doi:103969/j.issn.0490-6756.2016.11.004

一类 Rayleigh 型 p- Laplacian 平均曲率方程周期解存在唯一性

陈文斌
(武夷学院数学与计算机学院，武夷山 354300)

摘　要：本文运用重合度理论和一些新的分析方法探讨了一类 Rayleigh 型 p- Laplacian 平均曲率方程

$$\left(\varphi_p\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}\right)\right)'+f(x'(t))+g(x(t-\tau(t)))=e(t)$$

周期解存在性与唯一性问题,得到了一些相应的新结果并举例说明其结果的有效性.

关键词：周期解；平均曲率；重合度定理；Rayleigh；p- Laplacian
中图分类号：O175.1;O177.92　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2016)06-1195-07

Existence and uniqueness of periodic solution for prescribed mean curvature Rayleigh p-Laplacian equation

CHEN Wen-Bin
(School of Mathematics and Computer Science, Wuyi University, Wuyi Shan 354300, China)

Abstract: In this paper, by using the continuation theorem of coincidence degree theory and some analysis methods, we study the existence and uniqueness of periodic solutions for prescribed mean curvature Rayleigh p- Laplacian equations

$$\left(\varphi_p\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}\right)\right)'+f(x'(t))+g(x(t-\tau(t)))=e(t).$$

Some new results are obtained. Furthermore, a numerical example demonstrates the validity of the main results.

Keywords: Periodic solution; Prescribed mean curvature; Continuation theory; Rayleigh; p- Laplacian
(2010 MSC 34A12, 34C25)

1 引　言

近年来,许多学者运用 Mauhin 重合度拓展定理对于平均曲率方程周期解存在性问题进行了研究,获得了很多结果[1-5]. 例如, Li[1] 研究了一类具时滞 Rayleigh 型平均曲率方程

$$\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}\right)'+f(t,x'(t))+g(t,x(t-\tau(t)))=e(t) \tag{1}$$

通过转化类型,将方程(1)转化为以下等价方程组,

$$\begin{cases} x'(t)=\dfrac{y(t)}{\sqrt{1-y^2(t)}}, \\ y'(t)=-f\left(t,\dfrac{y(t)}{\sqrt{1-y^2(t)}}\right)- \\ \quad g(t,x(t-\tau(t))+e(t) \end{cases} \tag{2}$$

并利用重合度理论得到了方程组(2)至少存在一个

收稿日期：2015-05-06
基金项目：福建省中青年教师教育科研项目(JA15524)；武夷学院青年教师科研项目(XQ201305)
作者简介：陈文斌(1986-)，男，安徽安庆人，硕士，主要研究方向为微分方程. E-mail:cwb210168@126.com

T 周期解,从而解决了方程(1)的周期解存在性问题.但我们知道,在方程组(2)先验界估计的证明过程中,条件 $|y|_0<1$ 是必须满足的,但在文献[1]中并没有证明这个条件.之后,为了解决这个问题,梁[2]研究了一类具有偏差变元的广义平均曲率方程周期解存在性问题,方程如下:

$$\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}\right)'+f(x'(t))+g(x(t-\tau(t)))=p(t) \tag{3}$$

对于方程(3),如果下列条件成立:

(A_1) 如果存在一个常数 $l>0$ 使得 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant l|x_1-x_2|,\forall x\in\mathbf{R}$ 和存在一个常数 $M>0$ 使得 $g(x)<-\|p\|_\infty-f(0),x>M;g(x)>-\|p\|_\infty+f(0),x<-M$;

(A_2) 对于任意的 $t\in[0,T]$,存在 $0\leqslant\alpha\leqslant T$ 使得 $|\tau(t)|\leqslant\alpha$. 与此同时,存在 $A>\sqrt{2}\alpha l,B\geqslant 0$ 使得 $|f(x)|\geqslant A|x|+B,xf(x)\geqslant 0$ 或者 $(xf(x)\leqslant 0,\forall x\in\mathbf{R})$;

(A_3) $g'(x)\leqslant 0$ 且 $\|p\|_{L^2}<\dfrac{A-\sqrt{2}\alpha L}{A\sqrt{T}}$;

则问题(3)至少存在一个 T- 周期解.很明显,作者对于问题(3)的解决给了足够复杂和较多的条件,尤其是条件(A_3)非常强.在该文章中,这个条件主要是是用来证明满足先验界估计

$$\{\Omega\subset\{(x_1,x_2)^T\in X:|x_1|_0<d,\ |x_2|_0<\rho<1\}\}.$$

实际上,对于这个问题,我们可以用更简单有效的方法去证明这个条件.

在本文中,我们将考虑更一般形式的方程且采用更加简单合理的条件证明 $|x_2|_0<\rho<1$. 在本文的最后,我们给出了具体的应用例子来说明本文结论与文献[1]的不同.

此外,对于方程(3)来说,具有更一般形式的 p- Laplacian 方程周期解的存在性问题吸引了很多学者的关注.例如,Li[3]研究了一类带两个是滞项的 Lienard 型 p- Laplacian 平均曲率方程

$$\left(\varphi_p\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}\right)\right)'+f(x(t))x'(t)+g(x(t-\tau(t)))+h(x(t-\gamma(t)))=e(t).$$

并运用 Nawhin 重合度理论,得到了方程至少有一个周期解存在. Wang[4]研究了一类具有时滞 Rayleigh 型 p- Laplacian 平均曲率方程:

$$\begin{cases}\left[\varphi_p\left(\dfrac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}\right)\right]'+f(t,x'(t))+\\ \quad g(t,x(t-\tau(t)))=e(t),t\in[0,\omega],\\ x(0)=x(\omega),x'(0)=x'(\omega)\end{cases} \tag{4}$$

其中 f 和 g 分别满足

$$f(t,x)\geqslant a|x|^r,\forall(t,x)\in\mathbf{R}^2,$$
$$g(t,x)-e(t)\geqslant -m_1|x|-m_2,\forall t\in\mathbf{R},\ x\geqslant d,$$

或者

$$f(t,x)\leqslant -a|x|^r,\forall(t,x)\in\mathbf{R}^2,$$
$$g(t,x)-e(t)\leqslant m_1|x|+m_2,\forall t\in\mathbf{R},\ x\leqslant -d,$$

这里 $a,d,r\geqslant 1,m_1$ 和 m_2 都是正常数.通过转化类型,方程(4)等价于以下方程组

$$\begin{cases}x_1'(t)=\dfrac{\varphi_q(x_2(t))}{\sqrt{1-\varphi_q^2(x_2(t))}},\\ x_2'(t)=-f\left(t,\dfrac{\varphi_q(x_2(t))}{\sqrt{1-\varphi_q^2(x_2(t))}}\right)-\\ \quad g(t,x(t-\tau(t)))+e(t),\\ x_1(0)=x_1(\omega),x_2(0)=x_2(\omega)\end{cases} \tag{5}$$

通过 Mawhin 重合度理论,作者获得了方程组(5)至少有一个周期解,从而解决了方程(4)周期解存在性问题.但是,在等价方程组(5)证明存在性的过程中,函数 $\varphi_q(x_2(t))$ 必须满足 $\max\limits_{t\in[0,T]}|\varphi_q(x_2(t))|<1$. 也就是说证明过程中,对方程组的先验界估计时需要满足 $\Omega\subset\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X:|x_1|_0<d,|x_2|_0<\rho<1\}$. 但在文献[4]中,作者并没有证明这一点.同样的问题也出现在文献[3].另外,从文献[4]中可以看出 f 属于单边条件,条件限制较强.有趣的是,本文最后所举例能说明 f 可以不受单边条件限制.

受到上述文献所研究问题的启发,为了解决上述所提出的问题,我们使用 Mawhin 重合度理论和运用一些技巧解决了下列一类具有时滞 Rayleigh 型 p- Laplacian 平均曲率方程

$$\left(\varphi_p\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}\right)\right)'+f(x'(t))+g(x(t-\tau(t)))=e(t) \tag{6}$$

周期解存在性问题,其中 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s,f,g,e\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$. 此外,我们还证明了该方程周期解唯一性问题.很显然,问题(6)比问题(3)更具有一般性.最后,我们用一个实例来说明我们结果的有效性.总之,本文的研究是具有实际意义的.

2 主要引理

引理 2.1[9] 设 X,Y 是两个 Banach 空间，$L:D(L)\subset X\to Y$ 为指标为零的 Fredholm 算子，$\Omega\subset X$ 为有界开集，$N:X\to Y$ 在 $\overline{\Omega}$ 上 L- 紧. 如果下列条件满足：

(i) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$，$x\in\partial\Omega\cap D(L)$，均有 $Lx\neq\lambda Nx$；

(ii) 对任意的 $x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$，均有 $QNx\neq 0$；

(iii) $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$，其中 $J:\mathrm{Im}Q\to\mathrm{Ker}L$ 同构. 则方程 $Lx=Nx$ 在 $\overline{\Omega}\cap D(L)$ 上至少存在一个解.

引理 2.2[8] 如果 $u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是在 $\mathbf{R}$ 上是连续可微的且 $a>0$，则有下列不等式成立：

$$|u(t)|\leqslant(2a)^{-\frac{1}{\mu}}\left(\int_{t-a}^{t+a}|u(s)|^{\mu}ds\right)^{\frac{1}{\mu}}+$$
$$a(2a)^{-\frac{1}{P}}\left(\int_{t-a}^{t+a}|u'(s)|^{P}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{P}}.$$

引理 2.3[8] 如果 $s\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$s(t+\omega)\equiv s(t)$，$t\in[0,\omega]$，$\forall t\in\mathbf{R}$ 且 $p\in(1,+\infty)$，$\alpha=\max\limits_{t\in[0,\omega]}s(t)$，$u\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$u(t+\omega)\equiv u(t)$. 则有

$$\int_0^{\omega}|u(t-s(t))-u(t)|^{P}\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\alpha^{P}\int_0^{\omega}|u'(t)|^{P}\mathrm{d}t.$$

为应用引理 2.1，我们研究下列方程组

$$\begin{cases}x_1'(t)=\dfrac{\varphi_q(x_2(t))}{\sqrt{1-(\varphi_q(x_2(t)))^2}}=\varphi(x_2(t)),\\ x_2'(t)=-f(\varphi(x_2(t)))-\\ \quad g(x_1(t-\tau(t)))+e(t)\end{cases}\tag{7}$$

其中，$\varphi_q(s)=|s|^{q-2}s$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$x_2(t)=\varphi_p\left(\dfrac{x_1'(t)}{\sqrt{1+(x_1'(t))^2}}\right)=\varphi^{-1}(x_1'(t))$. 很明显，如果 $(x_1,x_2)^T$ 是方程组(7)的解，那么 x_1 也是方程(6)的解. 设

$$X=Y=$$
$$\{x\,|\,x=(x_1(t),x_2(t))^T\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^2),$$
$$x(t)=x(t+T)\},$$

其模定义为 $\|x\|=\max\{|x_1|_0,|x_2|_0\}$，$|x_1|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|x_1(t)|$，$|x_2|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|x_2(t)|$. 显然 X 和 Y 均是 Bannch 空间. 此外，我们定义算子 L

$$L:D(L)\subset X\to Y,Lx=x'=$$
$$(x_1'(t),x_2'(t))^T,$$

其中

$$D(L)=$$
$$\{x\,|\,x=(x_1(t),x_2(t))^T\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^2),$$
$$x(t)=x(t+T)\}.$$

设

$$X_0=$$
$$\{x\,|\,x=(x_1(t),x_2(t))^T\in$$
$$C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}\times(-1,1)),x(t)=x(t+T)\}.$$

定义线性算子 $N:\overline{\Omega}\subset(X_0\cap X)\subset X\to Y$

$$Nx=$$
$$\left(\frac{\varphi_q(x_2(t))}{\sqrt{1-\varphi_q^2(x_2(t))}},-f(\varphi(x_2(t)))-\right.$$
$$\left.g(x_1(t-\tau(t)))+e(t)\right)^T.$$

又因为

$$\mathrm{Ker}L=$$
$$\{x\,|\,x\in X,x'=(x_1'(t),x_2'(t))^T=(0,0)^T\},$$

则 $x_1'(t)=0$，$x_2'(t)=0$. 显然 $x_1\in\mathbf{R}$，$x_2\in\mathbf{R}$. 所以 $\mathrm{Ker}L=\mathbf{R}^2$，$\mathrm{Im}L=\left\{y\in Y,\int_0^T y(s)\mathrm{d}s=0\right\}$. 由此得 L 是一个指标为零的 Fredholm 算子.

令

$$P:X\to\mathrm{Ker}L,Px=\frac{1}{T}\int_0^T x(s)\mathrm{d}s,$$

$$Q:Y\to\mathrm{Im}Q,Qy=\frac{1}{T}\int_0^T y(s)\mathrm{d}s.$$

记 $K_p=L|^{-1}_{\mathrm{Ker}p\cap D(L)}$. 则

$$(K_py)(t)=\int_0^T G(t,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{s-T}{T},&0\leqslant t\leqslant s,\\ \dfrac{s}{T},&s\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

这意味着 $\forall\,\Omega\subset(X_0\cap X)\subset X$ 是一个有界开集，$QN(\overline{\Omega})$ 在 Y 中有界且 $K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})$ 在 X 中是相对紧的，则算子 N 在 $\overline{\Omega}$ 中是 L-紧的.

3 主要结果

首先，我们给出下列条件

(A_1') 存在常数 $l>0$，$\alpha>0$ 使得 $g(x)$ 满足 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant l|x_1-x_2|$ 且 $xg(x)\leqslant-\alpha x^2$；

(A_2') 存在正常数 a,b,c 使得 $f(x)$ 满足 $cx^2\leqslant xf(x)\leqslant ax^2+bx$；

(A_3') $(g(x_1)-g(x_2))(x_1-x_2)<0$，$\forall x_1$，

$x_2, t \in \mathbf{R}$ 且 $x_1 \neq x_2$.

定理 3.1 若满足条件(A_1')和(A_2')且 $p \geqslant 2, c > l|\tau|_0$,则问题(6)至少存在一个 T-周期解;如果 (A_3')也成立,则问题(6)有唯一的 T-周期解.

证明 为了使用引理 2.1,我们考虑下列方程组

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda \dfrac{\varphi_q(x_2(t))}{\sqrt{1-(\varphi_q(x_2(t)))^2}} = \lambda\varphi(x_2(t)), \\ x_2'(t) = -\lambda f(\varphi(x_2(t))) - \\ \quad \lambda g(x_1(t-\tau(t))) + \lambda e(t) \end{cases} \tag{8}$$

其中 $\lambda \in (0,1)$. 将方程组(8)的第一个式子代入到第二式,得到

$$\left(\varphi^{-1}\left(\frac{x_1'(t)}{\lambda}\right)\right)' = -\lambda f\left(\frac{x_1'(t)}{\lambda}\right) - \lambda g(x_1(t-\tau(t))) + \lambda e(t) \tag{9}$$

在方程(9)两边同时乘以 x_1' 且在 $[0,T]$ 上积分,可以得到

$$\int_0^T \lambda f\left(\frac{x_1'(t)}{\lambda}\right) x_1'(t)\,dt = -\int_0^T \lambda g(x_1(t-\tau(t)))x_1'(t)\,dt + \int_0^T \lambda e(t)x_1'(t)\,dt \tag{10}$$

由条件(A_2'),(A_1')和式(10),有

$$c\int_0^T |x'(t)|^2 dt \leqslant \int_0^T \lambda^2 f\left(\frac{x_1'(t)}{\lambda}\right)\frac{x_1'(t)}{\lambda}dt \leqslant \lambda\int_0^T |(g(x_1(t-\tau(t))) - g(x_1(t)))x_1'(t)|\,dt + \lambda\int_0^T |e(t)x_1'(t)|\,dt \leqslant \lambda\int_0^T |(g(x_1(t-\tau(t))) - g(x_1(t)))\|x_1'(t)|\,dtdt + \lambda\int_0^T |e(t)|x_1'(t)|\,dt \leqslant \lambda l\int_0^T |x_1(t-\tau(t)) - x_1(t)\|x_1'(t)|\,dt + \lambda\int_0^T \|e(t)\|x'(t)\|\,dt \leqslant \lambda l\left(\int_0^T \|x_1(t-\tau(t)) - x_1(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |x_1'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda\|e\|_2|\,\|x_1'\|_1 \leqslant \lambda l|\tau|_0\|x_1'\|_2^2 + \lambda\|e\|_2\|x_1'\|_2,$$

即

$$cx_1'{}_2^2 \leqslant l|\tau|_0\|x_1'\|_2^2 + \lambda\|e\|_2\|x_1'\|_2 \tag{11}$$

从(11)式,我们知道

$$\|x_1'\|_2 \leqslant \lambda\frac{|e|_0\sqrt{T}}{c - l|\tau|_0} := d \tag{12}$$

在方程(9)两边同时乘以 $x_1(t)$ 且在 $[0,T]$ 上积分得

$$\int_0^T x_2(t)x_1(t)\,dt = -\lambda\int_0^T f\left(\frac{x_1'(t)}{\lambda}\right)x_1(t)\,dt - \lambda\int_0^T g(x_1(t-\tau(t)))x_1(t)\,dt + \lambda\int_0^T e(t)x_1(t)\,dt \tag{13}$$

由于

$$\int_0^T x_2'(t)x_1(t)\,dt = -\int_0^T x_1'(t)x_2(t)\,dt = -\lambda\int_0^T \varphi(x_2(t))x_2(t)\,dt = -\lambda\int_0^T \frac{|x_2(t)|^q}{\sqrt{1-(\varphi_q(x_2(t)))^2}}dt \tag{14}$$

由(12),(13)式和条件(A_2')有

$$\int_0^T f\left(\frac{x_1'(t)}{\lambda}\right)x_1(t)\,dt \leqslant \int_0^T \left|f\left(\frac{x_1'(t)}{\lambda}\right)|x_1(t)|\right|dt \leqslant \int_0^T \left|a\frac{x_1'(t)}{\lambda} + b\right||x_1(t)|\,dt \leqslant \int_0^T \left|a\frac{x_1'(t)}{\lambda}\right||x_1(t)|\,dt + \int_0^T b|x_1(t)|\,dt \leqslant \frac{a}{\lambda}\|x_1'\|_2\|x_1\|_2 + b\sqrt{T}\|x_2\|_2 \leqslant \lambda d\frac{a}{\lambda}\|x_1\|_2 + b\sqrt{T}\|x_1\|_2 = (ad + b\sqrt{T})\|x_1\|_2 \tag{15}$$

与此同时,根据(13)式和条件(A_2'),得

$$\int_0^T g(x_1(t-\tau(t)))x_1(t)\,dt = \int_0^T (g(x_1(t-\tau(t))) - g(x_1(t)))x_1(t)\,dt + \int_0^T g(x_1(t))x_1(t)\,dt \leqslant \int_0^T |g(x_1(t-\tau(t))) - g(x_1(t))\|x_1(t)|\,dt -$$

$$\alpha\|x_1\|_2^2 \leqslant l|\tau|_0 d\|x_1\|_2 - \alpha\|x_1\|_2^2 \leqslant$$
$$l|\tau|_0 d\|x_1\|_2 - \alpha\|x_1\|_2^2 \tag{16}$$

把式(14),(15),(16)代入(13)式,有

$$\alpha\|x_1\|_2^2 \leqslant l|\tau|_0 d\|x_1\|_2 + (ad + b\sqrt{T})\|x_1\|_2 + \|e\|_2\|x_1\|_2 \tag{17}$$

(17)式意味着

$$\|x_1\|_2 \leqslant d_1 \tag{18}$$

根据引理 2.2,有下列等式

$$|x_1(t)| \leqslant (T)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}|x_1(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} + T(T)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}|x_1'(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$(T)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|x_1(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} + T(T)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|x_1'(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

把(12),(18)式代入到(19)式,很明显存在一个正常数 D,使得

$$|x_1|_0 < D. \tag{20}$$

下面我们来证明 $|x_2|_0 < 1$. 由于 $|x_1|_0 < D$ 且 $g(x)$ 是连续函数,则存在一个正常数 D_1 使得对于 $\forall t \in \mathbf{R}$ 有

$$|-g(x(t-\tau(t))) + e(t)| < D_1.$$

下面我们用反证法证明

$$x_2(t) \leqslant \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + c^2}} \tag{21}$$

分两种情况. 第一种情况是当 $x > 0$ 时,由(A_2')知

$$f(x) \geqslant cx,$$

若式(21)不成立,则总存在 $t_2 > t_1$ 这样的时刻,使得

$$x_2(t_1) = \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + c^2}},\ x_2(t_2) > \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + c^2}} \tag{22}$$

且对于任意的 $t \in (t_1, t_2)$ 都有

$$x_2(t) > \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + c^2}}.$$

又根据(8)式的第二个式子, $\lambda \in (0,1)$, 函数 $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 是的单调递增函数, $p \geqslant 2(1 < q \leqslant 2)$. 我们有

$$x_2'(t) = -\lambda f(\varphi(x_2(t))) - \lambda g(x_1(t-\tau(t))) + \lambda e(t) \leqslant$$
$$-\lambda c\varphi(x_2(t)) + \lambda|-g(x_1(t-\tau(t))) + e(t)| \leqslant$$
$$-\lambda c\frac{\varphi_q(x_2(t))}{\sqrt{1-(\varphi_q(x_2(t)))^2}} + \lambda D_1 \leqslant$$
$$-\lambda c\frac{\varphi_q\left(\frac{D_1}{\sqrt{D_1^2+c^2}}\right)}{\sqrt{1-(\varphi_q(\frac{D_1}{\sqrt{D_1^2+c^2}}))^2}} + \lambda D_1 \leqslant$$
$$-\lambda c\frac{\frac{D_1}{\sqrt{D_1^2+c^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{D_1}{\sqrt{D_1^2+c^2}}\right)^2}} + \lambda D_1 \leqslant$$
$$-\lambda D_1 + \lambda D_1 = 0 \tag{23}$$

这与(22)矛盾. 所以(21)成立.

类似地,我们可以证明第二种情况,当 $x < 0$ 时

$$x_2(t) \geqslant -\frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + c^2}} \tag{24}$$

综合式(21)和(24),则一定存在一个正常数 $\bar{D}$,使得

$$|x_2|_0 \leqslant \bar{D} < 1 \tag{25}$$

设 Ω_1 是问题(8)中所有 T- 周期解集合. 如果 $(x_1, x_2)^T \in \Omega_1$, 通过(20)和(25)式,有 $|x_1|_0 \leqslant D$, $|x_2|_0 \leqslant \bar{D} < 1$. 此外,我们设

$$\Omega_2 = \{v = (x_1, x_2)^T \in \mathrm{Ker}L, QNv = 0\}.$$

如果 $(x_1, x_2)^T = (c_1, c_2)^T \in \mathbf{R}^2$, 有

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^T \frac{\varphi_q(c_2)}{\sqrt{1-\varphi_q^2(c_2)}}\mathrm{d}t = 0,\\ \displaystyle\int_0^T -g(c_1) + e(t)\mathrm{d}t = 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}c_2 = 0,\\ \displaystyle\int_0^T -g(c_1) + e(t)\mathrm{d}t = 0\end{cases} \tag{26}$$

在(26)式的第二个式子,两边同时乘以 c_1, 得

$$T\alpha|c_1|^2 \leqslant \int_0^{\mathrm{T}}|c_1\|e(t)|\mathrm{d}t \leqslant T|e|_0|c_1|.$$

因此

$$|c_1| \leqslant \frac{|e|_0}{\alpha}.$$

现在,我们设 $\Omega = \{v = (x_1, x_2)^T \in X, |x_1|_0 < D + \frac{|e|_0}{\alpha}, |x_2|_0 < \frac{\bar{D}+1}{2} < 1\}$. 则 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. 于是引理 2.1 的条件(i)和条件(ii)被证明完毕.

下面我们证明引理 2.1 的条件(iii)也是成立

的.设

$$H(v,\mu):(\Omega\cap \mathrm{Ker}L)\times[0,1]\to \mathbf{R}:H(v,\mu)=\mu(x,y)^T+(1-\mu)JQN(v),$$

其中 $J:\mathrm{lm}Q\to \mathrm{Ker}L$ 是线性同构, $J(x_1,x_2)=(x_2,x_1)^{\mathrm{T}}$. 由条件 (A_1') 知 $v^TH(v,\mu)\neq 0$, $\forall(v,\mu)\in\partial\Omega\cap \mathrm{Ker}L\times[0,1]$. 因此

$$\deg\{JQN,\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}=\deg\{H(v,0),\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}=\deg\{H(v,1),\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}\neq 0.$$

于是,引理2.1的条件(iii)证毕.

因此,根据引理2.1,我们得出问题(6)至少在 $\bar{\Omega}$ 上存在一个 T- 周期解.

下面,我们来证明问题(6)周期解的唯一性.

当 $p\geqslant 2$ 时,在 (A_3') 条件下,设 $x_3(t)$ 和 $x_4(t)$ 是问题(6)的两个解.根据(7)式,我们设

$$y_3(t)=\varphi^{-1}(x_3'(t)),y_4(t)=\varphi^{-1}(x_4'(t))$$

且

$$u(t)=x_3(t)-x_4(t),v(t)=y_3(t)-y_4(t).$$

现在用反证法证明 $u(t)\leqslant 0,\forall t\in[0,T]$ 的情形.若 $u(t)\leqslant 0,\forall t\in[0,T]$, 则存在一个 $t_0\in[0,T]$ 使得

$$u(t_0)=\max_{t\in[0,T]}u(t)=x_3(t_0)-x_4(t_0)>0.$$

所以

$$u'(t_0)=\varphi(y_3(t_0))-\varphi(y_4(t_0))=0.$$

这表示 $y_3(t_0)=y_4(t_0)$ 且 $u''(t_0)\leqslant 0$. 但是

$$\begin{aligned}
u''(t_0)=&\varphi'(y_3(t_0))-\varphi'(y_4(t_0))=\left[\left(\frac{\varphi_q(y_3(t))}{\sqrt{1-(\varphi_q(y_3(t)))^2}}\right)'-\left(\frac{\varphi_q(y_4(t))}{\sqrt{1-(\varphi_q(y_4(t)))^2}}\right)'\right]_{t=t_0}=\\
&\left[\left(\frac{\varphi_q'(y_3(t))}{(1-(\varphi_q(y_3(t)))^2)^{\frac{3}{2}}}\right)-\left(\frac{\varphi_q'(y_4(t))}{(1-(\varphi_q(y_4(t)))^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right]_{t=t_0}=\\
&\left[\frac{1}{(1-(\varphi_q(y_3(t)))^2)^{\frac{3}{2}}}(\varphi_q'(y_3(t)-\varphi_q'(y_4(t)))\right]_{t=t_0}=\\
&\frac{1}{(1-(\varphi_q(y_3(t_0)))^2)^{\frac{3}{2}}}((q-1)|y_3(t_0)|^{q-2}y_3'(t_0)-(q-1)|y_4(t_0)|^{q-2}y_4'(t_0))=\\
&\frac{(q-1)|y_3(t_0)|^{q-2}}{(1-(\varphi_q(y_3(t)))^2)^{\frac{3}{2}}}(y_3'(t_0)-y_4'(t_0))=\frac{(q-1)|y_3(t_0)|^{q-2}}{(1-(\varphi_q(y_3(t_0)))^2)^{\frac{3}{2}}}v'(t_0)=\\
&\frac{(q-1)|y_3(t_0)|^{q-2}}{(1-(\varphi_q(y_3(t_0)))^2)^{\frac{3}{2}}}[f(\varphi(y_4(t_0))-f(\varphi(y_3(t_0)))+g(x_4(t_0-\tau(t_0)))-g(x_3(t_0-\tau(t_0)))]=\\
&\frac{(q-1)|y_3(t_0)|^{q-2}}{(1-(\varphi_q(y_3(t_0)))^2)^{\frac{3}{2}}}[g(x_4(t_0-\tau(t_0)))-g(x_3(t_0-\tau(t_0)))]>0
\end{aligned}\tag{27}$$

式(27)与假设相矛盾.所以 $u(t)\leqslant 0,\forall t\in[0,T]$.

类似地,我们同样可证明 $u(t)\geqslant 0,\forall t\in[0,T]$. 所以 $u(t)\equiv 0$, 即

$$x_3(t)=x_4(t).$$

这唯一性证毕.

4 应用举例

设 $f(x)=x(\sin^2x+1),g(x)=-x,\tau(t)=\frac{1}{5}\cos 2t,p=5,e(t)=\sin 2t$, 即(6)对应的例子为

$$\left(\varphi_p\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}\right)\right)'+x'(t)(\sin^2x'(t)+1)-x(t-\frac{1}{5}\cos 2t)=\sin 2t\tag{28}$$

对于定理3.1的条件 (A_1'), (A_2'), (A_3') 中的参数可取为 $\alpha=1,c=1,a=2,b=0,|\tau|_0=\frac{1}{5}$, $l=1$, 则有 $c>l|\tau|_0$ 且条件 (A_1'), (A_2'), (A_3') 成立.根据定理3.1,方程(28)有唯一的 π 周期解.

有趣的是如果方程(28)中的 $p=2$, 那么问题就转化为文献[1]中所解决的问题,对应于文献[2]中的定理3.1条件中,取 $A=1,\alpha=l=1$, 就有 $A>\sqrt{2}\alpha l$ 不成立,所以条件 (A_2), (A_3) 不成立,因此得不到相应的周期解.但通过本文则可以解决这样的问题.另外,我们发现这里的 f 并没有满足单边条件,所以如果根据文献[4]中的结论也得不到相应的周期解.因此,本文解决的这类问题的类型更一般.

参考文献：

[1] Li J, Luo J L, Cai Y. Periodic solutions for prescribed mean curvature Rayleigh equation with a deviating argument [J]. Adv Differ Equ, 2013: 88.

[2] 梁载涛,鲁世平.具偏差变元的广义平均曲率方程周期解问题[J].四川大学学报:自然科学报, 2014, 51(3): 240.

[3] Li Z Y, An T Q, Ge W G. Existence of periodic solutions for a prescribed mean curvature Lienard p-Laplaceian equation with two delays [J]. Adv Differ Equ, 2014, 88.

[4] Wang D S. Existence and uniqueness of periodic solutions for prescribed mean curvature Rayleigh type p-Laplaceian equation [J]. J Appl Math Comput 2014, 46: 181.

[5] Fang M Q. Periodic solutions for prescribed mean curvature Lienard equation with a deviating argument [J]. Nonlinear Anal Real Word Appl, 2012, 13: 1216.

[6] Lu S P, Ge W G. Sufficient conditions for the existence of periodic solutions to some second order differential equations with a deviating argument [J]. J Math Anal, 2005, 308(2): 393.

[7] Li J, Wang Z H. Existence and uniqueness of anti-periodic solutions for prescribed mean curvature Rayleigh equations [J]. Boundary Value Problem, 2012: 109.

[8] Tang X H, Li X. Homoclinic solutions for ordinary p-Laplacian systems with acoercive potential [J]. Nonlinear Anal TMA, 2009, 71: 1124.

[9] Gaines R E, Mawhin J. Coincidence degree and Nonlinear Differential equation [M]. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[10] 陈文斌,高芳,鲁世平.一类时滞微分方程周期解的存在性[J].四川大学学报:自然科学版, 2014, 51(3): 455.