2017 年 7 月　　　　　　　　四川大学学报(自然科学版)　　　　　　　　Jul. 2017
第 54 卷　第 4 期　　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　　Vol. 54　No. 4

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.04.003

非线性三点边值问题正解的存在性

李涛涛
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了三点边值问题

$$\begin{cases} u''-k^2u+a(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u(0)=0, u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $a\in C([0,1],[0,\infty))$，$\eta\in(0,1)$，$\alpha\in(0,\frac{\sinh(k)}{\sinh(k\eta)})$，$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$. 主要结果的证明基于锥上的不动点定理.

关键词：Green 函数；边值问题；不动点定理；正解
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)04-0683-05

Existence of positive solutions for nonlinear three-point boundary value problem

LI Tao-Tao
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of positive solutions for the following second-order three-point boundary value problem

$$\begin{cases} u''-k^2u+a(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u(0)=0, u(1)=\alpha u(\eta), \end{cases}$$

where $a\in C([0,1],[0,\infty))$, $\eta\in(0,1)$, $\alpha\in(0,\frac{\sinh(k)}{\sinh(k\eta)})$, $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$. The proof of the main results is based on the fixed point theorem.

Keywords: Green's function; Boundary value problem; Fixed point theorem; Positive solution
(2010 MSC 34B15, 34B18)

1　引　言

微分方程的非局部问题在生物工程、控制理论和经济领域中具有广泛的实际应用，许多问题已被深入研究并取得了系统而深刻的结果[1-12]. 特别地，1999 年，Ma[1]研究了三点边值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u(0)=0, u(1)=\alpha u(\eta), \eta\in(0,1) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $f\in C([0,\infty],[0,\infty))$，$a\in C([0,1],[0,\infty))$ 且存在 $x_0\in[\eta,1]$ 使得 $a(x_0)>0$. 该文的主要结果如下：

定理 A　设 $0<\eta<1$，$0<\alpha<\frac{1}{\eta}$. 若 f 满足下列条件之一：

(A_1) $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$；

(A_2) $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=0$，

则问题 (1) 至少有一个正解，其中 $f_0=\lim\limits_{s\to0^+}\frac{f(s)}{s}$，

收稿日期：2016-12-09
基金项目：国家自然科学基金(11671322)；国家自然科学基金天元基金(11626016)
作者简介：李涛涛(1991－)，男，甘肃庆阳人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：15246051820@163.com.

$f_\infty = \lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}$.

值得一提的是,文献[1]将问题(1)转化成如下积分方程

$$u(t) = -\int_0^t (t-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s - \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s + \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

来进行讨论.该积分方程的右端有一个正项和两个负项,从而在运用锥上的不动点定理时遇到了许多困难.

2007 年,Han[6]运用不动点定理获得了

$$\begin{cases} x''(t) + \beta^2 x(t) = h(t)f(t,x(t)), t\in(0,1), \\ x'(0) = 0, x(\eta) = x(1), \eta\in(0,1) \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性,其中 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $h\in C((0,1),[0,\infty))$, $\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s<+\infty$, $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续函数,并获得如下结果:

定理 B 假设 f 满足

$$\liminf_{x\to0^+}\min_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x}>\lambda_1,$$

$$\limsup_{x\to+\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x}>\lambda_1,$$

则三点边值问题(2)至少有一个正解,其中 λ_1 是问题(2)对应的线性特征值问题的第一个特征值.

受文献[1,6]的启发,本文将研究二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u'' - k^2u + a(t)f(u) = 0, t\in(0,1), \\ u(0) = 0, u(1) = \alpha u(\eta) \end{cases} \tag{3}$$

正解的存在性.本文总假定

(H_1) $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$;

(H_2) $a\in C([0,1],[0,\infty))$ 且在(0,1)的任一子区间内 $a(t)$ 不恒为 0.

本文的主要结果是:

定理 1.1 假设 $\eta\in(0,1)$, $\alpha\in\left(0,\frac{\sinh(k)}{\sinh(k\eta)}\right)$, 条件($H_1$),($H_2$)成立.若 f 满足(A_1)或(A_2),则问题(3)至少有一个正解,其中 $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

2 预备知识

引理 2.1 设 $\eta\in(0,1)$, $\alpha\in\left(0,\frac{\sinh(k)}{\sinh(k\eta)}\right)$,则对 $y\in C[0,1]$,问题

$$\begin{cases} u'' - k^2u + y = 0, t\in(0,1), \\ u(0) = 0, u(1) = \alpha u(\eta), \eta\in(0,1) \end{cases} \tag{4}$$

有唯一解

$$u(t) = \int_0^1 H(t,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$H(t,s) = G(t,s) + \frac{\alpha\sinh(kt)G(\eta,s)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)},$$

$G(t,s)$ 表示边值问题

$$\begin{cases} u'' - k^2u = 0, t\in(0,1), \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数,即

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(kt)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)}, 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \\ \dfrac{\sinh(ks)\sinh(k(1-t))}{k\sinh(k)}, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

证明 显然 $\sinh(kt)$ 和 $\sinh(k(1-t))$ 是方程 $u''-k^2u=0$ 的两个线性无关解,故 $u''-k^2u=y$ 的任何解都可以表示为

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)y(s)ds + A\sinh(kt) + B\sinh(k(1-t)).$$

代入边界条件可得

$$u(0) = \int_0^1 G(0,s)y(s)\mathrm{d}s + B\sinh(kt),$$

$$u(1) = \int_0^1 G(11,s)y(s)ds + A\sinh(k),$$

$$\alpha u(\eta) = \int_0^1 G(\eta,s)y(s)\mathrm{d}s + \alpha A\sinh(k\eta) + \alpha B\sinh(k(1-\eta)).$$

解得

$$B=0, A = \frac{\alpha\int_0^1 G(\eta,s)y(s)\mathrm{d}s}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)}.$$

所以

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s + \frac{\alpha\int_0^1 G(\eta,s)y(s)\mathrm{d}s}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)}\sinh(kt).$$

则问题(3)的格林函数为

$$H(t,s) = G(t,s) + \frac{\alpha\sinh(kt)G(\eta,s)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)}.$$

引理 2.2 假设 $0<\eta<1$, $0<\alpha<\frac{\sinh(k)}{\sinh(k\eta)}$,则

(i) $H(t,s) \geqslant 0,(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$;

(ii) $\gamma(t)\Phi(s) \leqslant H(t,s) \leqslant \Phi(s),(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$,

其中

$$\gamma(t) = \min_{t\in[0,1]}\left\{\frac{\sinh(kt)}{\sinh(k)}, \frac{\sinh(k(1-t))}{\sinh(k)}\right\},$$

$$\Phi(s) = \frac{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)} + \frac{\alpha G(\eta,s)\sinh(k)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)}.$$

证明　显然，$H(t,s)$ 关于变量 t 是连续的，且当 $0<\alpha<\dfrac{\sinh(k)}{\sinh(k\eta)}$ 时 $H(t,s) \geqslant 0$. 由 $G(t,s)$ 的定义可得：

当 $t \leqslant s$ 时，

$$H(t,s) = \frac{\sinh(kt)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)} + \frac{\alpha G(\eta,s)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)}\sinh(kt) \leqslant \frac{\sinh(kt)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)} + \frac{\alpha G(\eta,s)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)}\sinh(k) = \Phi(s);$$

当 $s \leqslant t$ 时，

$$H(t,s) = \frac{\sinh(ks)\sinh(k(1-t))}{k\sinh(k)} + \frac{\alpha G(\eta,s)\sinh(kt)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)} \leqslant \frac{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)} + \frac{\alpha G(\eta,s)\sinh(k)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)} = \Phi(s).$$

综上所述有 $H(t,s) \leqslant \Phi(s)$.

此外，当 $t \leqslant s$ 时，

$$\frac{G(t,s)}{\dfrac{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)}} = \frac{\sinh(kt)\sinh(k(1-s))}{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))} = \frac{\sinh(kt)}{\sinh(ks)} \geqslant \frac{\sinh(kt)}{\sinh(k)}.$$

当 $s \leqslant t$ 时，

$$\frac{G(t,s)}{\dfrac{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)}} = \frac{\sinh(ks)\sinh(k(1-t))}{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))} = \frac{\sinh(k(1-t))}{\sinh(k(1-s))} \geqslant \frac{\sinh(k(1-t))}{\sinh(k)}.$$

所以

$$\frac{G(t,s)}{\dfrac{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)}} \geqslant \min_{t\in[0,1]}\left\{\frac{\sinh(kt)}{\sinh(k)}, \frac{\sinh(k(1-t))}{\sinh(k)}\right\} =: \gamma(t).$$

显然 $0<\gamma(t)<1, t \in (0,1)$.

$$H(t,s) = G(t,s) + \frac{\alpha\sinh(kt)G(\eta,s)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)} = \frac{G(t,s)}{\dfrac{\sinh(k)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)}}\frac{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)} + \frac{\alpha\sinh(kt)G(\eta,s)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)} \geqslant$$

$$\gamma(t)\frac{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)} + \gamma(t)\frac{\alpha\sinh(kt)G(\eta,s)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)}\frac{\sinh(k)}{\sinh(kt)} = \gamma(t)\frac{\sinh(ks)\sinh(k(1-s))}{k\sinh(k)} + \gamma(t)\frac{\alpha G(\eta,s)}{\sinh(k)-\alpha\sinh(k\eta)}\sinh(k) = \gamma(t)\Phi(s).$$

证毕.

引理 2.3　设 E 是 Banach 空间，$K \subset E$ 是 E 中的一个锥. Ω_1,Ω_2 是 E 的开子集，$0\in\Omega_1,\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 若全连续算子 $A:K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 满足

(i) $\|Au\| \leqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_1$ 且 $\|Au\| \geqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$,

或

(ii) $\|Au\| \geqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_1$ 且 $\|Au\| \leqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$,

则 A 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 上有一个不动点.

设

$$K = \{u \in C[0,1], \min_{t\in[0,1]} u(t) \geqslant \gamma(t)\|u\|\}$$

是 $C[0,1]$ 中的锥，其中

$$\|u\| = \sup_{t\in[0,1]}|u(t)|.$$

定义算子

$$Au(t) = \int_0^1 H(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s.$$

若 $u \in K$，则

$$\min_{t\in[0,1]} Au(t) = \min_{t\in[0,1]}\int_0^1 H(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \gamma(t)\int_0^1 \Phi(s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \gamma(t)\int_0^1 H(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s = \gamma(t)\|Au\|.$$

所以 $AK \subset K$. 显然 $A:K \to K$ 是全连续算子.

3 定理 1.1 的证明

(i) 超线性情形. 显然,问题(3)有解当且仅当 u 是算子方程

$$Au(t) = \int_0^1 H(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

的解. 由于 $f_0 = 0$, 故存在 $H_1 > 0$, 使得对 $0 \leqslant u \leqslant H_1$, 有 $f(u) \leqslant \varepsilon u$, 其中 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\varepsilon\int_0^1 \Phi(s)a(s) \leqslant 1 \tag{5}$$

因此,若 $u \in K$, $\| u \| = H_1$, 则由引理 2.2 和(5)式可得

$$Au(t) = \int_0^1 H(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon\int_0^1 \Phi(s)a(s)u(s)\mathrm{d}s \leqslant \| u \|.$$

记 $\Omega_1 := \{u \in E, \| u \| < H_1\}$. 则 $\| Au \| \leqslant \| u \|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$. 又因为 $f_\infty = \infty$, 故存在 $\hat{H}_2 > 0$, 使得对 $u \geqslant \widehat{H}_2$, 有 $f(u) \geqslant \mu u$, 其中 $\mu > 0$ 满足

$$\gamma(t)\mu\int_0^1 \Phi(s)a(s)\mathrm{d}s \leqslant 1.$$

记

$$H_2 := \max\left\{2H_1, \frac{\widehat{H}_2}{\gamma(t)}\right\},$$

$$\Omega_2 := \{u \in E: \| u \| < H_2\}.$$

若 $u \in K$, $\| u \| = H_2$, 则有

$$u(t) \geqslant \gamma(t)\| u \| \geqslant \widehat{H}_2.$$

因此

$$Au(t) = \int_0^1 H(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \mu\int_0^1 \Phi(s)a(s)u(s)\mathrm{d}s \geqslant \mu\gamma(t)\| u \|\int_0^1 \Phi(s)a(s)\mathrm{d}s \geqslant \| u \|.$$

(ii) 次线性情形. 因为 $f_0 = \infty$, 故可取 $H_1 > 0$, 使得对 $0 < u \leqslant H_1$ 有 $f(u) \geqslant \hat{\varepsilon} u$, 其中 $\hat{\varepsilon} > 0$ 满足

$$\hat{\varepsilon}\gamma(t)\int_0^1 H(t,s)a(s)\mathrm{d}s \geqslant 1.$$

则对 $u \in K$, $\| u \| = H_1$, 有

$$Au(t) = \int_0^1 H(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \hat{\varepsilon}\int_0^1 \Phi(s)a(s)u(s)\mathrm{d}s \geqslant \hat{\varepsilon}\gamma(t)\| u \|\int_0^1 \Phi(s)a(s)\mathrm{d}s \geqslant \| u \|.$$

记 $\Omega_1 := \{u \in E, \| u \| < H_1\}$. 则 $\| Au \| \geqslant \| u \|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$. 又因为 $f_\infty = 0$, 故存在 $\widehat{H}_2 > 0$, 使得对 $u \geqslant \widehat{H}_2$, 有 $f(u) \geqslant \lambda u$, 其中 $\lambda > 0$ 满足

$$\lambda\int_0^1 \Phi(s)a(s)\mathrm{d}s \leqslant 1.$$

考虑以下两种情况:

(1) f 有界,即存在 N, 使得对任意的 $u \in (0, \infty)$, $f(u) \leqslant N$. 取

$$H_2 := \max\left\{2H_1, N\int_0^1 \Phi(s)a(s)\mathrm{d}s\right\},$$

使得对 $u \in K$ 及 $\| u \| = H_2$, 有

$$Au(t) = \int_0^1 H(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \leqslant N\int_0^1 \Phi(s)a(s)\mathrm{d}s \leqslant H_2.$$

因此

$$\| Au \| \leqslant \| u \|.$$

(2) f 无界. 取 $H_2 > \max\{2H_1, \widehat{H}_2\}$, 使得

$$f(u) \leqslant f(H_2), 0 < u < H_2.$$

则对 $u \in K$, $\| u \| = H_2$, 有

$$Au(t) = \int_0^1 H(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 \Phi(s)a(s)u(s)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 \Phi(s)a(s)f(H_2)\mathrm{d}s \leqslant \lambda H_2\int_0^1 \Phi(s)a(s)\mathrm{d}s \leqslant H_2 = \| u \|.$$

综上,无论何种情况,只要令 $\Omega_2 := \{u \in E: \| u \| < H_2\}$, 就有 $\| Au \| \leqslant \| u \|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$. 由引理 2.3 可得问题(3)至少有一个正解.

4 应 用

例 4.1 对方程

$$\begin{cases} u'' - u + u^2 = 0, t \in (0,1), \\ u(0) = 0, u(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}} u(\dfrac{1}{2}) \end{cases} \tag{4}$$

其中 $k = 1$, $a(t) \equiv 1$, $f(u) = u^2$, $\eta = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}$, 显然($H_1$),($H_2$)成立,且($A_1$)成立. 由定理 1.1 可知问题(4)至少存在一个正解.

参考文献:

[1] Ma R Y, Wang H Y. Positive solutions of nonlinear three-point boundary-value problems [J]. J Math Anal Appl, 2003, 279: 216.

[2] Geng T M, Gao C H, Wang Y X. Positive solutions of three-point eigenvalue problem for nonlinear

third-order difference equation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版),2016, 53: 1215.

[3] Ma R Y. Positive solutions for a nonlinear m-point boundary value problems [J]. Comput Math Appl, 2001, 2001: 755.

[4] Ma R Y. Multiplicity results for a three-point boundary-value problems at resonance [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2003, 53: 777.

[5] Da J X, Han X L. Existence of positive solutions for nonlinear third-order ordinary differential equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版),2016, 53: 1177.

[6] Han X L. Positive solutions for a three-point boundary value problem [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2007, 66: 679.

[7] Yao Z J. New results of positive solutions for second-order nonlinear three-point integral boundary value problems [J]. J Nonlinear Sci Appl, 2015, 8: 93.

[8] Bai D, Feng H. Eigenvalue for a singular second order three-point boundary value problem [J]. J Appl Math Comput, 2012, 38: 443.

[9] Sun H. Positive solutions for nonlinear three-point boundary value problems on time scales [J]. J Appl Math Anal Appl, 2004, 299: 508.

[11] An Y K. Nonlinear perturbations of a coupled system of steady state suspension bridge equations [J]. Nonlinear Anal, 2002, 51: 1285.

[12] Gao T, Han X L. Positive solutions of third-order m-point boundary value problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed (四川大学学报:自然科学版), 2015, 38: 648.