2016 年 11 月 四川大学学报(自然科学版) Nov. 2016
第 53 卷 第 6 期 Journal of SichuanUniversity (Natural Science Edition) Vol. 53 No. 6

doi:103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 11. 003

含二次项的三阶有理差分方程的全局行为

陈克慧
(四川大学数学学院, 成都 610064)

摘 要: 本文给出方程 $x_{n+1}=-\frac{x_n x_{n-1}}{ax_n+bx_{n-2}}$ 的奇点集,并讨论该方程解的全局行为. 我们证明了收敛解要么是一个 4 周期解,要么收敛到一个 4 周期解或固定值而不收敛解在一定条件下是无界的.

关键词: 差分方程; 奇点集; 全局行为

中图分类号: O175.7 **文献标识码**: A **文章编号**: 0490-6756(2016)06-1190-05

Global behavior of a rational difference equation

CHEN Ke-Hui
(College of Mathematics, SichuanUniversity, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we discuss the global behavior of a rational difference equation $x_{n+1}=-\frac{x_n x_{n-1}}{ax_n+bx_{n-2}}$. We show that for all initial values out side the forbidden set, its convergence solution is either a 4 periodic solution, or converges to a 4 periodic solution or a fixed value; the non-convergence solution is unbounded under some conditions.

Keywords: Difference equation; Forbidden set; Global behavior
(2010 MSC 39A10, 39A11)

1 引 言

对有理差分方程的研究主要涉及稳定性,吸引性、震动性、周期性等动力学行为以及边值问题等. 目前,较多的研究集中在分子分母均为线性的特殊情形,而对分子或分母中含有二次项或更高次项的非线性方程,相关研究则较为少见,其理论性质也还有待完善. 其中,对于较简单的二阶有理差分方程,近年来部分学者进行了研究,得到了一些有价值的结论[1-7]. 此外,对于三阶有理差分方程,当分子或分母或是分子与分母都含有二次项时,对其动力学性质的研究可参见文献[8~13].

本文研究一个含二次项的三阶差分方程

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_n x_{n-1}}{Ax_n+Bx_{n-2}} \tag{1}$$

所有整数 $n\geqslant 0$, 初始值 $(x_0, x_{-1}, x_{-2})\in \mathbf{R}^3$, 而 α, A 和 B 都是实数.

若 $A=B=0$, 则方程是没有定义的;若 $A=0, B\neq 0$ 或者 $A\neq 0, B=0$ 且 $\alpha=0$, 则 $x_n=0$ 对所有的 $n\geqslant 1$ 恒成立.

若 $\alpha\neq 0, A=0, B\neq 0$, 则 $x_{n+1}=\frac{\alpha x_n x_{n-1}}{Bx_{n-2}}$, 若 $x_{n-2}\neq 0$, 则该方程的解为 $x_{2n-1}=(\frac{\alpha}{B})^{n^2}x_{-1}(\frac{x_0}{x_{-2}})^n$, $x_{2n}=(\frac{\alpha}{B})^{n^2+n}x_{-2}(\frac{x_0}{x_{-2}})^{n+1}$; 若 $\alpha\neq 0, A\neq 0, B=0$, 若 $x_n\neq 0$ 时, 则 $x_{n+1}=\frac{\alpha}{A}x_{n-1}$, 该方程的

收稿日期: 2015-09-17
基金项目: 国家自然科学基金(11101295)
作者简介: 陈克慧(1988-), 女, 硕士, 主要研究方向为差分方程. E-mail:18428399298@163.com.

解为 $x_{2n-1}=(\frac{\alpha}{A})^n x_{-1}, x_{2n}=(\frac{\alpha}{A})^n x_0$.

若 $\alpha AB\neq 0$，则方程(1)有八种情形：

1. $\alpha>0, A>0, B>0$；2. $\alpha<0, A<0, B<0$；

3. $\alpha>0, A>0, B<0$；4. $\alpha<0, A<0, B>0$；

5. $\alpha>0, A<0, B>0$；6. $\alpha<0, A>0, B<0$；

7. $\alpha>0, A<0, B<0$；8. $\alpha<0, A>0, B>0$. 其中，情形 1 和 2 等价于方程

$$x_{n+1}=\frac{ax_n x_{n-1}}{x_n+bx_{n-2}}, a=\frac{\alpha}{A}>0, b=\frac{B}{A}>0, \quad n=0,1,\cdots,$$

该方程已被 Sedaght 研究[14]；情形 3 和 4 等价于方程

$$x_{n+1}=\frac{ax_n x_{n-1}}{bx_n-cx_{n-2}}, a=|\alpha|>0, b=|A|>0, \quad c=|B|>0, n=0,1,\cdots,$$

情形 5 和 6 等价于方程

$$x_{n+1}=\frac{ax_n x_{n-1}}{-bx_n+cx_{n-2}}, a=|\alpha|>0, b=|A|>0, \quad c=|B|>0, n=0,1,\cdots,$$

该方程已被 Abo-Zeid 研究[16]；情形 7 和 8 迄今为止还没有被研究. 显然，这两种情形等价于方程

$$x_{n+1}=-\frac{x_n x_{n-1}}{ax_n+bx_{n-2}}, a=\frac{A}{\alpha}>0, b=\frac{B}{\alpha}>0, \quad n=0,1,\cdots \tag{2}$$

本文讨论方程(2)的奇点集并研究该方程解的全局行为.

2　方程(2)的奇点集和解的表达式

在讨论方程(2)的解之前，我们先讨论该方程的奇点集，即经过有限次迭代使得分母为零从而使 x_{n+1} 没有意义的那些初始值 x_{-2}, x_{-1}, x_0 组成的集合. 从而当初始值不在奇点集内时，方程的解有意义.

为了求解方程(2)的奇点集，首先我们给出了一个引理，并运用该引理通过一个变换将该方程转化为一个一阶线性方程.

引理 2.1　设序列 $\{x_n\}_{n=-2}^{n_0}$ 满足式(2)，若对 $n_0\geqslant 2$，及所有的 $0\leqslant i\leqslant n_0$，$ax_i+bx_{i-2}\neq 0$，则 $x_j\neq 0(-1\leqslant j\leqslant n_0+1)$.

证明　设存在 $-1\leqslant j\leqslant n_0+1$ 使得 $x_j=0$. 若 $j=-1$，由(2)式可得 $x_1=0$，从而有 $ax_1+bx_{-1}=0$；若 $0\leqslant j\leqslant n_0$，$x_j=\frac{x_{j-1}x_{j-2}}{ax_{j-1}+bx_{j-3}}=0$，若 $x_{j-1}\neq 0$，$x_{j-2}=0$，则 $ax_j+bx_{j-2}=0$，若 $x_{j-2}\neq 0$，$x_{j-1}=0$，$x_{j-1}=\frac{x_{j-2}x_{j-3}}{ax_{j-2}+bx_{j-4}}$ 可知 $x_{j-3}=0$，则 $ax_{j-1}+bx_{j-3}=0$；若 $j=n_0+1$，由(2)可推得 $ax_{n_0-2}+bx_{n_0-4}=0$ 或者 $ax_{n_0-1}+bx_{n_0-3}=0$ 或者 $ax_{n_0}+bx_{n_0-2}=0$. 以上三种情况均和已知条件矛盾. 所以假设不成立，命题得证.

从上面的引理可知，如果 $n\geqslant 1$，且对所有的 $0\leqslant i\leqslant n-1$ 有 $ax_i+bx_{i-2}\neq 0$，则可对方程(2)作变换 $y_n=\frac{x_{n-2}}{x_n}$，我们能够得到一阶线性方程

$$y_{n+1}=-by_n-a, y_0=\frac{x_{-2}}{x_0} \tag{3}$$

定理 2.2　方程(2)的奇点集 F 是 $\mathbf{R}^3$ 平面上包含原点的一个序列，如下所示：

$$F=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{(u,v,w): w=\delta_n u\}\cup\{(u,v,w): u=0\}\cup\{(u,v,w): v=0\},$$

$$\delta_n=-\frac{a}{b}\sum_{i=0}^{n}(-\frac{1}{b})^i.$$

证明　根据定义，$(x_0, x_{-1}, x_{-2})\in F$ 当且仅当存在整数 n，使得 $ax_n+bx_{n-2}=0$.

首先看初始值为零对 ax_n+bx_{n-2} 的影响. 假设 $x_0\neq 0$. 若 $x_{-2}=x_{-1}=0$，由(2)式有 $x_1=0$，则 $ax_1+bx_{-1}=0$；若 $x_{-2}\neq 0$，$x_{-1}=0$，由(2)式有 $x_1=0$，则 $ax_1+bx_{-1}=0$；若 $x_{-1}\neq 0$，$x_{-2}=0$，则 $x_1=\frac{1}{a}x_{-1}\neq 0$，因而，我们可以省略 x_{-2} 而从非零初始值 x_{-1}, x_0, x_1 始，前面的论点适用.

假设 $x_0=0$. 若 $x_{-2}=0$，$x_{-1}\neq 0$，由(2)式有 $x_1=0$，$x_2=0$，则 $ax_2+bx_0=0$；若 $x_{-1}=0$，$x_{-2}\neq 0$，由(2)式有 $x_1=0$，则 $ax_1+bx_{-1}=0$；若 $x_{-2}\neq 0$，$x_{-1}\neq 0$，由(2)式有 $x_1=0$，$x_2=0$，则 $ax_2+bx_0=0$.

其次，$ax_n+bx_{n-2}=0$ 时初始值情况：

(i) 若 $ax_0+bx_{-2}=0$，则 $x_{-2}=-\frac{a}{b}x_0$；

(ii) 若 $ax_1+bx_{-1}=0$，则 $x_{-1}=-\frac{a}{b}x_1$；

(iii) 若 $ax_2+bx_0=0$ 且 $ax_i+bx_{i-2}\neq 0$ $(i=0,1)$，则由(2)，知 $x_0=0$ 或 $x_{-1}=-a(\frac{1}{b}-\frac{1}{b^2})x_1$；

(iv) 若 $ax_3+bx_1=0$ 且对所有的 $0\leqslant i\leqslant 2$，$ax_i+bx_{i-2}\neq 0$，则由(2)，知 $x_1=0$ 或 $x_{-2}=-a(\frac{1}{b}-\frac{1}{b^2})x_0$，从而可知 $x_{-1}=0$ 或 $x_{-2}=-a(\frac{1}{b}-\frac{1}{b^2})x_0$；

(v) 当 $n\geqslant 4$ 时，若 $ax_n+bx_{n-2}=0$ 且对所有

的 $0\leqslant i\leqslant n-1$，$ax_i+bx_{i-2}\neq 0$，从而由引理2.1知 $x_j\neq 0(-1\leqslant j\leqslant n)$. 由上面的讨论及变换 $y_n=\frac{x_{n-2}}{x_n}$ 可得，$ax_n+bx_{n-2}=0$ 等价于

$$y_n=-\frac{a}{b}.$$

考虑方程

$$f(t)=-bt-a.$$

映射 $f(t)=-bt-a$ 是可逆映射，且逆映射为

$$f^{-1}(t)=-\frac{1}{b}t-\frac{a}{b}.$$

现在，我们定义

$$t_n=f^{-1}(t_{n-1})=-\frac{1}{b}t_{n-1}-\frac{a}{b},$$

$$t_0=\frac{x_{-2}}{x_0}=-\frac{a}{b}.$$ 则

$$t_n=\frac{x_{n-2}}{x_n}=f^{-n}(t_0)=-\frac{a}{b}\sum_{i=0}^{n}(-\frac{1}{b})^i,$$

$$x_{n-2}=x_n(-\frac{a}{b}\sum_{i=0}^{n}(-\frac{1}{b})^i).$$

整理即得方程(2)的奇点集.

定理2.3 令 x_0,x_{-1},x_{-2} 为实数且

$$(x_0,x_{-1},x_{-2})\notin F \tag{4}$$

则方程(2)的解 $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ 为

$$\begin{cases}x_{2n-1}=x_{-1}\prod_{j=1}^{n}\dfrac{1+b}{\rho(-b)^{2j-1}-a},n=1,2,\cdots,\\ x_{2n}=x_0\prod_{j=1}^{n}\dfrac{1+b}{\rho(-b)^{2j}-a},n=1,2,\cdots\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\rho:=\frac{(1+b)x_{-2}+ax_0}{x_0}$.

证明 运用前面所作的变换 $y_n=\frac{x_{n-2}}{x_n}$ 及式(3)将方程(2)变为一阶非齐次线性差分方程

$$y_{n+1}+by_n+a=0. \tag{6}$$

首先，求解方程(6)的齐次方程 $y_{n+1}+by_n=0$ 的通解. 考虑该方程的特征方程 $P(\lambda)=\lambda+b$，则特征值为 $\lambda=-b$. 故该齐次方程的通解为 $\widetilde{y_n}=c(-b)^n$. 其次，求出方程(6)的特解 $y=-\frac{a}{1+b}$. 故方程(6)的通解为 $y_n=c(-b)^n-\frac{a}{1+b}$，将 $y_0=\frac{x_{-2}}{x_0}$ 代入方程，解出 $c=\frac{(1+b)x_{-2}+ax_0}{(1+b)x_0}$. 故方程(6)的通解为

$$y_n=\frac{1}{1+b}[\rho(-b)^n-a],\ \rho:=\frac{(1+b)x_{-2}+ax_0}{x_0}.$$

我们断言任意的 y_n 都是非零的. 现假设存在 n_0 使得 $\rho(-b)^{n_0}-a=0$，则 $y_{n_0}=0$. 因为 $y_{n_0}=\frac{x_{n_0-2}}{x_{n_0}}$，所以 $x_{n_0-2}=0$. 由方程(2)，可推知 $x_{n_0-4}=0$. 这使得 $ax_{n_0-2}+bx_{n_0-4}=0$. 这与(4)式矛盾. 故，不存在 n 使得 $\rho(-b)^n-a=0$.

由变换 $y_n=\frac{x_{n-2}}{x_n}$ 可知

$$\frac{x_1}{x_{-1}}\frac{x_3}{x_1}\frac{x_5}{x_3}\cdots\frac{x_{2n-3}}{x_{2n-5}}\frac{x_{2n-1}}{x_{2n-3}}=\frac{1}{y_1}\frac{1}{y_3}\frac{1}{y_5}\cdots\frac{1}{y_{2n-3}}\frac{1}{y_{2n-1}}.$$

故

$$x_{2n-1}=x_{-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-1}-a},n=1,2,\cdots.$$

同理可得

$$x_{2n}=x_0\prod_{j=1}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j}-a},n=1,2,\cdots.$$

Ω. 证毕.

3 方程(2)解的全局行为

在这一节中，我们用方程(2)的解的基本形式来研究该方程解的全局行为.

定理3.1 令 $\{x_n\}$ 是方程(2)满足初始值 $(x_0,x_{-1},x_{-2})\notin F$ 的解.

(a) 若 $\frac{x_{-2}}{x_0}=-\frac{a}{1+b}$，则有

1. 如果 $a>1+b$，那么 $\{x_n\}$ 收敛到0，
2. 如果 $a=1+b$，那么 $\{x_n\}$ 为一个四周期解，
3. 如果 $a<1+b$，那么 $\{x_n\}$ 是无界的；

(b)若 $\frac{x_{-2}}{x_0}\neq-\frac{a}{1+b}$，则有

1. 如果 $b>1$，那么 $\{x_n\}$ 收敛到0，
2. 如果 $b=1$，那么 $\{x_n\}$ 是否收敛，不仅仅取决于初始值而且还取决于系数 a，
3. 如果 $b<1$，那么若 $a>1+b$，则 $\{x_n\}$ 收敛到0，若 $a=1+b$，则 $\{x_n\}$ 收敛到四周期解，若 a<1+b，则 $\{x_n\}$ 是无界的.

证明 (a)假设 $\frac{x_{-2}}{x_0}=-\frac{a}{1+b}$. 则

$$\rho=\frac{(1+b)x_{-2}+ax_0}{x_0}=0,$$

$$x_{2n-i}=x_{-i}\prod_{j=1}^{n}(-\frac{1+b}{a}),i=0,1.$$

如果 $a>1+b$，那么 $\frac{1+b}{a}<1$，则 $\lim_{n\to\infty}$

$x_{2n-i}=0$.

如果 $a=1+b$, 那么 $\frac{1+b}{a}=1$, 则 $\prod_{j=1}^{2n+1}(-\frac{1+b}{a})=-1$, $\prod_{j=1}^{2n}(-\frac{1+b}{a})=1$. 因而方程的解为 $\cdots,-x_{-1},-x_0,x_{-1},x_0,\cdots$.

如果 $a<1+b$, 那么 $\frac{1+b}{a}>1$, 则 $\lim_{n\to\infty}x_{2n-i}=\infty$.

(b) 若 $\frac{x_{-2}}{x_0}\neq-\frac{a}{1+b}$. 则 $\rho\neq0$, $x_{2n-i}=x_{-i}\prod_{j=1}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}$, $i=0,1$.

如果 $b>1$, 那么当 $j\to\infty$ 时, $\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}$ 收敛到 0, $i=0,1$. 由此得出, 对一给定的 $0<\varepsilon<1$, 存在 $j_0\in\mathbf{N}$ 使得 $|\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|<\varepsilon$ 对所有的 $j\geqslant j_0$ 成立. 因而

$$|x_{2n-i}|=|x_{-i}\prod_{j=1}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|=$$

$$|x_{-i}||\prod_{j=1}^{j_0-1}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}||\prod_{j=j_0}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|$$

$$<|x_{-i}||\prod_{j=1}^{j_0-1}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|\varepsilon^{n-j_0+1}.$$

当 n 趋于无穷大时, $\{x_n\}$ 收敛到 0.

如果 $b=1$, 则

$$x_{2n-i}=x_{-i}\prod_{j=1}^{n}\frac{2}{\rho(-1)^{2j-i}-a},$$

$$x_{2n-1}=x_{-1}\prod_{j=1}^{n}(-\frac{2}{\rho+a})=(-\frac{2}{\rho+a})^n x_{-1},$$

$$n=1,2,\cdots.$$

$$x_{2n}=x_0\prod_{j=1}^{n}\frac{2}{\rho-a}=(\frac{2}{\rho-a})^n x_0,$$

$$n=1,2,\cdots.$$

如果 $0<b<1$, 则当 $j\to\infty$, $\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}$ 收敛到 $-\frac{1+b}{a}$, $i=0,1$. 如果 $a>1+b$, 则 $0<\frac{1+b}{a}<1$, 所以 $\lim_{n\to\infty}x_{2n-i}=0$, $i=0,1$. 如果 $a<1+b$, 则 $\frac{1+b}{a}>1$, 对于给定的 $\mu>1$ 存在 $j_1\in\mathbf{N}$ 使得对所有的 $j\geqslant j_1$, 有 $|\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|>\mu>1$, $i=0,1$.

$$|x_{2n-i}|=|x_{-i}\prod_{j=1}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|=$$

$$|x_{-i}||\prod_{j=1}^{j_1-1}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}||\prod_{j=j_1}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|$$

$$=|x_{-i}||\prod_{j=1}^{j_1-1}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|\mu^{n-j_1+1}.$$

因而, 当 n 趋于无穷大时, $\{x_{2n-i}\}$, $i=0,1$, 是无界的. 如果 $1+b=a$, 则

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}=-1,\ i=0,1,$$

则对任意小的 $\varepsilon>0$, 存在 $j_2\in\mathbf{N}$ 使得 $-1-\frac{1}{2^j}\varepsilon<\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}<-1+\frac{1}{2^j}\varepsilon$, 对 $i=0,1$ 和 $j\geqslant j_2$ 成立. 因此,

$$\ln(1-\frac{1}{2^j}\varepsilon)<\ln|\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|<$$

$$\ln(1+\frac{1}{2^j}\varepsilon),$$

从而有 $\sum_{j=j_2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{2^j}\varepsilon\right)<\sum_{j=j_2}^{\infty}\ln|\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|<\sum_{j=j_2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^j}\varepsilon\right)$.

$$|x_{2n-i}|=|x_{-i}\prod_{j=1}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|=|x_{-i}\prod_{j=1}^{j_2-1}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}\prod_{j=j_2}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|=$$

$$|x_{-i}||\prod_{j=1}^{j_2-1}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}||\prod_{j=j_2}^{n}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|=$$

$$|x_{-i}||\prod_{j=1}^{j_2-1}\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|\exp\left(\sum_{j=j_2}^{n}\ln|\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|\right).$$

因为

$$\sum_{j=j_2}^{n}\ln(1+\frac{1}{2^j}\varepsilon)=$$

$$\sum_{j=j_2}^{n}\frac{1}{2^j}\varepsilon=\frac{1}{2^{j_2-1}}(1-\frac{1}{2^{n-j_2+1}})\varepsilon<\varepsilon,$$

$$\sum_{j=j_2}^{n}\ln(1-\frac{1}{2^j}\varepsilon)=$$

$$\sum_{j=j_2}^{n}\frac{-1}{2^j}\varepsilon=-\frac{1}{2^{j_2-1}}(1-\frac{1}{2^{n-j_2+1}})\varepsilon>-\varepsilon,$$

所以 $\sum_{j=j_2}^{\infty}\ln(|\frac{1+b}{\rho(-b)^{2j-i}-a}|)$ 收敛.故存在实数 v_1, v_2 使得当 n 为偶数时 $\lim_{n\to\infty}x_{2n-i}=v_i$,当 n 为奇数时 $\lim_{n\to\infty}x_{2n-i}=-v_i$,即

$$v_i = x_{-i}\prod_{j=1}^{n}\frac{a}{\rho(-b)^{2j-i}-a}, i = 0,1.$$

证毕.

参考文献:

[1] Dehghan M, Mazrooei-Sebdani R, Sedaghat H. Global behaviour of the Riccati difference equation of order two[J]. J Differ Equ Appl, 2011, 17(4): 467.

[2] Kocic V, Stutson D. Global behavior of solutions of a nonlinear second-order difference equation[J]. J Math Anal Appl, 2000, 246: 608.

[3] Kulenovic M R S, Ladas G. Dynamics of Second Order Rational Difference Equations: with Open Problems and Conjectures[M]. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2001.

[4] Camouzis E, Devault R. The forbidden set of $x_{n+1}=p+\frac{x_{n-1}}{x_n}$[J]. J Differ Equ Appl, 2003, 9(8): 739.

[5] Bajo I, Liz E. Global behavior of asecond-order nonlinear difference equation[J]. J Differ Equ Appl, 2011, 17(10): 1471.

[6] Agarwal R P. Difference equation and inequalities: theory, methods, and applications[M]. 2nd ed. NewYork: Marcel Dekker, 2000.

[7] Nussbaum R D. Global stability, two conjectures and Maple[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 1064.

[8] Sedaghat H. Open problem and conjectures: On third-order rational difference equation with quadratic terms[J]. J Differ Equ Appl, 2008, 14(8): 889.

[9] Camouzis E, Ladas G. Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures[M]. Boca Raton: Chapman Hall/CRC Press. 2007.

[10] Tabor J. Oscillation of linear difference equations in Banach spaces[J]. J Differ Equ, 2003, 192: 170.

[11] 骆元媛,张倩.一类有理差分方程解的全局行为[J].四川大学学报:自然科学版,2012,49(6):1214.

[12] 蒋敏,周俊.一个有理差分方程解的存在性和稳定性[J].四川大学学报:自然科学版,2012,49(2):304.

[13] Zhang C, Li H X. Global asymptotic stability of ageneral higher order difference equation[J]. J Sichuan Univ Nat Sci Ed.(四川大学学报:自然科学版),2010,47(5):977.

[14] Sedaghat H. Global behaviors of rational difference equations of orders two and three with quadratic terms[J]. J Differ Equ Appl, 2009, 15(3): 215.

[15] Abo-Zeid R. Global behavior of arational difference equation with quadratic term[J]. Mathmatica Moravica, 2014, 18(1): 81.

[16] Abo-Zeid R. On the solutions of two third order recursive sequence[J]. American Journal of Mathmatics, 2014, 6(2): 64.