元的顶点代数，M^1 和 M^2 都是 V-模，则 (M^1,M^2) 的张量积是一个二元组 $(M,F(\cdot,z))$，其中 M 是 V-模，$F(\cdot,z)$ 是 $\begin{pmatrix}M^3\\M^1 M^2\end{pmatrix}$ 型的 intertwining operator，并且满足泛性，即对任意的 V-模 W 和 $\begin{pmatrix}W\\M^1 M^2\end{pmatrix}$ 型的 intertwining operator $I(\cdot,z)$，存在唯一的 V 同态 $\varphi:M\to W$，使得 $I(\cdot,z)=\varphi\circ F(\cdot,z)$.

定义 4.3[8]　设 V 是带有 Virasoro 元的顶点代数，M 是不可约的 V-模，如果对于任意的不可约 V-模 W，存在 W 与 M 的不可约的张量积，那么称 M 是 simple current V-模.

由文献[8]知，设 V 是带有 Virasoro 元的顶点代数，$h\in V$ 满足

$$L(n)h=\delta_{n,0}h,\ h_n h=\delta_{n,1}\gamma 1 \tag{9}$$

定义

$$\Delta(h,z)=z^{h_0}\exp(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{-n}(-z)^{-n}).$$

则对任意的 V-模 $(M,Y_M(\cdot,z))$，$(\widetilde{M},Y_{\widetilde{M}}(\cdot,z))=(M,Y_M(\Delta(h,z)\cdot,z))$ 也是 V-模，由文献[8]知，当 γ 为奇数时，$\bar{V}=V\oplus\widetilde{V}$ 是超顶点代数.

命题 4.4　设 V 为单的顶点代数，$\bar{V}=V\oplus\widetilde{V}$ 是超顶点代数，M 是不可约的 V-模，则 $\widetilde{V}\cdot M$ 是 M 的非零不可约 V-子模.

证明　首先证明 $\widetilde{V}\cdot M$ 是 V-模. 由于 $\bar{V}$ 是超顶点代数，结合性

$$(z_1+z_2)^n Y(Y(a,z_1)b,z_2)=$$

$(z_1+z_2)^n Y(a,z_1+z_2)Y(b,z_2)$
成立，即 $V(\widetilde{V}\cdot M)\subseteq(V\cdot\widetilde{V})M\subseteq\widetilde{V}\cdot M$，因此 $\widetilde{V}\cdot M$ 是 V-模.

然后我们证明 $\widetilde{V}\cdot M$ 是非零的不可约 V-模. 若 $\widetilde{V}\cdot M=0$，由于 $\bar{V}$ 是 $\mathbf{Z}_2$ 分次的线性空间，从而有 $\widetilde{V}\cdot\widetilde{V}\subseteq V$，并且由于 V 是单的，因此 $\widetilde{V}\cdot\widetilde{V}=V$. 即有 $M=V\cdot M=(\widetilde{V}\cdot\widetilde{V})M\subseteq\widetilde{V}(\widetilde{V}\cdot M)=0$，矛盾.

若 $\widetilde{V}\cdot M$ 可约，即存在 $\widetilde{V}\cdot M$ 的非平凡的 V-真子模 X，则有 $\widetilde{V}\cdot X\subseteq\widetilde{V}(\widetilde{V}\cdot M)\subseteq(\widetilde{V}\cdot\widetilde{V})M=V\cdot M=M$，而由于 M 是不可约的 V-模，所以有 $\widetilde{V}\cdot X=M$，从而 $\widetilde{V}\cdot M=\widetilde{V}(\widetilde{V}\cdot X)\subseteq(\widetilde{V}\cdot\widetilde{V})X=V\cdot X=X$ 与 X 是 $\widetilde{V}\cdot M$ 的真子模矛盾. 证毕.

下面我们来介绍 B_m，设 $\mathfrak{g}$ 是生成元为 x,y,h 的李代数 sl_2，关系为 $[x,y]=h,[h,x]=2x,[h,y]=-2y$. 考虑邓肯型为 $A_1^{(1)}$ 的仿射李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$. 设 Λ_0 与 Λ_1 为 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的基本权，对任意的复数 m,j，记不可约模 $L(m,j)=L((m-j)\Lambda_0+j\Lambda_1)$. 则由文献[3]可知，$L(m,0)$ 有自然的顶点算子代数的结构. 设 V_L 为由格构造的超顶点代数，若 $L=\mathbf{Z}\alpha$，其中 $(\alpha,\alpha)=n$，则记 $V_{\mathbf{Z}\alpha}=F_n$. 由文献[3]知，$B_m=L(m,0)\otimes F_{-2(m+2)}$ 是不可约的正则顶点代数，并且有 $B_m\cong L_{c_m}\otimes F_{-1}$. 由于当 $V=B_m$ 时，(9)式中的 $\gamma=-1$，所以 $\bar{B}_m=B_m\oplus\widetilde{B}_m$ 是超顶点代数，并且有 $(\bar{B}_m)_{\bar{0}}=B_m,(\bar{B}_m)_{\bar{1}}=\widetilde{B}_m$. 下面我们要证明 $\bar{B}_m$ 是 σ-正则的，首先先给出几个命题.

命题 4.5 $\widetilde{B}_m$ 是 simple current B_m-模.

证明 由于 $L(m,0)$ 和 $F_{-2(m+2)}$ 都有 Virasoro 元，所以 $B_m=L(m,0)\otimes F_{-2(m+2)}$ 中也有 Virasoro 元，从而我们可以在 B_m-模上定义 intertwining operator 和张量积，任取不可约 B_m-模 M，对任意的 $a\in B_m,u\in M$，定义 $F(\cdot,z)$ 为 $F(u,z)a=\mathrm{e}^{zL(-1)}Y_M(a,-z)u$，由文献[7]中命题 5.1.6 知，$(M,Y_M(\cdot,z))$ 是 (B_m,M) 的张量积，$(M,F(\cdot,z))$ 是 (M,B_m) 的张量积. 由文献[8]中的命题 2.4 知，$\widetilde{F}(\cdot,z)=F(\triangle(z)\cdot,z)$ 是 $\begin{pmatrix}\widetilde{M}\\ M^1\widetilde{B}_m\end{pmatrix}$ 型的 intertwining operator. $(\widetilde{M},\widetilde{F}(\cdot,z))$ 是 $(M,\widetilde{B}_m)$ 的张量积，即 $\widetilde{B}_m$ 是 simple current B_m-模. 证毕.

设 M 是 σ-twisted $\bar{B}_m$-模，则 M 是 σ-twisted B_m-模，由 B_m 的正则性质，$M=\bigoplus\limits_i M_i$，其中 M_i 是不可约的 B_m-模，下面的命题说明 M_i 一定包含在某个半单的 σ-twisted $\bar{B}_m$-模中.

命题 4.6 若 M 是 σ-twisted B_m-模，则 M 一定包含在某个半单的 σ-twisted $\bar{B}_m$-模中.

证明 由命题 4.4 知，$\widetilde{B}_m\cdot M$ 是 M 的非零不可约 B_m-子模. 下面考虑 M 的 σ-twisted $\bar{B}_m$-子模 $\widetilde{B}_m\cdot M+M$. 如果作为 B_m-模，$\widetilde{B}_m\cdot M\ncong M$. 则 $\widetilde{B}_m\cdot M+M$ 是直和，并且是不可约的 σ-twisted $\bar{B}_m$-模. 如果作为 B_m-模，$\widetilde{B}_m\cdot M\simeq M$，即存在 $f:M\to\widetilde{B}_m\cdot M$ 是 B_m-模同构. 取 $I_0(\cdot,z)=Y_M(\cdot|\widetilde{B}_m,z)|_M$，$I_1(\cdot,z)=Y_M(\cdot|_{\widetilde{B}_m},z)|_{\widetilde{B}_m\cdot M}$，有定义可知 $I_0(\cdot,z)$ 是 $\begin{pmatrix}\widetilde{B}_m\cdot M\\ \widetilde{B}_m M\end{pmatrix}$ 型的 intertwining operator，

$I_1(\cdot,z)$ 与 $fI_1(\cdot,z)f$ 是 $\begin{pmatrix}M\\ \widetilde{B}_m\widetilde{B}_m\cdot M\end{pmatrix}$ 型的 intertwining operator，且 $I_0(\cdot,z)\neq0,I_1(\cdot,z)\neq0$，由文献[8]中的引理 2.3 与命题 4.5 可知，M 与 $\widetilde{B}_m\cdot M$ 都是不可约的 B_m-模. 由于 $\widetilde{B}_m\cdot M$ 是不可约的 B_m-模，由 Schur 引理可知 $\begin{pmatrix}M\\ \widetilde{B}_m\widetilde{B}_m\cdot M\end{pmatrix}$ 型的 intertwining opertor 的 fusion rule 为 1，因此可以选取适当的常数，使得 f 满足对任意的 $a\in\widetilde{B}_m,w\in M$，有 $fI_1(a,z)f^{-1}(w)=I_0(a,z)(w)$，从而有

$$fY(a,z)f^{-1}(w)=Y(a,z)(w).$$

考虑 M 的 B_m-子模 $W^+=\{w+f(w)\mid w\in M\}$，$W^-=\{w-f(w)\mid w\in M\}$. 由于对任意的 $a\in B_m$，

$$a_n(w+f(w))=a_nw+a_nf(w)=a_nw+f(a_nw)\in W^+.$$

对任意的 $a\in\widetilde{B}_m$，

$$a_n(w+f(w))=a_nw+a_nf(w)=f^{-1}(f(a_nw))+f(a_nw)\in W^-.$$

因此 W^+ 和 W^- 都是不可约的 $\bar{B}_m$-模，且 $\widetilde{B}_m\cdot M+M=W^+\oplus W^-$. 证毕.

命题 4.7 $\bar{B}_m$ 是 σ-正则的.

证明 任取 M 是 σ-twisted $\bar{B}_m$-模，从而 M 是 B_m-模. 由文献[2]知，B_m 是正则的，从而有 $M=\bigoplus\limits_i M_i$，其中 M_i 是不可约的 B_M-模.

设 $S(M)$ 是 M 的极大的半单 σ-twisted $\bar{B}_m$-子模，若 M 作为 σ-twisted $\bar{B}_m$-模不是半单的，则有 $S(M)\subsetneqq M$，则存在 $M_j\subseteq M$，使得 $M_j\cap S(M)=0$. 由命题 4.6 知存在半单的 σ-twisted $\bar{B}_m$-模 M'，使得 $M_j\subseteq M'$. 我们按命题 4.6 的情形讨论.

如果 M' 不可约，从而有 $M'\cap S(M)=0$，那么 $M'\oplus S(M)$ 是半单的 σ-twisted $\bar{B}_m$-模，与 $S(M)$ 极大矛盾. 如果 $M'=M'^+\oplus M'^-$，其中 M'^+

$=\{(w+f(w)\mid w\in M_j)\}$，$M'^{-}=\{(w-f(w)\mid w\in M_j)\}$，$M'^{+}$ 与 M'^{-} 均是不可约的 $\bar{B}_m$-模，若 $M'^{+}\cap S(M)=0$，则 $M'^{+}\oplus S(M)$ 是半单的 σ-twisted $\bar{B}_m$-模，与 $S(M)$ 极大矛盾. 若 $M'^{+}\cap S(M)\neq 0$，则存在 $w_1\in M_j$，使得 $w_1+f(w_1)\in S(M)$，我们断定 $M'^{-}\cap S(M)=0$. 若 $M'^{-}\cap S(M)\neq 0$，则存在 $w_2\in M_j$，使得 $w_2-f(w_2)\in S(M)$，由于 M_j 是不可约的 B_m-模，从而存在 $a\in B_m$，使得 $a_n w_1=w_2$，则有 $w_2+f(w_2)\in S(M)$，从而 $w_2\in S(M)$，与 $M_j\cap S(M)=0$ 矛盾. 证毕.

5　主要结果

由于 $\bar{B}_m$ 是 σ-正则的，并且 $\bar{B}_m\cong L_{c_m}\otimes F_{-1}$，在证明 L_{c_m} 的 σ-正则性的过程中要用到下面的稠密性定理.

定理 5.1[9]（Jacobson 稠密性定理）　设 R 是环，M 是半单的 R-模，令 $R'=\mathrm{End}_R(M)$，任取 $\varphi\in\mathrm{End}_{R'}(M)$，$x_1,\cdots,x_n\in M$，存在 $a\in\mathbf{R}$，使得 $ax_i=\varphi(x_i)$，$i=1,\cdots,n$.

在证明 L_{c_m} 的 σ-正则性之前，我们需要引入 $V[\sigma]$ 的概念. 设 V 是超顶点代数，令 $V[\sigma]=V\otimes[t^{\frac12},t^{-\frac12}]/d(V\otimes[t^{\frac12},t^{-\frac12}])$，其中 $d=L(-1)\otimes 1+1\otimes\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，由于 V 是超顶点代数，$[t^{\frac12},t^{-\frac12}]$ 是顶点代数，

$$Y(f(t),z)g(t)=f(t+z)g(t)=(e^{z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}f(t))g(t),$$

因此 $\mathfrak{L}(V)=V\otimes\mathbf{C}t^{\frac12},t^{-\frac12}]$ 是超顶点代数，$Y(v\otimes f(t),z)(u\otimes g(t))=Y(v,z)u\otimes f(t+z)g(t)$. 下面我们先给出一个引理.

引理 5.2[10]　$V[\sigma]=V\otimes\mathbf{C}[t^{\frac12},t^{-\frac12}]/d(V\otimes\mathbf{C}[t^{\frac12},t^{-\frac12}])$ 是超李代数，对任意的 $a,b\in V\otimes\mathbf{C}[t^{\frac12},t^{-\frac12}]$，$[a+d(\mathfrak{L}(V)),b+d(\mathfrak{L}(V))]=a_0b+d(\mathfrak{L}(V))$.

证明　李括号的线性性质是显然的. 下面我们来证明李括号的反对称性.

对任意的 $a,b\in V\otimes\mathbf{C}[t^{\frac12},t^{-\frac12}]$

$$\begin{aligned}&[a+d(\mathfrak{L}(V),b+d(\mathfrak{L}(V)]=\\&a_0b+d(\mathfrak{L}(V))=Res_zY(a,z)b+\\&d(\mathfrak{L}(V))=\varepsilon_{a,b}Res_ze^{zD}Y(b,-z)a+\\&d(\mathfrak{L}(V))=\varepsilon_{a,b}Res_z\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}D^n(\sum_{m\in\mathfrak{L}}B_ma(-z)^{-m-1})+\\&d(\mathfrak{L}(V))=\varepsilon_{a,b}\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}D^nb_na(-1)^{n+1}+\\&d(\mathfrak{L}(V))=-\varepsilon_{a,b}b_0a+d(\mathfrak{L}(V))=\\&-\varepsilon_{a,b}[b+d(\mathfrak{L}(V)),a+d(\mathfrak{L}(V))].\end{aligned}$$

最后我们来证明 Jacobi 等式. 对任意的 $a,b,c\in V\otimes\mathbf{C}[t^{\frac12},t^{-\frac12}]$，$[a,[b,c]]-\varepsilon_{a,b}[b,[a,c]]=[[a,b],c]$，我们证明 $a_0b_0-\varepsilon_{a,b}b_0a_0=(a_0b)_0$ 即可. 由超顶点代数 $\mathfrak{L}(V)$ 的 Jacobi 等式：

$$z_0^{-1}\delta(\frac{z_1-z_2}{z_0})Y(a,z_1)Y(b,z_2)c-$$

$$\varepsilon_{a,b}z_0^{-1}\delta(\frac{z_1-z_2}{-z_0})Y(b,z_1)Y(a,z_2)c=$$

$$z_2^{-1}\delta(\frac{z_1-z_0}{z_2})Y(Y(a,z_0)b,z_2)c,$$

我们有

$$Y(a,z_1)Y(b,z_2)-\varepsilon_{a,b}Y(b,z_2)Y(a,z_1)=\sum_{m\geqslant 0}\frac{(-1)^m}{m!}(\frac{\partial}{\partial z_1})^m z_2\delta(\frac{z_1}{z_2})Y(a_mb,z_2).$$

因此 $a_mb_n-\varepsilon_{a,b}b_na_m=\sum_{i\geqslant 0}C_m^i(a_ib)_{m+n-i}$，所以 $a_0b_0-\varepsilon_{a,b}b_0a_0=(a_0b)_0$. 证毕.

命题 5.3　设 V^1 和 V^2 都是超顶点代数. 若 $V^1\otimes V^2$ 是 σ-正则的，V^2 有不可约的 σ-stable σ-twised 模 M_2，则 V^1 是 σ-正则的.

证明　任取 M_1 是 σ twised V^1-模. 则 $M_1\otimes M_2$ 是 σ-twisted $V^1\otimes V^2$-模. 由于 $V^1\otimes V^2$ 是 σ-正则的，从而有 $M_1\otimes M_2=\oplus W_k$，其中 W_k 是不可约的 σ-twised $V^1\otimes V^2$-模.

下面我们来证明 M_1 是完全可约的. 对任意的 $\sum_i x_i\otimes y_i\in W_k$，考虑 σ-twised V^2-模 $W=\oplus_i(x_i\otimes M_2)$. 由于 M_2 是 σ-twisted V^2-模，由文献[10]中引理 5.1 知，M_2 的 $V^2[\sigma]$-模结构由映射 $a(m)\to a_m$ 给出，如果 M_2' 是 M_2 的 $V^2[\sigma]$-子模，那么 M_2' 是 M_2 的 σ-twisted V^2-子模. 因此 M_2 是不可约的 $V^2[\sigma]$-模，W 是半单的 $V^2[\sigma]$ 模.

令 $U(V^2[\sigma])$ 是超李代数 $V^2[\sigma]$ 对应的泛包络代数. 由于 W 是半单的结合代数 $U(V^2[\sigma])$-模，从而 W 可以表示成 $U(V^2[\sigma])(\sum_j(x_j\otimes y_j))\oplus(U(V^2[\sigma])(\sum_j(x_j\otimes y_j)))^{\perp}$. 对于任意固定的 i，我们考虑同态 $\varphi\in\mathrm{End}_R(W)$，其中

$$R=\mathrm{End}_{U(V^2[\sigma])}(W),$$

满足

$$\varphi(\sum_j(x_j\otimes y_j))=x_i\otimes y_i,$$

且对于任意的 $w \in (U(V^2[\sigma])(\sum_j (x_j \otimes y_j)))^{\perp}$，$\varphi(w) = 0$. 由稠密性定理知存在 $a \in U(V^2[\sigma])$，使得

$$x_i \otimes y_i = \varphi(\sum_j (x_j \otimes y_j)) = a(\sum_j (x_j \otimes y_j)) \in W_k.$$

因为 M_2 不可约，所以 $V^1 x_i \otimes M_2 \subseteq W_k$. 结合 W_k 的不可约性，我们有 $V^1 x_i \otimes M_2 = W_k$. 由于 $V^1 x_i$ 是 M_1 的 σ-twisted 不可约 V^1-子模，因此 $M_1 = \bigoplus_i V^1 x_i$，即 V^1 是 σ-正则的. 证毕.

定理 5.4 超顶点代数 L_{c_m} 是 σ-正则的.

证明 由文献[2]中定理 7.1 可知，$\bar{B}_m \cong L_{c_m} \otimes F_{-1}$. 由于 $\tilde{F}_{-1}$ 是 F_{-1} 的不可约 σ-stable σ-twisted 模，结合定理 5.3 即可得出超顶点代数 L_{c_m} 的 σ-正则性. 证毕.

参考文献:

[1] Dong C, Li H, Mason G. Regularity of rational vertex operator algebras [J]. Adv Math, 1997, 132: 148.

[2] Adamović D. Vertex algebra approach to fusion rules for N=2 superconformal minimal models [J]. J Algebra, 2001, 239: 549.

[3] Frenkel I, Lepowsky J, Meurman A. Vertex operator algebras and the Monster [J]. Pure Appl Alg, 1988, 134: 61.

[4] Li H. Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules [J]. Pure Appl Alg, 1996, 109: 143.

[5] Dong C, Zhao Z. Modularity in orbifold theory for vertex operator superalgebras [J]. Commun Math Phys, 2005, 260: 227.

[6] Li H. Local systems of twisted vertex operators, vertex operator superalgebras and twisted modules [J]. Cont Math, 1996, 193: 203.

[7] Li H. Representation theory and tensor product theory of vertex operator algebras [D]. New Branswick: Rutgers University, 1994.

[8] Li H. Extension of vertex operator algebras by a self-dual simple module [J]. J Algebra, 1997, 187: 236.

[9] Lang S. Algebra [M]. New York: Springer-Verlag, 2002.

[10] Dong C, Zhao Z. Twisted representations of vertex operator superalgebras [J]. Commun Contemp Math, 2006, 8: 101.