2016 年 3 月　　四川大学学报(自然科学版)　　Mar. 2016
第 53 卷　第 2 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 53　No. 2

doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 03. 008

二元积分不等式的若干推广

曾　冰[1]，钟吉玉[1,2]，段樱桃[1]
(1. 岭南师范学院数学与计算科学学院，湛江 524048；2. 四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：本文主要研究一类具有时滞的二元非线性积分不等式. 在不要求已知函数的单调性和可微性的条件下,本文通过将不等式中的函数单调化和积分号外函数常量化的方法给出了这类不等式中未知函数的估计，并以推论形式给出相应一元积分不等式中未知函数的解的估计. 最后,本文利用该估计证明了一类积分方程和一类微分方程解的有界性.

关键词：积分不等式；非线性函数；单调性

中图分类号：O178　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2016)02-0280-09

Generalizations of integral inequalities with two variables

ZENG Bing[1]，*ZHONG Ji-Yu*[1,2]，*DUAN Ying-Tao*[1]
(1. Department of Mathematics and Computation Science, Lingnan Normal University, Zhanjiang 524048, China;
2. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract：In this paper, we consider a retarded nonlinear integral inequality with two variables. Using the techniques of monotonization and reducing the function outside the integral to constant, we give an estimation of the unknown function in the inequality. Finally, by applying our result we prove boundedness of the solutions for two types of equations.

Key words：Integral inequality; Nonlinear function; Monotonicity
(2010 MSC 34A40)

1　引　言

积分不等式在研究非线性微分方程、积分方程及积分-微分方程解的存在性、唯一性、有界性、稳定性和不变流形等问题中有着十分重要的作用[1,2]. 关于积分不等式中未知函数的估计，国内外有很多学者得到了很好的结果,如文献[3～10].

欧阳亮[11]在研究二阶微分方程 $y''+A(t)y=0$ 解的有界性时，提出了一个非线性积分不等式

$$u^2(t)\leqslant c^2+\int_0^t v(s)u(s)\mathrm{d}s,\quad \forall t\in[0,+\infty),$$

并且在 $u(t)$ 和 $v(t)$ 均为 $[0,+\infty)$ 上非负的连续函数及常数 $c\geqslant 0$ 的条件下给出了未知函数 $u(t)$ 的如下估计

$$u(t)\leqslant c+2\int_0^t v(s)\mathrm{d}s.$$

该估计后来被用于研究某些非线性微分方程解的全局存在性、唯一性和稳定性[1]. 为了建立稳定性与热力学第二定律之间的关系，Dafermos[12]研究了如下的积分不等式

$$u^2(t)\leqslant M^2u^2(0)+\int_0^t(2\alpha u^2(s)+2Ng(s)u(s))\mathrm{d}s,t\in[0,r]\tag{1}$$

给出未知函数 $u(t)$ 的如下估计

收稿日期：2014-12-01
基金项目：国家自然科学基金(11371314)；广东省自然科学基金(S2013010015957)
作者简介：曾冰，女，副教授，主要研究方向为动力系统理论及积分不等式. E-mail：zengbing969@163.com
通讯作者：钟吉玉. E-mail：zhong-jiyu@163.com

$$u(t)\leqslant\left(Mu(0)+N\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{\alpha r},$$

其中常数 $r>0$，$u(t)$ 和 $g(t)$ 是 $[0,r]$ 连续的非负函数，M,α 和 N 是非负常数. Pachpatte[13] 进一步推广不等式(1)到如下的积分不等式

$$u^2(t)\leqslant c^2+2\int_0^t(f(s)u(s)w(u(s))+h(s)u(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,+\infty)\tag{2}$$

并给出了未知函数 $u(t)$ 的估计，其中 $f(t)$ 和 $h(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续的非负函数，$c\geqslant0$ 是一个常数，$w(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续、单调不减的正函数. 之后，Cheung[14] 推广不等式(2)到如下的二元积分不等式

$$u^p(x,y)\leqslant k+\frac{p}{p-q}\int_{\alpha(x_0)}^{\alpha(x)}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)}g_1(s,t)u^q(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s+\frac{p}{p-q}\int_{\gamma(x_0)}^{\gamma(x)}\int_{\delta(y_0)}^{\delta(y)}g_2(s,t)u^q(s,t)w(u(s,t))\mathrm{d}t\mathrm{d}s\tag{3}$$

并给出了二元函数 $u(x,y)$ 的估计，其中 $k\geqslant0$ 和 $p>q>0$ 是一个常数，$g_i(s,t)(i=1,2)$ 是连续可微的正函数，$w(t)$ 是连续、单调不减的正函数 2013 年，Wan 和 Xu[15] 推广不等式(2)到如下的积分不等式

$$u^p(t)\leqslant k(t)+\frac{p}{p-1}\int_0^{\alpha(t)}[f_1(t,s)u(s)+g_1(t,s)u(s)\varphi(u(s))]\mathrm{d}s+\frac{p}{p-1}\int_0^t[f_2(t,s)u(s)+g_2(t,s)u(s)\varphi(u(s))]\mathrm{d}s+\frac{p}{p-1}\int_0^{\alpha(t)}f_3(t,s)u(s)\mathrm{d}s\int_0^t f_4(t,s)\varphi(u(s))\mathrm{d}s\tag{4}$$

并给出了未知函数的估计，其中 $\alpha(t)\leqslant t$，$f_i(t,s)$，$\frac{\partial}{\partial t}f_i(t,s)$，$g_j(t,s)$ 及 $\frac{\partial}{\partial t}g_j(t,s)$ 是 $\mathbf{R}_+^2$ 上非负的连续函数，$\varphi(t)$，$k(t)$ 和 $\alpha(t)$ 是 $\mathbf{R}+$ 上非负、单调不减且连续的函数.

在本文中，我们结合不等式(3)和(4)，讨论如下具有乘积形式的二元非线性不等式

$$\begin{aligned}u^p(x,y)\leqslant k(x,y)+\frac{p}{p-q}\Bigg[&\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}(f_1(x,y,t,s)u^q(t,s)\varphi_1(u(t,s))+\\&g_1(x,y,t,s)u^q(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(f_2(x,y,t,s)u^q(t,s)\varphi_2(u(t,s))+g_2(x,y,t,s)u^q(t,s))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\\&\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}f_3(x,y,t,s)u^q(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f_4(x,y,t,s)\varphi_3(u(t,s))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Bigg]\end{aligned}\tag{5}$$

这里我们不要求函数 $k(x,y)$，$f_i(x,y,t,s)(i=1,2,3,4)$ 和 $g_j(x,y,t,s)(j=1,2)$ 的单调性，尤其不要求函数 $f_i(x,y,t,s)(i=1,2,3,4)$ 和 $g_j(x,y,t,s)(j=1,2)$ 的可微性利用函数的单调化技巧及将积分号外函数作常数化的方法，我们给出未知函数 $u(x,y)$ 的估计，并以推论形式给出了相应的一元积分不等式中未知函数的估计，最后利用本文所得到的结论分别研究了一类积分方程和一类微分方程解的有界性.

2　主要结果

在全文中，记 $\mathbf{R}=[0,+\infty)$，$I=[x_0,x_1)$，$J=[y_0,y_1)$，$\Omega=I\times J$，其中 $x_0,x_1,y_0,y_1\in\mathbf{R}_+$ 都是给定的常数，且 x_1 和 y_1 可以趋于 $+\infty$. 对所研究的二元积分不等式做如下基本假设：

(H_1) $f_i(x,y,t,s)(i=1,2,3,4)$ 是定义在 $\Omega\times\Omega$ 上非负的可积函数；

(H_2) $k(x,y)$ 是定义在 Ω 上的连续函数，且 $k(x,y)\neq0$；

(H_3) $a(t):I\to J$ 和 $b(t):I\to J$ 是单调不减的连续函数，且 $a(t)\leqslant t$，$b(t)\leqslant t$，$a(t)$ 可微；

(H_4) $\varphi_i(t)(i=1,2,3)$ 是定义在 $\mathbf{R}_+$ 上的连续函数，且当 $t>0$ 时，$\varphi_i(t)>0$；

(H_5) $g_j(x,y,t,s)(j=1,2)$ 是定义在 $\Omega\times\Omega$ 上非负的可积函数.

记 $w(t):=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant3}\max\limits_{\tau\in[0,t]}\varphi_i(\tau)$. 显然 $w(t)$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上连续、单调不减，且 $\varphi_i(t)\leqslant w(t)$. 定义

$$W_p(x):=\int_{\hat{x}}^{x}\frac{ds}{w(s^{\frac{1}{p}})},W_p(0)=\lim_{x\to0^+}W_p(x),$$

显然 W_p 是严格单调递增的连续函数，所以存在和其具有相同单调性的反函数 W_p^{-1}. 另外为把已知函数单调化，定义

$$\tilde{f}_i(x,y,t,s):=\max_{(\tau,\xi)\in[x_0,x]\times[y_0,y]} f_i(\tau,\xi,t,s),$$
$i=1,2,3,4,$

$$\tilde{g}_j(x,y,t,s):=\max_{(\tau,\xi)\in[x_0,x]\times[y_0,y]} g_j(\tau,\xi,t,s),$$
$j=1,2,$

$$\tilde{k}(x,y):=\max_{(\tau,\xi)\in[x_0,x]\times[y_0,y]} |k(\tau,\xi)|.$$

可以看出 $\tilde{f}_i(x,y,t,s)(i=1,2,3,4)$,$\tilde{g}_j(x,y,t,s)(j=1,2)$和 $\tilde{k}(x,y)$在相应的定义范围内都是关于 x 和 y 单调不减的函数.

另对本文中所研究的一元积分不等式做如下基本假设:

(C_1) $f_i(x,t)(i=1,2,3,4)$是定义在 $I\times I$ 上非负的可积函数;

(C_2) $k(x)$是定义在 I 上的连续函数,且 $k(x)\neq 0$;

(C_3) $a(t):I\to I$ 是单调不减的可微函数,且 $a(t)\leqslant t$;

(C_4) $\varphi_i(t)(i=1,2,3)$是定义在 $\mathbf{R}_+$ 上的连续函数,且当 $t>0$ 时 $\varphi_i(t)>0$;

(C_5) $g_j(x,t)(j=1,2)$是定义在 $I\times I$ 上非负的可积函数.

为把已知函数单调化,定义

$$\tilde{f}_i(x,t):=\max_{\tau\in[x_0,x]} f_i(\tau,t),i=1,2,3,4,$$

$$\tilde{g}_j(x,t):=\max_{\tau\in[x_0,x]} g_j(\tau,t),j=1,2,$$

$$\tilde{k}(x):=\max_{\tau\in[x_0,x]} |k(\tau)|.$$

定理 2.1 假设条件$(H_1)\sim(H_4)$成立,$p>0$是一个常数. 如果 $u(x,y)$ 是 Ω 上非负的连续函数,满足不等式

$$u^p(x,y)\leqslant k(x,y)+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} f_1(x,y,t,s)\varphi_1(u(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f_2(x,y,t,s)\varphi_2(u(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} f_3(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f_4(x,y,t,s)\varphi_3(u(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{6}$$

则 $u(x,y)\leqslant\{W_p[W_p^{-1}(\tilde{k}(x,y))+A(x,y)]\}^{\frac{1}{p}}$, $(x,y)\in\Delta$, 其中

$$A(x,y)=\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$\Delta=\{(x,y)|W(\tilde{k_p}(x,y))+A(x,y)\in\mathrm{Dom}(W_p^{-1}),(x,y)\in\Omega\}.$$

证明 任取 $(X,Y)\in\Delta$,记

$$z(x,y)=\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(X,Y,t,s)w(u(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(X,Y,t,s)w(u(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)w(u(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{7}$$

由 $\tilde{f}_i,w$ 的定义及不等式(6)可知,对任意 $(x,y)\in[x_0,X]\times[y_0,Y]$,有

$$u(x,y)\leqslant(\tilde{k}(X,Y)+z(x,y))^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

根据定理中的前提条件,对(7)式两侧分别对 x 求偏导数,得

$$z_x(x,y)=a'(x)\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(X,Y,a(x),s)w(u(a(x),s))\mathrm{d}s+\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(X,Y,x,s)w(u(x,s))\mathrm{d}s+a'(x)\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,a(x),s)\mathrm{d}s\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)w(u(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,x,s)w(u(x,s))\mathrm{d}s \tag{9}$$

由(8)和(9)式可得

$$z_x(x,y)\leqslant w((\tilde{k}(X,Y)+z(x,y))^{\frac{1}{p}})\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\Big) \tag{10}$$

由于 $w((\tilde{k}(X,Y)+z(x,y))^{\frac{1}{p}})$ 是正的,在不等式(10)两侧同除以 $w((\tilde{k}(X,Y)+z(x,y))^{\frac{1}{p}})$,可得

$$\frac{z_x(x,y)}{w((\tilde{k}(X,Y)+z(x,y))^{\frac{1}{p}})}\leqslant\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\Big) \tag{11}$$

将不等式(11)两侧分别在 $[x_0, x]$ 上对 x 积分，有

$$W_p(\tilde{k}(X,Y)+z(x,y)) \leqslant W_p(\tilde{k}(X,Y)) + \int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} \tilde{f}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \tilde{f}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} \tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \tilde{f}_4(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{12}$$

在不等式(12)中取 $x = X$，$y = Y$，有

$$W_p(\tilde{k}(X,Y)+z(X,Y)) \leqslant W_p(\tilde{k}(X,Y)) + \int_{a(x_0)}^{a(X)}\int_{b(y_0)}^{b(Y)} \tilde{f}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \tilde{f}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{a(x_0)}^{a(X)}\int_{b(y_0)}^{b(Y)} \tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \tilde{f}_4(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

再根据 X,Y 在 Δ 内取值的任意性，即可得到

$$W_p(\tilde{k}(x,y)+z(x,y)) \leqslant W_p(\tilde{k}(x,y)) + \int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} \tilde{f}_1(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \tilde{f}_2(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} \tilde{f}_3(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \tilde{f}_4(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

因此由不等式(8)及 W_p 的严格单调递增性，可得

$$u(x,y) \leqslant \{W_p^{-1}[W_p(\tilde{k}(x,y)) + A(x,y)]\}^{\frac{1}{p}}, \quad (x,y)\in\Delta.$$

定理证毕.

在定理 2.1 中，若取 $\varphi_i(t)=t^p(i=1,2,3)$，$\tilde{x}=1$，则有 $W_p(t)=\int_1^t \frac{\mathrm{d}s}{s}=\ln t$，于是可得如下结论：

推论 2.2　假设条件(H_1)～(H_3)成立，$p>0$ 是一个常数. 如果 $u(x,y)$ 是 Ω 上非负的连续函数，满足不等式

$$u^p(x,y) \leqslant k(x,y) + \int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} f_1(x,y,t,s)u^p(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f_2(x,y,t,s)u^p(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} f_3(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f_4(x,y,t,s)u^p(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{13}$$

则

$$u(x,y) \leqslant (\tilde{k}(x,y)\mathrm{e}^{A(x,y)})^{\frac{1}{p}}, \quad (x,y)\in\Omega,$$

其中 $A(x,y)$ 的定义见定理 2.1.

特别地，在推论 2.2 中取 $u(x,y)=\hat{u}(x)\hat{u}(y)$，$f_i(x,y,t,s)=\hat{f}_i(x,t)\hat{f}_i(y,s)(i=1,2,3,4)$，$k(x,y)=\hat{k}(x)$，不等式(13)即为

$$\hat{u}^p(x)\hat{u}^p(y) \leqslant \hat{k}(x) + \int_{a(x_0)}^{a(x)} \hat{f}_1(x,t)\hat{u}^p(t)\mathrm{d}t\int_{b(y_0)}^{b(y)} \hat{f}_1(y,s)\hat{u}^p(s)\mathrm{d}s + \int_{x_0}^{x} \hat{f}_2(x,t)\hat{u}^p(t)\mathrm{d}t\int_{y_0}^{y} \hat{f}_2(y,s)\hat{u}^p(s)\mathrm{d}s + \int_{a(x_0)}^{a(x)} \hat{f}_3(x,t)\mathrm{d}t\int_{b(y_0)}^{b(y)} \hat{f}_3(y,s)\mathrm{d}s\int_{x_0}^{x} \hat{f}_4(x,t)\hat{u}^p(t)\mathrm{d}t\int_{y_0}^{y} \hat{f}_4(y,s)\hat{u}^p(s)\mathrm{d}s.$$

于是当 $a(x)=b(x)$，$x=y$，$x_0=y_0$ 时有

$$\hat{u}^{2p}(x) \leqslant \hat{k}(x) + \left(\int_{a(x_0)}^{a(x)} \hat{f}_1(x,t)\hat{u}^p(t)\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_{x_0}^{x} \hat{f}_2(x,t)\hat{u}^p(t)\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_{a(x_0)}^{a(x)} \hat{f}_3(x,t)\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x} \hat{f}_4(x,t)\hat{u}^p(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

故由推论 2.2，我们可以得到如下结论：

推论 2.3　假设条件(C_1)～(C_3)成立，$p>0$ 是一个常数. 如果 $u(x)$ 是 I 上非负的连续函数，满足不等式

$$u^{2p}(x) \leqslant k(x) + \left(\int_{a(x_0)}^{a(x)} f_1(x,t)u^p(t)\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_{x_0}^{x} f_2(x,t)u^p(t)\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_{a(x_0)}^{a(x)} f_3(x,t)\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x} f_4(x,t)u^p(t)\mathrm{d}t\right)^2,$$

则 $u(x)\leqslant(\tilde{k}(x)\mathrm{e}^{A(x)})^{\frac{1}{2p}}$，$x\in I$，其中

$$A(x) = \left(\int_{a(x_0)}^{a(x)} \tilde{f}_1(x,t)\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_{x_0}^{x} \tilde{f}_2(x,t)\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_{a(x_0)}^{a(x)} \tilde{f}_3(x,t)\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x} \tilde{f}_4(x,t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

另外，用与上面相同的处理方法，根据定理 2.1 还可推得：

推论 2.4　假设条件(C_1)～(C_4)成立，$p>0$ 是一个常数. 如果 $u(x)$ 是 I 上非负的连续函数，满足不等式

$$u^p(x) \leqslant k(x) + \int_{a(x_0)}^{a(x)} f_1(x,t)\varphi_1(u(t))\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} f_2(x,t)\varphi_2(u(t))\mathrm{d}t +$$

$$\int_{a(x_0)}^{a(x)} f_3(x,t)\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x} f_4(x,t)\varphi_3(u(t))\mathrm{d}t,$$

则 $u(x)\leqslant\{W_p^{-1}[W_p(\tilde{k}(x))+A(x)]\}^{\frac{1}{p}}, x\in\Lambda$，其中

$$A(x)=\int_{a(x_0)}^{a(x)}\tilde{f}_1(x,t)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\tilde{f}_2(x,t)\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\tilde{f}_3(x,t)\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\tilde{f}_4(x,t)\mathrm{d}t,$$

$$\Lambda=\{x\,|\,W(k_{\tilde{p}}(x))+A(x)\in\mathrm{Dom}(W_p^{-1}),x\in I\}.$$

定理 2.5 假设条件(H_1)~(H_5)成立，p 和 q 是两个常数，$p>q\geqslant 0$. 如果 $u(x,y)$ 是 Ω 上非负的连续函数，满足不等式(5)，则

$$u(x,y)\leqslant\{W_{p-q}^{-1}[W_{p-q}(K(x,y))+A(x,y)]\}^{\frac{1}{p-q}},\quad (x,y)\in\Delta,$$

其中

$$K(x,y)=(\tilde{k}(x,y))^{\frac{p-q}{p}}+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{g}_1(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{g}_2(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$A(x,y)=\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(x,y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$\Delta=\{(x,y)\,|\,W_{p-q}(K(x,y))+A(x,y)\in\mathrm{Dom}(W_{p-q}^{-1}),(x,y)\in\Omega\}.$$

证明 任取 $(X,Y)\in\Delta$，记

$$z(x,y)=\frac{p}{p-q}\Big[\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}(\tilde{f}_1(X,Y,t,s)u^q(t,s)\varphi_1(u(t,s))+\tilde{g}_1(X,Y,t,s)u^q(t,s))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(\tilde{f}_2(X,Y,t,s)u^q(t,s)\varphi_2(u(t,s))+\tilde{g}_2(X,Y,t,s)u^q(t,s))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)u^q(t,s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)\varphi_3(u(t,s))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big]\tag{14}$$

则由 $\tilde{f}_i$ 和 $\tilde{g}_j$ 的定义及不等式(5)可知，$\forall(x,y)\in[x_0,X]\times[y_0,Y]$，有

$$u^p(x,y)\leqslant\tilde{k}(X,Y)+z(x,y)\tag{15}$$

把(14)式两侧分别对 x 求偏导数，得

$$z_x(x,y)=\frac{p}{p-q}\Big[a'(x)\int_{b(y_0)}^{b(y)}(\tilde{f}_1(X,Y,a(x),s)u^q(a(x),s)\varphi_1(u(a(x),s))+\tilde{g}_1(X,Y,a(x),s)u^q(a(x),s))\mathrm{d}s+\int_{y_0}^{y}(\tilde{f}_2(X,Y,x,s)u^q(x,s)\varphi_2(u(x,s))+\tilde{g}_2(X,Y,x,s)u^q(x,s))\mathrm{d}s+a'(x)\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,a(x),s)u^q(a(x),s)\mathrm{d}s\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)\varphi_3(u(t,s))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)u^q(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,x,s)\varphi_3(u(x,s))\mathrm{d}s\Big]\tag{16}$$

根据定理假设及不等式(15)，由(16)式可得

$$z_x(x,y)\leqslant\frac{p}{p-q}(\tilde{k}(X,Y)+z(x,y))^{\frac{q}{p}}\times\frac{\partial}{\partial x}\Big[\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{g}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{g}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(X,Y,t,s)\varphi_1((\tilde{k}(X,Y)+z(t,s))^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(X,Y,t,s)\varphi_2((\tilde{k}(X,Y)+z(t,s))^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)\varphi_3((\tilde{k}(X,Y)+z(t,s))^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t\Big],$$

故

$$\frac{p-q}{p}\frac{z_x(x,y)}{(\tilde{k}(X,Y)+z(x,y))^{\frac{q}{p}}}\leqslant\frac{\partial}{\partial x}\Big[\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{g}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{g}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(X,Y,t,s)\varphi_1((\tilde{k}(X,Y)+z(t,s))^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(X,Y,t,s)\varphi_2((\tilde{k}(X,Y)+z(t,s))^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\cdot$$

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)\varphi_3((\tilde{k}(X,Y)+z(t,s))^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t] \tag{17}$$

将式(17)的两端分别在 $[x_0,x]$ 上对 x 积分，得到

$$(\tilde{k}(X,Y)+z(x,y))^{\frac{p-q}{p}}\leqslant(\tilde{k}(X,Y))^{\frac{p-q}{p}}+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{g}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{g}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(X,Y,t,s)\varphi_1((\tilde{k}(X,Y)+z(t,s))^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(X,Y,t,s)\varphi_2((\tilde{k}(X,Y)+z(t,s))^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)\varphi_3((\tilde{k}(X,Y)+z(t,s))^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{18}$$

记 $c(x,y)=(k(X,Y)+z(x,y))^{\frac{1}{p}}$，那么不等式(18)等价于

$$c^{p-q}(x,y)\leqslant\tilde{k}(X,Y))^{\frac{p-q}{p}}+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{g}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{g}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(X,Y,t,s)\varphi_1(c(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(X,Y,t,s)\varphi_2(c(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)\varphi_3(c(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

于是根据定理 2.1 的结论可得

$$c(x,y)\leqslant\{W_{p-q}{}^{-1}[W_{p-q}(\hat{K}(x,y))+\hat{A}(x,y)]\}^{\frac{1}{p-q}},$$

即

$$(k(X,Y)+z(x,y))^{\frac{1}{p}}\leqslant\{W_{p-q}{}^{-1}[W_{p-q}(\hat{K}(x,y))+\hat{A}(x,y)]\}^{\frac{1}{p-q}} \tag{19}$$

其中

$$\hat{K}(x,y)=\tilde{k}(X,Y))^{\frac{p-q}{p}}+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{g}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{g}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$\hat{A}(x,y)=\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_1(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_2(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{f}_3(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}_4(X,Y,t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

在不等式(19)中取 $x=X$，$y=Y$，再根据 X,Y 在 Δ 内取值的任意性，即可得到

$$(\tilde{k}(x,y)+z(x,y))^{\frac{1}{p}}\leqslant\{W_{p-q}{}^{-1}[W_{p-q}(K(x,y))+A(x,y)]\}^{\frac{1}{p-q}}.$$

故

$$u(x,y)\leqslant\{W_{p-q}{}^{-1}[W_{p-q}(K(x,y))+A(x,y)]\}^{\frac{1}{p-q}},\quad(x,y)\in\Delta.$$

定理证毕.

在定理 2.5 中，若取 $\varphi_i(t)=t^{p-q}(i=1,2,3)$，$\tilde{x}=1$，则有 $W_{p-q}(t)=\int_1^t\frac{\mathrm{d}s}{s}=\ln t$，于是可得如下结论：

推论 2.6　假设条件(H_1)～(H_3)及(H_5)成立，p 和 q 是两个常数，且 $p>q\geqslant 0$. 如果 $u(x,y)$ 是 Ω 上非负的连续函数，满足不等式

$$u^p(x,y)\leqslant k(x,y)+\frac{p}{p-q}\Big[\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}(f_1(x,y,t,s)u^p(t,s)+g_1(x,y,t,s)u^q(t,s))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(f_2(x,y,t,s)u^p(t,s)+g_2(x,y,t,s)u^q(t,s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}f_3(x,y,t,s)u^q(t,s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f_4(x,y,t,s)u^{p-q}(t,s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big],$$

则

$$u(x,y)\leqslant(K(x,y)\mathrm{e}^{A(x,y)})^{\frac{1}{p-q}},\ (x,y)\in\Omega,$$

其中 $K(x,y)$ 和 $A(x,y)$ 的定义见定理 2.5.

另外，利用与上面相同的处理方法，根据定理 2.5 还可推得

推论 2.7　假设条件(C_1)～(C_5)成立，p 和 q 是

两个常数,且 $p>q\geqslant 0$. 如果 $u(x)$ 是 I 上非负的连续函数,满足不等式

$$u^p(x)\leqslant k(x)+\frac{p}{p-q}\cdot \Big[\int_{a(x_0)}^{a(x)}(f_1(x,t)u^q(t)\varphi_1(u(t))+ g_1(x,t)u^q(t))\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}(f_2(x,t)u^q(t)\varphi_2(u(t))+ g_2(x,t)u^q(t))\mathrm{d}t+ \int_{a(x_0)}^{a(x)}f_3(x,t)u^q(t)\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}f_4(x,t)\varphi_3(u(t))\mathrm{d}t\Big] \quad (20)$$

则

$$u(x)\leqslant\{W_{p-q}{}^{-1}[W_{p-q}(K(x))+A(x)]\}^{\frac{1}{p-q}},\quad x\in\Lambda,$$

其中

$$K(x)=(\tilde{k}(x))^{\frac{p-q}{p}}+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\tilde{g}_1(x,t)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\tilde{g}_2(x,t)\mathrm{d}t,$$

$$A(x)=\int_{a(x_0)}^{a(x)}\tilde{f}_1(x,t)\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}\tilde{f}_2(x,t)\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\tilde{f}_3(x,t)\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}\tilde{f}_4(x,t)\mathrm{d}t,$$

$$\Lambda=\{x|W_{p-q}(K(x))+A(x)\in\mathrm{Dom}(W_{p-q}{}^{-1}),x\in I\}.$$

注 在推论 2.7 中,如果 $p=2,q=1,k(x)=c^2$, $f_1=f_3=f_4=0,g_1(x,t)=0$, 则不等式(20)即为不等式(2). 另外,取 $q=1,a(0)=0,\varphi_i(t)=\varphi(t)(i=1,2,3),I=\mathbf{R}_+$ 时,即与文献[15]中定理 2.3 一致,但是在这里本文削弱了对 $k(x),\varphi(t),f_i(x,t)(i=1,2,3,4)$和 $g_j(x,t)(j=1,2)$非单调递减性及 $f_i(x,t)(i=1,2,3,4)$和 $g_j(x,t)(j=1,2)$存在对 x 的连续偏导数要求. 显然,本文的结论比文献[15]中的定理 2.1 应用范围更广.

推论 2.8 假设条件(C_1)~(C_3)及(C_5)成立, p 和 q 是两个常数,且 $p>q\geqslant 0$. 如果 $u(x)$ 是 I 上非负的连续函数,满足不等式

$$u^p(x)\leqslant k(x)+\frac{p}{p-q}\Big[\int_{a(x_0)}^{a(x)}(f_1(x,t)u^p(t)+g_1(x,t)u^q(x,t))\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{x}(f_2(x,t)u^p(t)+g_2(x,t)u^q(x,t))\mathrm{d}t+ \int_{a(x_0)}^{a(x)}f_3(x,t)u^q(t)\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x}f_4(x,t)u^{p-q}(t)\mathrm{d}t\Big],$$

则

$$u(x)\leqslant(K(x)\mathrm{e}^{A(x)})^{\frac{1}{p-q}},\quad x\in I,$$

其中 $K(x)$ 和 $A(x)$ 的定义同推论 2.7.

3 应 用

考虑偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}u^p(x,y)=F(x,y,u(x,y),u(a(x),b(y))),\\ u(x_0,y_0)=u_0\end{cases}\quad (21)$$

解的有界性,这里 $F\in C(I\times J\times\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$, 函数 $a(t)\in C(I,I)$ 和 $b(t)\in C(J,J)$ 都是单调递增函数,且 $a(t)\leqslant t,b(t)\leqslant t,a(t)$ 在 I 上可微.

推论 3.1 假设

$$|F(x,y,t,s)|\leqslant\frac{p}{p-q}[|t^q|f(x,y)\varphi_1(|t|)+|s^q|g(x,y)\varphi_2(|s|)],$$

其中 $f,g\in C(\Omega,\mathbf{R}_+),\varphi_i\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)(i=1,2)$, 则微分方程(21)的解有估计式

$$|u(x,y)|\leqslant\{W_{p-q}{}^{-1}[W_{p-q}(k(x,y))+A(x,y)]\}^{\frac{1}{p-q}},(x,y)\in\Delta,$$

其中

$$k(x,y)=(|u^p(x,y_0)+u^p(x_0,y)-u_0^p|)^{\frac{p-q}{p}},$$

$$A(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\tilde{f}(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)}\tilde{h}(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$h(t,s)=\frac{g(a^{-1}(t),b^{-1}(s))}{a'(a^{-1}(t))b'(b^{-1}(s))},$$

$$\Delta=\{(x,y)|W_{p-q}(k(x,y))+A(x,y)\in\mathrm{Dom}(W_{p-1}{}^{-1}),(x,y)\in\Omega\}.$$

证明 把微分方程(21)的两侧分别在 $[x_0,x]\times[y_0,y]$ 上积分,得到(21)的等价积分方程:

$$u^p(x,y)=u^p(x,y_0)+u^p(x_0,y)-u_0^p+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}F(t,s,u(t,s),u(a(t),b(s)))\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

根据假设有

$$|u^p(x,y)|\leqslant|u^p(x,y_0)+u^p(x_0,y)-u_0^p|+\frac{p}{p-q}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}f(t,s)|u^q(t,s)|\varphi_1(|u(t,s)|)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+$$

$$\frac{p}{p-q}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} g(t,s)\,|\,u^q(a(t),b(s))\,|\,\varphi_2(\,|\,u(a(t),b(s))\,|\,)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant$$

$$|\,u^p(x,y_0)+u^p(x_0,y)-u_0^p\,|+\frac{p}{p-q}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s)\,|\,u^q(t,s)\,|\,w(\,|\,u(t,s)\,|\,)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+$$

$$\frac{p}{p-q}\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} \frac{g(a^{-1}(t),b^{-1}(s))}{a'(a^{-1}(t))b'(b^{-1}(s))}\,|\,u^q(t,s)\,|\,w(\,|\,u(t,s)\,|\,)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

即

$$|\,u^p(x,y)\,|\leqslant|\,u^p(x,y_0)+u^p(x_0,y)-u_0^p\,|+\frac{p}{p-q}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(t,s)\,|\,u^q(t,s)\,|\,w(\,|\,u(t,s)\,|\,)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t+\frac{p}{p-q}\int_{a(x_0)}^{a(x)}\int_{b(y_0)}^{b(y)} h(t,s)\,|\,u^q(t,s)\,|\,w(\,|\,u(t,s)\,|\,)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

于是根据定理 2.5，由不等式(22)可以得到微分方程(21)的解的估计：

$$|\,u(x,y)\,|\leqslant\{W_{p-q}{}^{-1}[W_{p-q}(k(x,y))+A(x,y)]\}^{\frac{1}{p-q}},(x,y)\in\Delta.$$

证毕.

下面考虑积分-微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u^p(t)=F\left(t,u(t),u(a(t)),\displaystyle\int_0^{a(t)} f(s)u(s)\mathrm{d}s\right),\\ u(0)=u_0\end{cases} \tag{23}$$

解的有界性问题，这里 $\left|\int_0^{a(t)} f(s)u(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant|\,u(t)\,|$，$F\in C(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$，$a(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上的可微且单调递增的函数，且 $a(t)\leqslant t$.

推论 3.2　假设

$$|\,F(t,x,y,z)\,|\leqslant\frac{p-1}{p}(\,|\,x\,|\,g_1(t)\varphi_1(\,|\,x\,|\,)+|\,y\,|\,g_2(t)\varphi_2(\,|\,y\,|\,)+|\,z\,|\,g_3(t)\varphi_3(\,|\,z\,|\,)),$$

其中 $g_i\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)(i=1,2,3)$，$\varphi_i\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)(i=1,2,3)$，则微分方程(23)的解有估计式

$$|\,u(t)\,|\leqslant\{W_{p-1}{}^{-1}[W_{p-1}(\,|\,u_0^p\,|\,)+A(t)]\}^{\frac{1}{p-1}},t\in\Delta,$$

其中

$$A(t)=\int_0^t \tilde{g}_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^{a(t)}\tilde{h}(s)\mathrm{d}s+\int_0^{a(t)}\tilde{f}(s)\mathrm{d}s\int_0^t\tilde{g}_3(s)\mathrm{d}s,$$

$$h(t)=\frac{g_2(a^{-1}(t))}{a'(a^{-1}(t))},$$

$$\Delta=\{x\,|\,W_{p-1}(\,|\,u_0^{p-1}\,|\,)+A(t)\in\mathrm{Dom}(W_{p-1}{}^{-1})\}.$$

证明　把积分-微分方程(23)的两侧在 $[0,t]$ 上积分，得到方程(23)的等价积分方程：

$$u^p(t)=u_0^p+\int_0^t F\left(s,u(s),u(a(s)),\int_0^{a(s)} f(r)u(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.$$

根据假设，有

$$|\,u^p(t)\,|\leqslant|\,u_0^p\,|+\frac{p}{p-1}\left[\int_0^t g_1(s)\,|\,u(s)\,|\,\varphi_1(\,|\,u(s)\,|\,)\mathrm{d}s+\int_0^t g_2(s)\,|\,u(a(s))\,|\,\varphi_2(\,|\,u(a(s))\,|\,)\mathrm{d}s+\int_0^t\left(g_3(s)\left|\int_0^{a(s)} f(r)u(r)\mathrm{d}r\right|\varphi_3\left(\left|\int_0^{a(s)} f(r)u(r)\mathrm{d}r\right|\right)\right)\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$|\,u_0^p\,|+\frac{p}{p-1}\left[\int_0^t g_1(s)\,|\,u(s)\,|\,w(\,|\,u(s)\,|\,)\mathrm{d}s+\int_0^{a(t)}\frac{g_2(a^{-1}(s))}{a'(a^{-1}(s))}\,|\,u(s)\,|\,w(\,|\,u(s)\,|\,)\mathrm{d}s+\int_0^{a(t)} f(s)\,|\,u(s)\,|\,\mathrm{d}s\int_0^t g_3(s)w(\,|\,u(s)\,|\,)\mathrm{d}s\right].$$

于是根据推论 2.7 可以得到方程(23)的解的估计式：

$$u(t)\leqslant\{W_{p-1}^{-1}[W_{p-1}(u_0^p)+A(t)]\}^{\frac{1}{p-1}},x\in\Delta$$

证毕.

致谢　在论文的整个完成过程中，邓胜福博士提供了非常有意义的建议和指导，作者在此表示衷心的感谢！

参考文献：

[1]　Corduneanu C M. Integral equations and applications [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1991.

[2]　张伟年，杜正东，徐冰. 常微分方程[M]. 北京：高等教育出版社，2006.

[3]　Agarwal R P，Deng S F，Zhang W N. Generalization of a

retarded Gronwall-like inequality and its applications[J]. Appl Math Comput, 2005, 165: 599

[4] Abdeldaim A, Yakout M. On some new integral inequalities of Gronwall-Bellman-Pachpatte type[J]. Appl Math Comput, 2011, 217: 7887.

[5] Deng S F. Nonlinear discrete inequalities with two variables and their applications[J]. Appl Math Comput, 2010, 217: 2217.

[6] Lipovan O, Integral inequalities for retarded Volterra equations[J]. Math Anal Appl, 2006, 322: 349.

[7] Wu Y. A new type of weakly singular Volterra integral inequalities[J]. Acta Math Appl Sin, 2008, 31: 584.

[8] Zeng K L, Wu Y, Zhong S M. Discrete nonlinear integral inequalities in two variables and their applications [J]. Appl Math Comput, 2009, 207: 140.

[9] 王五生，李自尊. 一类乘积形式的非线性时滞积分不等式及其应用[J]. 四川大学学报：自然科学版，2013，50(1)：29.

[10] 严勇. 一类非连续函数的 Bellman-Bihari 型积分不等式的推广及应用[J]. 四川大学学报：自然科学版，2012，49(6)：1219.

[11] 欧阳亮. 关于二阶微分方程 $y''+A(t)y=0$ 解的有界性[J]. 数学进展，1957，3：409.

[12] Dafermos C M. The second law of thermodynamics and stability[J]. Arch Rat Mech Anal, 1979, 70: 167.

[13] Pachpatte B G. On some new inequalities related to certain inequalities in the theory of differential equations [J]. Math Anal Appl, 1995, 189: 128.

[14] Cheung W S. Some new nonlinear inequalities and applications to boundary value problems[J]. Nonlinear Anal, 2006, 64: 2112.

[15] Wan L L, Xu R. Some generalized integral inequalities and their applications[J]. J Math Inequl, 2013, 3: 495.