2017 年 3 月　　四川大学学报(自然科学版)　　Mar. 2017
第 54 卷　第 2 期　　Journal of SichuanUniversity (Natural Science Edition)　　Vol. 54　No. 2

doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2017. 03. 002

z 型映射与帐篷映射的半共轭

石勇国，龚小兵
(内江师范学院数学与信息科学学院数据恢复四川省重点实验室，内江 641112)

摘　要：本文考虑一类非混乱的 z 型映射,研究了 z 型映射到帐篷映射的半共轭. 通过对区间的划分以及单峰映射的编码，本文给出了两个非单调半共轭的精确表达式,并给出了数值的例子.

关键词：半共轭；帐篷映射；z 型映射；共轭方程

中图分类号：O192　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)02-0227-04

Semi-conjugacies from the z-type map to the tent map

SHI Yong-Guo , *GONG Xiao-Bing*
(Data Recovery Key Laboratory of Sichuan Province College of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang 641112, China)

Abstract: We consider a class of turbulent maps——the z-type maps and construct semi-conjugacies from the z-type map to the tent map. Using the partition of the domain and the encoding for unimodal maps, we present the explicit expressions of two non-monotone semi-conjugacies as well as numerical examples.

Keywords: Semi-conjugacy; Tent map; Z-type map; Conjugacy equation
(2010 MSC 46B20,39B12)

1　引　言

在动力系统中,一个重要问题是判断两个自映射是否(半)共轭[1-15]. 给定两个自映射 $f:X\to X$ 和 $g:Y\to Y$,若共轭方程 $\varphi\circ f=g\circ\varphi$ 存在同胚(满射的连续)解，则称 f 和 g 拓扑(半)共轭，简称 f(半)共轭于 g,并称 φ 是从 f 到 g 的一个(半)共轭. 如果两个映射共轭，则它们具有相同的动力学性质,例如周期性、初值的敏感依赖性、拓扑传递、混沌等[16];如果 f 半共轭于 g，则映射 f 的动力学性质至少像 g 那样复杂.

关于逐段单调映射的共轭问题,Ulam[1] 率先提出了逐段线性化的问题:单位区间上的每个光滑映射是否共轭于某个合适的逐段线性映射? 他强调,若答案是肯定的,则研究这类光滑映射可简化到折线映射的研究. 1966 年,Parry[9] 给出了经典结果:连续的、传递的逐段单调(有限段)区间映射与常斜率映射共轭.

关于逐段单调映射的半共轭问题,Byers[4] 证明了逐段扩张多峰映射之间单调半共轭的存在性和唯一性. Milnor 和 Thurston[7] 利用 Kneading 理论证明了具有正拓扑熵的连续逐段单调映射半共轭于常斜率、具有相同拓扑熵的映射. 这样的半共轭是单调的,但不唯一[1]. 最近,Ou 和 Palmer[8] 利用逐段线性函数序列逼近这样的半共轭,并给出了误差估计. 我们[11] 证明了不同斜率帐篷映射,以及不同非对称的 Bernoulli 变换率[12] 之间的共轭均是奇异的,而且都是单调的.

收稿日期: 2016-10-11
基金项目: 国家自然科学基金(11301256);四川省教育厅科研创新团队基金(14TD0026)
作者简介: 石勇国(1978—),男,湖北云梦人,副教授,主要研究方向为动力系统. E-mail:scumat@163. com
通讯作者: 龚小兵. E-mail:xbgong@163. com.

最近，Block 等[2]得到了新的结果:如果连续自映射 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是混乱的，即存在 $[0,1]$ 上不相交的内部的两个闭子区间 I_1 和 I_2 使得 $I_1\cup I_2\subset(f(I_1)\cap f(I_2))$，$f$ 则半共轭于帐篷映射 $g:[0,1]\to[0,1]$，$g=\min\{2x,2-2x\}$. 他们利用符号动力系统的方法构造了非单调的半共轭. 但是没有确定半共轭的个数和精确表达式.

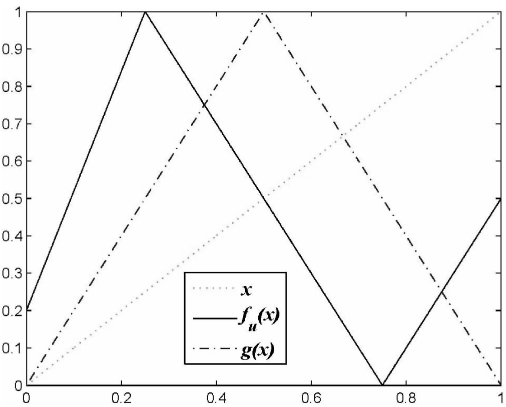

图 1 z 型映射 $f_{0.2}$ 和帐篷映射 g

Fig. 1 The z-type map $f_{0.2}$ and the tent map g

我们称如下带有一个单参数 $u\in[0,1/2]$ 的映射 $f_u:[0,1]\to[0,1]$为 z 型映射，如图 1 所示.

$$f_u:=\begin{cases}4(1-u)x+u,\\ -2x+\dfrac{3}{2},\\ 2x-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

根据文献[2]定理 3.13 的证明可知 z 型映射不是混乱的，因为不存在点 a,b,c 具有性质 $f_u(a)=a$，$f_u(b)=a$，$f_u(c)=b$ 且 c 在 a,b 之间. Block 等[2]给出的一个反例表明非混乱的映射 $f_{1/2}$ 通过共轭映射 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$，$\varphi(x)=\min\{1-2x,2x-1\}$ 也可与帐篷映射半共轭. 本文进一步证明:对于任意 $u\in[0,1/2]$，z 型映射 f_u 与帐篷映射半共轭. 通过对区间的划分以及单峰映射的 Kneading 序列[3]，本文给出了两个非单调半共轭的精确表达式，并给出了具体的数值例子.

2 预备知识

为了给出半共轭，我们给出下面的定义.

定义 2.1 关于映射 $f:[0,1]\to[0,1]$ 在 $[0,1]$ 区间上的标记划分是一个有序对 (C,φ)，使得

(1) C 是开区间 $(0,1)$ 的非空有限集;

(2) φ 是一个函数，其定义域是 $[0,1]-C$ 连通子区间组成的集合，值域是集合 $\{0,1\}$;

(3) φ 在相连的连通子区间的值在 0,1 之间变换.

定义 2.2 点 $x\in[0,1]$ 关于映射 $F:[0,1]\to[0,1]$ 和 (C,φ) 的迹是一个 0-1 数列 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，使得 $F^n(x)$落在 $[0,1]-C$ 的某个连通子区间 J 上且 $\varphi(J)=1$，则 $\varepsilon_n=1$；反之，$\varepsilon_n=0$.

根据上面的定义，$\varepsilon_n=0$，如果 $F^n(x)\in C$. 特别地，当 F 是帐篷映射时，点 $x\in[0,1]$ 关于帐篷映射和 $(\{1/2\},\varphi)$ 的迹就是帐篷映射的展开式，且由文献[11]关于 T_c 展开的结论，有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{s_{n-1}}\frac{\varepsilon_n}{2^{n-1}},$$

这里 $s_{n-1}=\sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_j$ 且 $s_0=0$，

$$\varepsilon_n=\begin{cases}0, & g^n\leqslant 1/2,\\ 1 & g^n>1/2.\end{cases}$$

引理 2.3 任取点 $x\in[0,1]$. 设 0-1 数列 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是点 x 关于 z 型映射 f_u 和 (C,φ) 的迹，令 $\varphi_u:[0,1]\to[0,1]$，

$$\varphi_u:x\to\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_j}\frac{\varepsilon_n}{2^{n-1}} \tag{1}$$

则 $\varphi_u\circ f_u=g\circ\varphi_u$.

证明 因为点 $y=f_u(x)$关于 z 型映射 f_u 和 (C,φ) 的迹为 $\{\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots\}$，于是

$$\varphi_u(f_u(x))=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_{j+1}}\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n-1}}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\sum_{j=2}^{n-1}\varepsilon_j}\frac{\varepsilon_n}{2^{n-2}}.$$

另一方面，若 $\varphi_u(x)\leqslant 1/2$，则 $\varepsilon_1=0$. 于是

$$\varphi_u(f_u(x))=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_{j+1}}\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n-1}}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\sum_{j=2}^{n-1}\varepsilon_j}\frac{\varepsilon_n}{2^{n-2}}.$$

若 $\varphi_u(x)>1/2$，则 $\varepsilon_1=1$. 于是

$$g(\varphi_u(x))=-2(\varphi_u(x)-1)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\sum_{j=2}^{n-1}\varepsilon_j}\frac{\varepsilon_n}{2^{n-2}}=\varphi_u(f_{\mathrm{u}}(x)).$$

因此，对于所有 $x\in[0,1]$ 都有

$\varphi_u(f_u(x))=g(\varphi_u(x))$. 证毕.

引理 2.4 共轭函数 φ_u 是连续的满射当且仅当 $C=\{c_1,c_2\}$，其中 $c_1=\dfrac{1}{4}$，$c_2=\dfrac{3}{4}\pm\dfrac{1-2u}{16(1-u)}$.

证明 假设 (C,φ) 是关于 z 型映射 f_u 的标记

划分，φ_u 是式(1)所定义的映射. 根据文献[2]中的命题 3.10，共轭函数 φ_u 是连续的满射当且仅当每个 $c \in C$ 的迹为 $\{0,1,0,0,0,\cdots\}$. 要使得迹的第三位开始均为 0，根据映射 f_u 的性质，当且仅当 $f_u^2(c)$ 为 f_u 的最右边不动点，即 $f_u^2(c) = 1/2$. 求解得到

$$c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{3}{4} \pm \frac{1-2u}{16(1-u)}.$$

同时，定义 $\varphi([0,c_1)) = 1$. $\varphi((c_1,c_2)) = 0$，$\varphi((c_2,1)) = 1$，可以验证，φ 满足文献[2]中的命题 3.10 的条件. 证毕.

由此，我们得到下面的推论.

推论 2.5　对于 $i = 1,2$，有 $\varphi_u(c_i) = 1/2$，$\varphi_u(f_u(c_i)) = 1$，$\varphi_u(f_u^2(c_i)) = 0$.

3　主要结果

下面的定理给出了半共轭的精确表达式.

定理 3.1　假设 $(\{c_1,c_2\},\varphi)$ 是关于 z 型映射 f_u 的标记划分，其中

$$c_1 = \frac{1}{4},$$

$$c_2 = \frac{3}{4} \pm \frac{1-2u}{16(1-u)},$$

$$\varphi([0,c_1)) = 1,$$

$$\varphi((c_1,c_2)) = 0,$$

$$\varphi((c_2,1)) = 1.$$

任取点 $x \in [0,1]$，设 0-1 数列 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是点 x 关于 z 型映射 f_u 和 (C,φ) 的迹. 则引理 2.3 中的式(1)是 z 型映射 f_u 与帐篷映射一个半共轭.

证明　根据引理 2.3，式(1)定义的 φ_u 满足共轭方程 $\varphi_u \circ f_u = g \circ \varphi_u$. 根据引理 2.5，$\varphi_u$ 是区间[0，1]上的连续的满射. 因此 φ_u 是 z 型映射 f_u 与帐篷映射一个半共轭. 证毕.

对于参数 $u = 0.2$，由于有两个标记划分，因此得到两个不同的半共轭，如图 2 所示. 对于参数 $u = 0, 0.05, 0.1, \cdots, 0.5$，得到对应的共轭如图 3 所示.

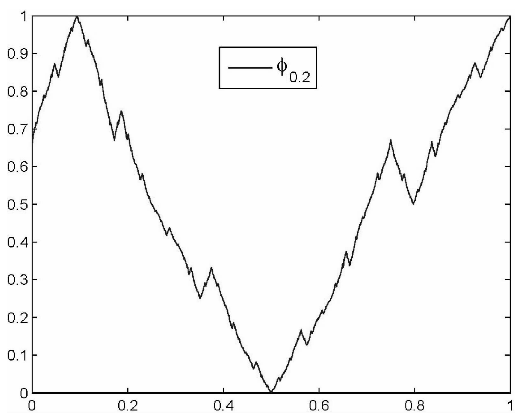

图 2　两个半共轭 two Semi-Conjugacies

Fig. 2　Two semi-conjugacies

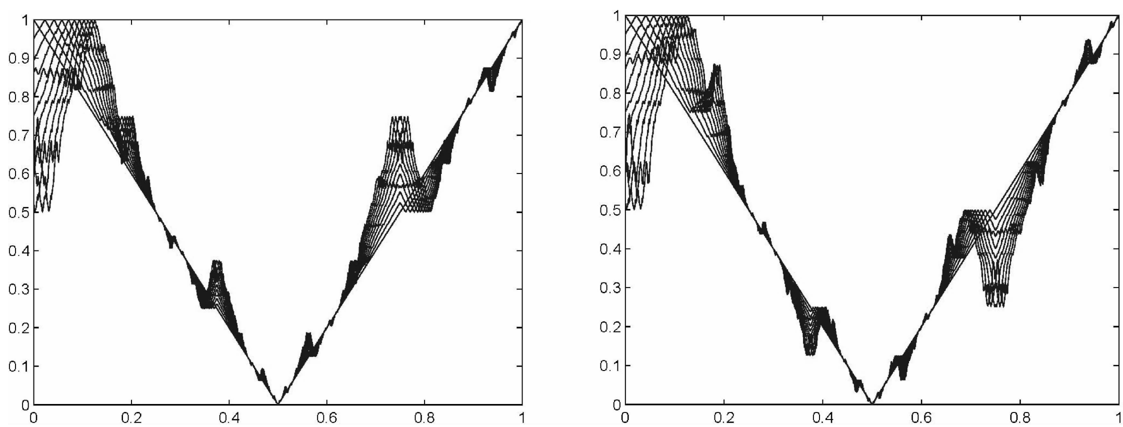

图 3　两组半共轭 two sets of semi-conjugacies

Fig. 3　Two sets of Semi-Conjugacies

参考文献:

[1] Alves J F, Ramos J S. One-dimensional semiconjugacy revisited [J]. Inter J Bifurcat Chaos, 2003, 13: 1657.

[2] Block L, Keesling J, Ledis D. Semi-conjugacies and inverse limit spaces [J]. J Differ Equ Appl, 2012, 18: 627.

[3] Bonanno C, Carminati C, Isola S, *et al*. Dynamics of continued fractions and kneading sequences of unimodal map [J]. Discrete Cont Dyn-A, 2013, 33: 1313.

[4] Byes B. Monotonic semiconjugacies onto expanding maps of the interval [J]. P Am Math Soc, 1983, 89: 371.

[5] Cieplinski K, Lesniak Z. On conjugacy equation in dimension one [J]. Banach Cent Publ, 2012, 99: 31.

[6] Cui H F, Ding Y M. Renormalization and conjugacy of piecewise linear Lorenz maps [J]. Adv Math, 2015, 271: 235.

[7] Alexander J C. Dynamical sytems [M]. Berlin/Heidelberg/NewYork: Springer-Verlag, 1988: 465.

[8] Ou D S, Palmer K J. A constructive proof of the existence of a semi-conjugacy for a one dimensional map [J]. Discrete Cont Dyn-B, 2012, 17: 977.

[9] Parry W. Symbolic dynamics and transformations of the unit interval [J]. T Am Math Soc, 1966, 122: 368.

[10] Pujals E R. Some simple questions related to the stability conjecture [J]. Nonlinearity, 2008, 21: T233.

[11] Shi Y G, Wang Z., Topological conjugacy between skew tent maps [J]. Inter J Bifurcat Chaos, 2015, 25: 1550118.

[12] Shi Y G, Tang Y. On conjugacies between asymmetric Bernoulli shifts [J]. J Math Anal Appl, 2016, 434: 209.

[13] Stenstrom V. Proceedings of the international Corgress of Mathermaticians [M]. Sweden: Institute of Mittag-Leffler, 1963: 49.

[14] Ulam S R. Problems in modern mathematics [M]. New York: John Wiley & Sons Inc., 1964.

[15] Lesniak Z, Shi Y G. Topological conjugacy of piecewise monotonic functions of nonmonotonicity height $\geqslant 1$ [J]. J Math Anal Appl, 2015, 423: 1792.

[16] Layek G C. An introduction to dynamical systems and chaos [M]. Berlin: Springer, 2015.