doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 03. 002

Deligne-Simpson 问题与 Hurwit 计数问题的关系

李莎莎，郑　泉
(四川大学数学学院，成都，610064)

摘　要：本文考虑 Deligne-Simpson 问题与 Hurwitz 计数问题的关系. 本文首先观察到它们是不同群 G 上的相同代数方程 $(A_1, B_1)\cdots(A_g, B_g)X_1\cdots X_k = I$ 的求解问题，然后计算了具有任意拆分的 3 阶 Deligne-Simpson 问题的欧拉特征类，并将其中一些特征类的生成函数表示成有理函数.

关键词：Deligne-Simpson 问题；Hurwitz 计数问题；簇；欧拉特征类
中图分类号：O187.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2016)02-0247-06

On relationship of the Deligre-Simpson problem and the Harwitz enumeration problem

LI Sha-Sha, ZHENG Quan
(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we consider the relationship between the Deligne-Simpson problem and Hurwitz enumeration problem. First, we observe that they are solutions of the same algebraic equation on different groups, which is $(A_1, B_1)\cdots(A_g, B_g)X_1\cdots X_k = I$. Then we calculate Euler characteristic of the 3th order Deligne-Simpson problem with any partition, and express the generating function of some Euler characteristic as the rational functions.

Key words: Deligne-Simpson problem; Hurwitz enumeration problem; Varieties; Euler characteristic
(2010 MSC 15A30, 20G05)

1　引　言

设 G 是一个群，$C_1, \cdots, C_k$ 是 G 中 k 个满足一定条件的共轭类. 我们考虑如下的代数方程

$$(A_1, B_1)\cdots(A_g, B_g)X_1\cdots X_k = I \tag{1}$$

其中 $A_i, B_i \in G$，$(A_i, B_i) = A_iB_iA_i^{-1}B_i^{-1}$，$i = 1, \cdots, g$ 为非负整数，$X_j \in C_j$，$j = 1, \cdots, k$，I 是单位元.

设 $\mu^1, \cdots, \mu^k$ 是正整数 n 的 k 个给定的拆分，即 $\mu^i = (\mu_1^i, \mu_2^i, \cdots, \mu_{r_i}^i)$，其中 $r_i = l(\mu^i)$ 表示 μ^i 的长，满足非负整数 $\mu_1^i \geqslant \mu_2^i \geqslant \cdots \geqslant \mu_{r_i}^i$，$\sum_{j=1}^{r_i}\mu_j^i = n$. 我们把 n 的 k 重拆分写作 $\mu = (\mu^1, \cdots, \mu^k) \in (P_n)^k$，$P_n$ 表示 n 的所有拆分的集合，记 $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} P_n$ 为 P. 如果取 G 为复数域上的一般线性群 $GL_n(\mathbf{C})$，C_i 是有 μ^i 型的半单共轭类，即 $X_i \in C_i$ 是具有特征值重数分别为 $\mu_1^i, \mu_2^i, \cdots, \mu_{r_i}^i$ 的 n 阶复矩阵，$i = 1, \cdots, k$，则当 $g = 0$ 时，方程(1)等价于 Deligne-Simpson 问题[1,2]. 当 $g > 0$ 时，我们称它为广义的 Deligne-Simpson 问题. 当 G 为有限域 F_q 上的一般线性群时，该方程等价于 Deligne-Simpson 问题解空间欧拉数问题. 而如果取 G 为 n 阶置换群 S_n，C_i 是从属于拆分 μ^i 的共轭类，即 $X_i \in C_i$ 是循环长度分别为 $\mu_1^i, \mu_2^i, \cdots, \mu_{r_i}^i$ 的置换元，$i = 1, \cdots, k$，则方程(1)等价于所谓的 Hurwitz 计数

投稿日期：2015-05-05
作者简介：李莎莎(1989—)，女，河南人，硕士研究生，主要研究方向为微分几何。Email：939269931@qq.com

问题[3,4].

为研究 Deligne-Simpson 问题和 Hurwitz 计数问题的关系，本文主要讨论 $n=3$ 的 Deligne-Simpson 问题的欧拉特征类，从而得到了亏格为 0，3 阶任意拆分 $\mu=((1^3)^k,(2,1)^l,(3^1)^n)$（其中 $k,l,n\in\mathbf{N}$）的 Deligne-Simpson 问题的欧拉特征值的表达式，并利用 Maple 软件将其中一些特征类的生成函数写成了有理函数.

2 $G=GL_n(\mathbf{C})$的情形

定义 2.1[5] 如果每个半单共轭类 $C_i\subset GL_n(\mathbf{C})$都有 μ^i 型，则称 k 重半单共轭类 $(C_1,C_2,\cdots,C_k)$ 是 $\mu=(\mu^1,\mu^2,\cdots,\mu^k)$ 型的. 如果对于任意矩阵 $X_i\in C_i$ 和子空间 $V\subseteq\mathbf{C}^n$ 有 $\prod_{i=1}^{k}\det(X_i|_V)=1$,那么 $V=0$ 或 $V=\mathbf{C}^n$，则称 k 重半单共轭类 $(C_1,\cdots,C_k)$ 是 generic 的.

根据文献[5]，在复数域 $\mathbf{C}$ 上始终存在一个 μ 型的 generic k 重半单共轭类 $(C_1,C_2,\cdots,C_k)$，其中 $\mu=(\mu^1,\mu^2,\cdots,\mu^k)$. 文献[5]在 $\prod_{i=1}^{k}\det X_i=1$ 的假设下定义了一个 μ 型的 generic 特征簇 M_μ：

$$U_\mu=\{A_1,B_1,\cdots,A_g,B_g\in GL_n(\mathbf{C}),\\ X_1\in C_1,\cdots,X_k\in C_k\mid(A_1,B_1)\cdots\\ (A_g,B_g)X_1\cdots X_k=I_n\},$$

其中 $(A,B)=ABA^{-1}B^{-1}$. 群 $GL_n(\mathbf{C})$ 共轭地作用在 U_μ 上，可以约化为 $PGL_n(\mathbf{C})$ 的作用，令

$$M_\mu:=U_\mu//PGL_n:=Spec(C[U_\mu]^{PGL_n(C)}).$$

称 M_μ 是一个 μ 型的 generic 特征簇. 文献[5]和[6]已经证明了在非空的情况下 M_μ 的维数是

$$d_\mu:=n^2(2g-2+k)-\sum_{i,j}(\mu_j^i)^2+2.$$

考虑有序对 (d,ω). 如果 $d_1>d_2$，那么 $(d_1,\omega)>(d_2,\mu)$；如果 $|\omega|\geqslant|\mu|$，那么 $(d,\omega)\geqslant(d,\mu)$，其中 ω,μ 是非零拆分，$d_1,d_2,d\in\mathbf{Z}_{>0}$. 对于非增序列 $\omega=(d_1,\omega^1)\geqslant(d_2,\omega^2)\geqslant\cdots\geqslant(d_r,\omega^r)$，称它为型(type)[5]，为了简化记法写作 $\omega=(d_1,\omega^1)(d_2,\omega^2)\cdots(d_r,\omega^r)$. 对于上述的型 ω，其大小记 $|\omega|:=\sum_i d_i|\omega^i|$，$(d,\lambda)$ 在 ω 中的重数记为 $m_{d,\lambda}(\omega)$.

本文的 k,n,g 都是非负整数. 通常把 Schur 对称函数、完全对称函数、单项对称函数的表达式分别写作 $s_\lambda(x)$、$h_\lambda(x)$ 和 $m_\lambda(x)$. 设对称函数环 $\Lambda(x_1,\cdots,x_k):=\Lambda(x_1)\otimes_{\mathbf{Z}}\cdots\otimes_{\mathbf{Z}}\Lambda(x_k)$，其中 $x_i=(x_i^1,\cdots,x_i^n,\cdots)$ 是无穷多个变量的向量，$i=1,\cdots,k$. 我们简记 $\Lambda(x_1,\cdots,x_k)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}(q,t)$ 为 Λ. 设 T 为一个变量，对于任意的 $V\in T\Lambda[[T]]$ 构造映射[5]：

$$Exp:T\Lambda[[T]]\to 1+T\Lambda[[T]],$$

$$V\mapsto\exp\Big(\sum_{d\geqslant1}\frac{1}{d}V(x_1^d,\cdots,x_k^d,q^d,t^d,T^d)\Big).$$

任取 $F\in 1+T\Lambda[[T]]$，令 $U_n\in\Lambda$ 是 $\log(F)$ 的展开系数，即

$$\log(F)=\sum_{n\geqslant1}U_n(x_1,\cdots,x_k;q,t)\frac{T^n}{n}.$$

定义

$$V_n(x_1,\cdots,x_k;q,t):=\\ \frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\mu(d)U_{n/d}(x_1^d,\cdots,x_k^d;q^d,t^d),$$

其中 μ 是 Möbius 函数，那么 Log 映射定义为

$$Log(F):=\sum_{n\geqslant1}V_n(x_1,\cdots,x_k;q,t)T^n.$$

对任取的对称函数序列 $A_\lambda(x;q,t)\in\Lambda$（其中 λ 是拆分，$A_0=1$）构成的 Log 函数，有如下形式的展开式[5]：

$$Log\Big(\sum_{\lambda\in P}A_\lambda T^{|\lambda|}\Big)=\sum_\omega C_\omega^0 A_\omega T^{|\omega|}\tag{2}$$

这里当 $\omega=(d,\omega^1)(d,\omega^2)\cdots(d,\omega^r)$ 时，有

$$C_\omega^0=\frac{\mu(d)}{d}(-1)^{r-1}\frac{(r-1)!}{\prod_\lambda m_{d,\lambda}(\omega)!}\tag{3}$$

其它的 $C_\omega^0=0$. 考虑作用在 $\Lambda(x)$ 上的 Hall 配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，将其定义扩充作用在 $\Lambda(x_1,\cdots,x_k)$ 上：

$$\langle a_1(x_1)\cdots a_k(x_k),b_1(x_1)\cdots b_k(x_k)\rangle=\\ \langle a_1,b_1\rangle\cdots\langle a_k,b_k\rangle.$$

对于拆分 $\lambda\in P_n$ 定义亏格为 g 的 hook 函数 $H_\lambda(z,w)$ 为[7]：

$$H_\lambda(z,w):=\\ \prod_{s\in\lambda}\frac{(z^{2a(s)+1}-w^{2l(s)+1})^{2g}}{(z^{2a(s)+2}-w^{2l(s)})(z^{2a(s)}-w^{2l(s)+2})}\tag{4}$$

其中 $a(s)$ 和 $l(s)$ 分别是拆分 s 的 Young 图的 arm 和 leg 长.

设 $\widetilde{H}_\lambda(x;q,t)\in\Lambda(x)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}(q,t)$ 为 Macdonald 对称函数[8]，定义有 k 个点亏格为 g 的柯西函数为

$$\Omega(z,w):=\\ \sum_{\lambda\in P}H_\lambda(z,w)\prod_{i=1}^{k}\widetilde{H}_\lambda(x_i;z^2,w^2)\tag{5}$$

对于 $\mu=(\mu^1,\cdots,\mu^k)\in P^k$，构造多项式：

$$\mathbf{H}_\mu(z,w):=\\ (z^2-1)(1-w^2)\langle Log\,\Omega(z,w),h_\mu\rangle\tag{6}$$

其中 $h_\mu=h_{\mu^1}(x_1)\cdots h_{\mu^k}(x_k)\in\Lambda$ 是完全对称函数，

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是上述定义的 Hall 配对.

考虑紧致支撑混合 Hodge 多项式

$$H_c(M_\mu;x,y,t):=\sum h_c^{i,j;k}(M_\mu)x^iy^jt^k,$$

其中 $h_c^{i,j;k}(M_\mu)$ 是紧致支撑混合 Hodge 数，那么 E-多项式

$$E(M_\mu;\sqrt{q},\sqrt{q}):=H_c(M_\mu;\sqrt{q},\sqrt{q},-1).$$

记 $E(M_\mu;q)=E(M_\mu;\sqrt{q},\sqrt{q})$，参考文献[5]已经证明了如下公式：

引理 2.2

$$E(M_\mu;q)=q^{(1/2)d_\mu}\boldsymbol{H}_\mu\left(\sqrt{q},\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\tag{7}$$

当 $q=1$ 时此多项式就是特征簇 M_μ 的欧拉特征类 $E(M_\mu)$ 的计算公式，即 $E(M_\mu)=E(M_\mu;1)$.

注 1　当 G 为有限域 F_q 上的一般线性群 $GL_n(F_q)$ 时，$E(M_\mu;q)$ 等于计数多项式[7]，由 Katz 定理，$E(M_\mu;q)=\#M_\mu(F_q)$，其中 $\#M_\mu(F_q)$ 是 M_μ 在有限域 F_q 上的点数，即

$$\#M_\mu(F_q)=\sum_{\chi\in Irr(GL_n(F_q))}\left(\frac{|GL_n(F_q)|}{\chi(1)}\right)^{2g-2}\prod_{i=1}^{k}\frac{\chi(X_i)}{\chi(1)}|X_i|\tag{8}$$

其中 $Irr(GL_n(F_q))$ 表示群 $GL_n(F_q)$ 的不可约特征类的集合，这时方程(1)的解数和 M_μ 的欧拉数相差一个 $GL_n(F_q)$ 的共轭作用.

3　G 为置换群 S_n 的情形

设 $p_1,\cdots,p_k$ 是紧致无边光滑 Riemann 曲面 Σ^g 上的 k 个点，则 Σ^g 在 p_i 上具有分歧类型 μ^i，$i=1,\cdots,k$ 的 Hurwitz 覆盖指的是全纯同态映射 π：$\Sigma^h\to\Sigma^g$ 满足：

(i) Σ^h 是亏格为 h 的紧致无边的光滑曲面(不一定连通)；

(ii) π 在 p_i 上具有分歧类型 μ^i，μ^i 是 n 的一个拆分，$i=1,\cdots,k$，因而 $\deg\pi=n$；

(iii) π 在 $\Sigma^g\backslash\{p_1,\cdots,p_k\}$ 上无分歧点.

称 Hurwitz 覆盖 $\pi:\Sigma^h\to\Sigma^g$ 和 Hurwitz 覆盖 π'：$\Sigma^h\to\Sigma^g$ 等价，如果存在全纯同胚映射 $\rho:\Sigma^h\to\Sigma^h$ 使得 $\pi'\circ\rho=\pi$. 注意 Σ^h 的亏格 h 满足 Hurwitz 公式

$$2h-2+n(2-g)=\sum_{i=1}^{k}(n-l(\mu^i)).$$

Hurwitz 数 $H_n^{\Sigma^g}(\mu^1,\cdots,\mu^k)$ 定义为上述等价的 Hurwitz 覆盖 π 的个数乘以 $\dfrac{1}{|\mathrm{Aut}(\pi)|}$ 所得的值，其中 $\mathrm{Aut}(\pi)$ 是由 π 所确定的自同构群.

根据文献[3,4]知 Hurwitz 计数问题等价于 $(A_1,B_1,\cdots,A_g,B_g,X_1,\cdots,X_k)$ 的计数问题，其中 $A_1,B_1,\cdots,A_g,B_g,X_1,\cdots,X_k$ 满足：

(1) $A_i,B_i\in S_n$，$i=1,\cdots,g$；

(2) $C_j\in S_n$ 具有循环类型 μ^j，$X_j\in C_j$，$j=1,\cdots,k$；

(3) 满足方程 $(A_1,B_1)\cdots(A_g,B_g)X_1\cdots X_k=I$，

如果该方程有解，记其解的数目为 $\#(g;\mu^1,\cdots,\mu^k)$，则有[4]：

$$H_n^{\Sigma^g}(\mu^1,\cdots,\mu^k)=\frac{1}{n!}\#(g;\mu^1,\cdots,\mu^k).$$

例 3.1　$g=0,n=3,\mu^1=\mu^2=\mu^3=\mu^4=(2,1),\mu^5=(3)$，则解数和 Hurwitz 数分别为

$$\#(0;(2,1),(2,1),(2,1),(2,1),(3))=54,$$
$$H_3^{CP^1}((2,1),(2,1),(2,1),(2,1),(3))=9.$$

例 3.2　$g=1,n=3,\mu^1=\mu^2=\mu^3=(3)$，则解数和 Hurwitz 数分别为

$$\#(1;(3),(3),(3))=90,$$
$$H_3^{T^1}((3),(3),(3))=15.$$

注 2　(i) 注意到

$$H_n^{\Sigma^g}(\mu^1,\cdots,\mu^k)=\sum_{\chi\in Irr(S_n)}\left(\frac{n!}{\chi(1)}\right)^{2g-2}\prod_{i=1}^{k}\frac{\chi(X_i)}{\chi(1)}|X_i|\tag{9}$$

可以看出公式(8)和(9)形式上是一致的，则有限群上的 Deligne-Simpson 问题的解空间的欧拉数和 Hurwitz 数是有联系的.

(ii) 为了研究 Deligne-Simpson 问题和 Hurwitz 问题的关系，下一节我们主要讨论 $n=3$ 的 Deligne-Simpson 问题的欧拉特征类(这里考虑的 Deligne-Simpson 问题是针对乘法的).

4　3 阶 Deligne-Simpson 问题

当 $g=0$ 时，对一般的拆分 $\mu=((1^3)^k,(2,1)^l,(3^1)^n)$ 的欧拉特征类，这里的 $k,l,n\in\mathbf{N}$，我们有如下定理：

定理 4.1

$$E(M_\mu)=\frac{1}{24}\left[\frac{1}{4}k^4+(\frac{2}{3}l-\frac{3}{2})k^3+(\frac{2}{3}l^2-3l+\frac{115}{36})k^2\right]3^l6^k+$$
$$\frac{1}{24}\left[(\frac{8}{27}l^3-2l^2+\frac{115}{27}l-\frac{17}{6})k+(\frac{4}{81}l^4-\frac{4}{9}l^3+\frac{116}{81}l^2-\frac{52}{27}l+\frac{8}{9})\right]3^l6^k\tag{10}$$

注 3 该表达式与 n 无关，这和 Deligne-Simpson 问题中增加一些数量矩阵的乘积，其特征簇空间不变是相适应的.

证明 我们仅给出亏格 $g=0$，k 重拆分为 $\mu=((2,1),\cdots,(2,1))$ 的欧拉特征类的计算过程，一般情况可类似得到. 该计算过程分两步：

(i)给出任意亏格 g,k 重拆分 $\mu=((2,1),\cdots,(2,1))$ 的欧拉特征类 $E(M_\mu)$ 中的多项式 $\boldsymbol{H}_\mu(z,w)$.

从公式(2),(5),(6)可以得到

$$\boldsymbol{H}_\mu(z,w)=\sum_\omega \boldsymbol{H}_\mu^\omega(z,w) \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_\mu^\omega(z,w):=(z^2-1)(1-w^2)C_\omega^0 H_\omega(z,w)\prod_{i=1}^k\langle \widetilde{H}_\omega(x_i,z^2,w^2),h_{(2,1)}(x_i)\rangle,$$

这里的求和是取遍大小为 3 的所有型. 因为 $\mu=(\mu^1,\cdots,\mu^k)$ 中对每个 i 都有 $\mu^i=(2,1)$，所以

$$\boldsymbol{H}_\mu^\omega(z,w):=(z^2-1)(1-w^2)C_\omega^0 H_\omega(z,w)\langle \widetilde{H}_\omega(x;z^2,w^2),h_{(2,1)}(x)\rangle^k.$$

又大小为 3 的 $\omega=(d_1,\omega^1)\cdots(d_r,\omega^r)$ 总共有 8 种，其中 $d_i\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$，$\omega^i\in P$，即 $(1,3^1)$，$(1,1^3)$，$(1,1^1 2^1)$，$(3,1)$，$(1,2^1)$，$(1,1)$，$(1,1^2)(1,1)$，$(2,1)(1,1)$，$(1,1)^3$，这里的 $(1,1)^3$ 是 $(1,1)(1,1)(1,1)$ 的缩写.

下面给出 $\boldsymbol{H}_\mu^\omega(z,w)$ 的计算. 首先，当 $\omega=(1,3^1)$ 时

$$\boldsymbol{H}_\mu^{(1,3^1)}(z,w):=(z^2-1)(1-w^2)C_{(1,3^1)}^0 H_{(1,3^1)}(z,w).\langle \widetilde{H}_{(1,3^1)}(x;z^2,w^2),h_{(2,1)}(x)\rangle^k.$$

从公式(3)知道 $C_{(1,3^1)}^0=1$，由拆分为 $(1,3^1)$ 的 Young 图表得到

$$H_{(1,3^1)}(z,w)=\frac{((z^5-w)(z^3-w)(z-w))^{2g}}{(z^6-1)(z^4-w^2)(z^4-1)(z^2-w^2)(z^2-1)(1-w^2)}.$$

现在考虑 $\langle \widetilde{H}_{(1,3^1)}(x;z^2,w^2),h_{(2,1)}(x)\rangle$，对任意拆分 λ 有

$$H_\lambda(x;q,t)=\sum_\nu \widetilde{K}_{\nu\lambda}(q,t)s_\nu(x) \tag{12}$$

这里的 $s_\nu(x)$ 是 Schur 对称函数，$K_{\nu\lambda}(q,t):=t^{n(\lambda)}K_{\nu\lambda}(q,t^{-1})$ 是 (q,t)-Kostka 多项式[11]，对于 $\{K_{\nu\lambda}(q,t)\}_{\nu,\lambda}$（如表 1)可以得到式(13)，

表 1 $n=3,\{K_{\nu\lambda}(q,t)\}_{\nu,\lambda}$

Tab. 1 The $\{K_{\nu\lambda}(q,t)\}_{\nu,\lambda}$ graph with $n=3$

	3^1	$2^1 1$	1^3
3^1	1	$q+q^2$	q^3
$2^1 1$	1	$t+q$	qt
1^3	1	t^2+t	t^3

$$\widetilde{H}_{(1,3^1)}(x;z^2,w^2)=s_{3^1}(x)+(z^4+z^2)s_{1^1 2^1}(x)+z^6 s_{1^3}(x) \tag{13}$$

由于单项对称函数集 $\{m_\lambda(x)\}$ 是完全对称函数集 $\{h_\mu(x)\}$ 的对偶基，所以只需用单项对称函数表示 Schur 函数，根据它们之间的关系[11]：

$$s_{3^1}(x)=m_{3^1}+m_{1^1 2^1}(x)+m_{1^3}(x),$$

$$s_{1^1 2^1}(x)=m_{1^1 2^1}(x)+2m_{1^3}(x)$$

以及

$$s_{1^3}(x)=m_{1^3}(x),$$

可得

$$\langle \widetilde{H}_{(1,3^1)}(x;z^2,w^2),h_{(2,1)}(x)\rangle=1+z^2+z^4.$$

然后我们考虑 $\omega=(1,2^1)(1,1)$，

$$\boldsymbol{H}_\mu^{(1,2^1)(1,1)}(z,w):=(z^2-1)(1-w^2)C_{(1,2^1)(1,1)}^0 H_{(1,2^1)(1,1)}(z,w).\langle \widetilde{H}_{(1,2^1)(1,1)}(x;z^2,w^2),h_{(2,1)}(x)\rangle^k.$$

其中 $C_{(1,2^1)(1,1)}^0=-1$. 根据拆分 $(1,2^1)(1,1)$ 的 Young 表得到

$$H_{(1,2^1)(1,1)}(z,w)=\frac{((z^3-w)(z-w)^2)^{2g}}{(z^4-1)(z^2-w^2)(z^2-1)(1-w^2)(z^2-1)(1-w^2)}.$$

当 $n=2$ 时 $\{\widetilde{K}_{\nu\lambda}(q,t)\}_{\nu,\lambda}$ 表如图 2，又 $s_{2^1}(x)=m_{2^1}(x)+m_{1^1}(x)$ 和 $s_{1^2}(x)=m_{1^2}(x)$，根据 $\widetilde{H}_\omega(x;q,t)$ 的定义[5,11]

表 2 $n=2,\{\widetilde{K}_{\nu\lambda}(q,t)\}_{\nu,\lambda}$

Tab. 2 The $\{\widetilde{K}_{\nu\lambda}(q,t)\}_{\nu,\lambda}$ graph with $n=2$

	2^1	1^2
2^1	1	q
1^2	1	t

$$\widetilde{H}_{(1,2^1)(1,1)} = \widetilde{H}_{(1,2^1)} \cdot \widetilde{H}_{(1,1)} = m_{3^1}(x) + (z^2+2)m_{1^1 2^1} + 3(z^2+1)m_{1^3}(x).$$

因此

$$\langle \widetilde{H}_{(1,2^1)(1,1)}(x;z^2,w^2), h_{(2,1)}(x)\rangle = z^2+2.$$

其它的 $\boldsymbol{H}_\mu^\omega(z,w)$ 可以类似计算. 又由于 $\boldsymbol{H}_\mu^{(3,1)}(z,w) = \boldsymbol{H}_\mu^{(2,1)(1,1)}(z,w) = 0$，故前面的公式(11)简化成

$$\boldsymbol{H}_\mu(z,w) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\alpha_i}\beta_i^{2g}\gamma_i^k,$$

这里的 α,β, 和 γ 用表 3 中的多项式给出.

表 3　$H_\mu(z,w)$ 中的 α,β,γ 值

Tab. 3　The values α,β,γ of $\boldsymbol{H}_\mu(z,w)$

α	β	γ
$(z^6-1)(z^4-w^2)(z^4-1)(z^2-w^2)$	$(z^5-w)(z^3-w)(z-w)$	$1+z^2+z^4$
$(z^2-w^4)(w^6-1)(w^4-1)(z^2-w^2)$	$(z-w^5)(z-w^3)(z-w)$	$1+w^2+w^4$
$(z^4-w^2)(z^2-w^4)(z^2-1)(1-w^2)$	$(z^3-w^3)(z-w)^2$	$1+z^2+w^2$
$-(z^4-1)(z^2-w^2)(z^2-1)(1-w^2)$	$(z^3-w)(z-w)^2$	$2+z^2$
$-(z^2-w^2)(1-w^4)(z^2-1)(1-w^2)$	$(z-w^3)(z-w)^2$	$2+w^2$
$3(z^2-1)^2(1-w^2)^2$	$(z-w)^3$	3

(ii)令 $g=0, z=\sqrt{q}, w=\frac{1}{\sqrt{q}}$. 则

$$\boldsymbol{H}_\mu(\sqrt{q},\frac{1}{\sqrt{q}}) = \frac{(1+q+q^2)^k}{(q^3-1)(q^2-\frac{1}{q})(q^2-1)(q-\frac{1}{q})} + \frac{(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2})^k}{(q-\frac{1}{q^2})(\frac{1}{q^3}-1)(\frac{1}{q^2}-1)(q-\frac{1}{q})} + \frac{(1+q+\frac{1}{q})^k}{(q^2-\frac{1}{q})(q-\frac{1}{q^2})(q-1)(1-\frac{1}{q})} - \frac{(2+q)^k}{(q^2-1)(q-\frac{1}{q})(q-1)(1-\frac{1}{q})} - \frac{(2+\frac{1}{q})^k}{(q-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{q^2})(q-1)(1-\frac{1}{q})} + \frac{3^k}{3(q-1)^2(1-\frac{1}{q})^2} \tag{14}$$

由引理 2.2 计算 $E(M_\mu)$ 时只需令上述多项式 $q=1$ (因为 $q^{(1/2)d_\mu}$ 在 $q=1$ 的时候等于 1)，但是应注意到上述多项式化简之后是一个分母中含有 $q-1$ 因子的分式，所以不能直接把 $q=1$ 带入. 这时我们可以通过求极限 $\lim\limits_{q\to 1}\boldsymbol{H}_\mu(\sqrt{q},\frac{1}{\sqrt{q}})$ 得到欧拉特征类

$$E(M_\mu)=2\cdot 3^{-5}\cdot(k-1)(k-2)(k-3)^2\cdot 3^k.$$

注 4　当拆分为 $\mu=(3^1,\cdots,3^1)$ 时, $E(M_\mu)=3^{-3}$，它正好是三个三阶循环群作用在其上产生的结果.

现在考虑 $k+1$ 重拆分 $\mu=(1^3,\cdots,1^3,(2,1))$ 即 $\mu^i=(1^3), \mu^{k+1}=(2,1), i=1,\cdots,k$ 的欧拉特征类. 通过计算有

$$E(M_\mu) = 2^{-5}\cdot 3^{-2}\cdot k(k-1)(9k^2-21k+10)\cdot 6^k \tag{15}$$

把上述式子作为 v^k 系数写成一个幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(M_\mu)v^k$，其中 v 是变量，通过 Maple 可以写成一个有理函数

$$R = \sum_{k=1}^{\infty}[2^{-5}\cdot 3^{-2}\cdot k(k-1)(9k^2-21k+10)\cdot 6^k]v^k = v^2+126v^3+3780v^4+70200v^5+\cdots = \frac{2\sqrt{3}\,6^{\frac{1}{3}}\pi v^{\frac{7}{3}} LegendreP(2,\frac{2}{3},\frac{6v+1}{1-6v})}{3(1-6v)^3\Gamma(\frac{2}{3})} \tag{16}$$

对其它拆分的欧拉特征类做类似的处理，因此有如下的表 4，表中幂级数是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(M_\mu)v^k$，其中 μ 为左边相应的拆分.

表 4 各个拆分对应的幂级数和有理函数 R

Tab. 4 The power series and rational functions of the corresponding partition

拆分	幂级数	R
k 重 $(1^3,1^3,\cdots,1^3)$	$8v^3+468v^4+11448v^5+192240v^6+\cdots$	$\frac{4v^3(72v^2+57v+2)}{(1-6v)^5}$
$k+1$ 重 $(1^3,1^3,\cdots,1^3,3^1)$	$8v^3+468v^4+11448v^5+192240v^6+\cdots$	$\frac{4v^3(72v^2+57v+2)}{(1-6v)^5}$
$k+1$ 重 $(1^3,1^3,\cdots,1^3,(2,1))$	$v^2+126v^3+3780v^4+70200v^5+\cdots$	公式(16)
k 重 $((2,1),(2,1),\cdots,(2,1))$	$4v^4+96v^5+1080v^6+8640v^7+\cdots$	$\frac{4v^4(9v+1)}{(1-3v)^5}$
$k+1$ 重 $((2,1),\cdots,(2,1),3^1)$	$4v^4+96v^5+1080v^6+8640v^7+\cdots$	$\frac{4v^4(9v+1)}{(1-3v)^5}$
$k+1$ 重 $((2,1),\cdots,(2,1),1^3)$	$6v^3+96v^4+900v^5+6480v^6+\cdots$	$\frac{6v^3(v+1)}{(1-3v)^5}$
k 重 $(3^1,3^1,\cdots,3^1)$	$3^{-3}(v+v^2+v^3+\cdots)$	$\frac{v}{27(1-v)}$
$k+1$ 重 $(3^1,\cdots,3^1,(2,1))$	0	0
$k+1$ 重 $(3^1,\cdots,3^1,1^3)$	0	0

参考文献:

[1] Kostov V P. On the Deligne-Simpson problem [J]. Acad Sci, 1999, 32(9): 657.

[2] Jordan D. Quantized multiplicative quiver varieties [J]. Adv Math, 2014, 250: 420.

[3] Hurwitz A. Ueber Riemann′sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten [J]. Math Ann, 1891, 39: 1.

[4] Okounkov A, Pandharipande R. Gromov-Witten theory, Hurwitz theory and completed cycles [J]. Math Ann, 2006, 163: 517.

[5] Hausel T, Letellier E, Rodriguez-Villegas F. Arithmetic harmonic analysis on character and quiver varieties[J]. Duke Math, 2011, 160(2): 323.

[6] Etingof P, Gan W L, Oblomkov A. Generalized double affine Hecke algebras of higher rank [J]. Reine Angew Math, 2006, 600: 177.

[7] Hausel T, Rodriguez-villegas F. Mixed Hodge polynomials of character varieties [J]. Invent Math, 2008, 174(3): 555.

[8] Garsia A M, Haiman M. A remarkable q,t-Catalan sequence and q-Lagrange inversion [J]. Algebraic Combin, 1996, 5(3): 191.

[9] Crawley-boevey W. On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero[J]. Duke Math, 2003, 118: 339.

[10] Hausel T, Letellier E, Rodriguez-Villegas F. Arithmetic harmonic analysis on character and quiver varieties II [J]. Adv Math, 2013, 234: 85.

[11] Macdonald I D. Symmetric functions and Hall polynomials [M]. New York: Oxford Univ Press, 1995.