2019 年 5 月　　四川大学学报(自然科学版)　　May 2019
第 56 卷　第 3 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 56　No. 3

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.03.006

带参数的一阶周期边值问题正解的全局结构

王　娇，祝　岩
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文运用 Dancer 全局分岐定理研究了带参数的一阶周期边值问题

$$\begin{cases} u' + a(t)u = rf(u), t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) \end{cases}$$

正解的全局结构，获得了正解存在的最优区间. 其中 r 为正参数，$f \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$a \in C([0,1],[0,\infty))$，且 $a(t)$ 在 $[0,1]$ 的任意子区间内不恒为 0.

关键词：周期边值问题；正解；Dancer 分歧定理
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)03-0413-06

Global structure of positive solutions for first-order periodic boundary value problem with parameter

WANG Jiao, *ZHU Yan*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we use Dancer's global bifurcation theorem to study the global structure of positive solutions for the following first-order periodic boundary value problem with parameter:

$$\begin{cases} u' + a(t)u = rf(u), t \in (0,1), \\ u(0) = u(1), \end{cases}$$

where r is a positive parameter, $f \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $a \in C([0,1],[0,\infty))$, and $a(t)$ is not identically equal to zero on any subinterval of $[0,1]$. We obtain the optimal interval for the existence of positive solutions.

Keywords: Periodic boundary value problem; Positive solution; Dancer's global bifurcation theorem
(2010 MSC 34B15)

1　引言及主要结果

周期边值问题在经济学、生态学等领域中有丰富的实际应用背景. 近年来，许多学者对此类问题进行了广泛研究[1-13]. 特别地，2004 年，Peng[1] 运用锥上的不动点定理研究了如下问题

$$\begin{cases} u' + f(u) = 0, t \in (0,T), \\ u(0) = u(T) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性. 其中非线性项 $f \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$. 该文获得如下主要结果：

定理 A　假设存在一个正数 $M>0$，使得对 $u \geq 0$，$t \in (0,T)$ 有 $Mu - f(u) \geq 0$. 若

(A1) $\lim\limits_{u \to 0^+} \inf\limits_{t \in (0,T)} \max \dfrac{f(u)}{u} > 0$,

$\lim\limits_{u \to +\infty} \sup\limits_{t \in (0,T)} \max \dfrac{f(u)}{u} < 0$

或

收稿日期：2018-03-06
基金项目：国家自然科学基金(11671322)；国家自然科学基金天元基金(11626061)
作者简介：王娇(1993－)，女，甘肃武威人，硕士. 主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：m18893703613@163.com
通讯作者：祝岩. E-mail：18693761799@163.com

(A2) $\lim\limits_{u\to+\infty}\inf\max\limits_{t\in(0,T)}\frac{f(u)}{u}>0$,

$\lim\limits_{u\to0^+}\sup\max\limits_{t\in(0,T)}\frac{f(u)}{u}<0$,

则问题(1)至少存在一个正解.

在文献[1]的基础上,Ma 等[2] 运用上下解方法给出了一阶周期边值问题

$$\begin{cases}u'+f(u)=e(t),t\in(0,T),\\u(0)=u(T)\end{cases}$$

存在解的一些充分条件,其中 $f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$,$e\in C([0,T],\mathbf{R})$.

2010 年,Ma 等[3] 运用分歧理论在 $f_0>0$,$f_\infty>0$ 的情形下获得了非线性二阶微分方程

$$\begin{cases}u''-q(t)u+\lambda a(t)f(u)=0,t\in(0,2\pi),\\u(0)=u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi)\end{cases}\quad(2)$$

正解的全局结构,其中 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$,

$$f_0=\lim_{s\to0^+}\inf\frac{f(s)}{s},f_\infty=\lim_{s\to+\infty}\inf\frac{f(s)}{s},$$

$a\in C([0,2\pi],[0,\infty))$,且 q 是正常数,λ 是正参数.

一个值得思考的问题是,一阶周期边值问题能否建立起类似于文献[3]二阶情形下的结果呢?由于二阶微分算子是对称算子而一阶微分算子非对称,所以一阶微分算子解的存在性的研究需要创新和改变.其次,由于所用工具的局限,文献[3]虽然获得了解的存在性结果,但却不能得到关于解集全局结构的任何信息.最后,文献[2]运用上下解方法只能获得相应问题解的存在性,并不能确定解的符号,文献[1]则运用不动点定理仅获得相应问题正解的存在性.本文运用 Dancer 全局分歧定理研究更一般形式的带参数的一阶周期问题

$$\begin{cases}u'+a(t)u=rf(u),t\in(0,1),\\u(0)=u(1)\end{cases}\quad(3)$$

正解的全局分歧,并可获得正解存在的最优区间.

本文总假定:

(H1) $f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$,$r$ 为正参数,且 $sf(s)>0$,$s\neq0$;

(H2) $a\in C([0,1],[0,\infty))$连续,且在$[0,1]$的任意子区间内不恒为 0;

(H3) 存在 $f_0,f_\infty\in(0,\infty)$,使得

$$f_0=\lim_{|s|\to0}\frac{f(s)}{s},f_\infty=\lim_{|s|\to\infty}\frac{f(s)}{s}.$$

本文主要结果如下:

定理 1.1 假设条件(H1)~(H3)成立.若

$$\frac{\lambda_1}{f_\infty}<r<\frac{\lambda_1}{f_0}$$

或

$$\frac{\lambda_1}{f_0}<r<\frac{\lambda_1}{f_\infty},$$

则问题(3)存在一个正解,其中 λ_1 是线性边值问题

$$\begin{cases}\varphi'(t)+a(t)\varphi(t)=\lambda_1\varphi(t),t\in(0,1),\\\varphi(0)=\varphi(1)\end{cases}$$

的特征值,φ 是对应于 λ_1 的特征函数.

文献[1]在 M 为常数情形下讨论了相应问题正解的存在性,而本文考虑了 M 为函数时,问题(3)正解的存在性,并刻画了正解的全局结构.

2 预备知识

本文的工作空间是 $Y=C[0,1]$,其中 $E=\{u\in Y\,|\,u(0)=u(1),t\in(0,1)\}$.它们在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$下构成 Banach 空间.

引理 2.1 问题(3)等价于积分方程

$$u(t)=r\int_0^1G(t,s)f(u)\mathrm{d}s=:T_ru(t),t\in[0,1]\quad(4)$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\exp(\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta)}{\exp(\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta)-1},0\le t\le s\le1,\\[2ex]\dfrac{\exp(\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta)}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta)},0\le s\le t\le1.\end{cases}$$

证明 给问题(3)的第一个方程两边同时乘以 $\exp(-\int_0^t a(\theta)\mathrm{d}\theta)$ 得

$$\exp(-\int_0^t a(\theta)\mathrm{d}\theta)u(t)'+a(t)u(t)\exp(-\int_0^t a(\theta)\mathrm{d}\theta)=rf(u)\exp(-\int_0^t a(\theta)\mathrm{d}\theta).$$

整理得

$$(\exp(-\int_0^t a(\theta)\mathrm{d}\theta)u(t))'=rf(u)\exp(-\int_0^t a(\theta)\mathrm{d}\theta).$$

对上式从 t 到 $t+1$ 上积分,并结合条件 $u(t)=u(t+1)$可得

$$\exp(-\int_0^t a(\theta)\mathrm{d}\theta)u(t)\,|\,t+1_t=\int_t^{t+1}rf(u)\exp(-\int_0^s a(\theta)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s.$$

整理得

$$u(t)\exp(-\int_0^t a(\theta)\mathrm{d}\theta)(\exp(-\int_0^{t+1} a(\theta)\mathrm{d}\theta)-1)=\int_t^{t+1} rf(u)\exp(-\int_0^s a(\theta)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s,$$

即

$$u(t)=\frac{\int_t^{t+1} rf(u)\exp(-\int_0^s a(\theta)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}s}{\exp(-\int_0^t a(\theta)\mathrm{d}\theta)(\exp(-\int_0^{t+1} a(\theta)\mathrm{d}\theta)-1)}.$$

当 $0\le t\le s\le 1$ 时，

$$u(t)=r\int_t^{t+1}\frac{\exp(\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta)}{\exp(\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta)-1}f(u)\mathrm{d}s.$$

当 $0\le s\le t\le 1$ 时，

$$u(t)=r\int_t^{t+1}\frac{\exp(\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta)}{1-\exp(-\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta)}f(u)\mathrm{d}s.$$

故

$$u(t)=r\int_0^1 G(t,s)f(u)\mathrm{d}s,t\in[0,1].$$

证毕.

记 $\kappa=\exp(-\int_0^1 a(\theta)\mathrm{d}\theta)$，则

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\le G(t,s)\le\frac{1}{1-\kappa},(t,s)\in(0,1)\times(0,1).$$

记 $G_n(t,s)$ 是

$$\begin{cases}-u'(t)=0,t\in(\alpha_n,\beta_n),\\ u(\alpha_n)=u(\beta_n)\end{cases}$$

的 Green 函数. 在 Y 中定义锥

$$P=\{u\in Y\,|\,u(t)\ge 0,u(t)\ge\frac{1}{\delta}\|u\|,\ t\in(0,1)\}.$$

其中，δ 是一个常数，且 $0<\delta<\min\{t_0,1-t_0\}$.

引理 2.2(Arzela-Ascoli 定理)[16]　$F\subset C(\tilde{M})$ 是一个列紧集，当且仅当 F 是一致有界且等度连续的函数族.

引理 2.3　假设条件(H1)，(H2)成立. 则 $T_r:=P\to Y$ 是全连续算子.

证明　由 $T_ru(t)=r\int_0^1 G(t,s)f(u)\mathrm{d}s$. 令 B 为 $C[0,1]$ 中的有界闭集，对 $\forall u\in B$，$\|u\|\le M$，由 f 连续有界及 Green 函数连续有界可知 $\|T_ru\|\le C$.

下证等度连续. $\forall u\in B$，$t_1,t_2\in C[0,1]$存在 $\hat{\delta}>0$，s. t. 当 $|t_1-t_2|<\hat{\delta}$ 时，

$$|T_ru(t_1)-T_ru(t_2)|=\left|r\int_0^1[G(t_1,s)f(u)-G(t_2,s)f(u)]\mathrm{d}s\right|=r\int_0^1|G(t_1,s)f(u)-G(t_2,s)|f(u)\mathrm{d}s.$$

由 f 有界连续及 Green 函数有界连续可得 $|T_ru(t_1)-T_ru(t_2)|\le\varepsilon$.

则由条件(H1)，(H2)及引理 2.2 易得 $T_r:P\to Y$ 全连续.

引理 2.4(Krein-Rutman 定理)[16]　设 Y 是一个 Banach 空间，$A\subset Y$ 是一个锥且满足 $\hat{A}\ne\phi$($\hat{A}$ 表示 A 的内部). 又设 $T:Y\to Y$ 是强正的全连续线性算子，则

(i) 谱半径 $r(T)>0$；

(ii) $r(T)$是 T 的单重(按代数重数计算)特征值；

(iii) $r(T)$所对应的特征函数 $v\in\hat{A}$，并且 T 其余特征值所对应的特征函数不属于 $\hat{A}$.

由 Krein-Rutman 定理，不难得到如下引理

引理 2.5[15]　假设条件(H1)成立，$r(T)$为 T 的谱半径. 则 $r(T)>0$ 且 $\frac{1}{r(T)}$是特征函数 $\varphi\in\mathrm{int}K_h$ 的简单特征值，且不存在其他特征函数为正的特征值.

引理 2.6(Dancer)[15]　设

($H1_+$) 算子 $L:Y\to Y$ 为线性紧算子；

($H2_+$) 非线性算子 $N:U(0)\subset Y\to Y$ 全连续，且

$$\frac{\|Nu\|}{\|u\|}\to 0,u\to 0;$$

($H3_+$) 实 Banach 空间有一个锥 P 满足 $Y=P-P$ 并且$(L+N)(P)\subset P$；

($H4_+$) L 的谱半径 $r(T)>0$.

令 $\lambda_1=r(L)-1$. 则$(\lambda_1,0)$为以下方程(10)的一个分歧点，并且 S_+ 的闭包中包含一个通过$(\lambda_1,0)$的无界连通分支 $C_+(\lambda_1)$.

证明　下证条件($H1_+$)～($H4_+$)成立. 定义算子 $L:D(L)\to Y$，

$$Lu:=u'(t)+a(t)u(t),u\in D(L)\tag{5}$$

其中

$$D(L)=\{u\in C^1[0,1]\,|\,u(0)=u(1)\}.$$

则 $L^{-1}:Y\to E$ 全连续. 则条件($H1_+$)显然成立.

下证($H2_+$). 已知

$$Nu:=r\lambda_1L^{-1}[\zeta u(\cdot)](t)=$$

$$r\int_0^1 G(t,s)\lambda_1\zeta(u(s))\mathrm{d}s,$$

故其全连续的证明同引理2.3.

设 $\zeta,\xi\in C(\mathbf{R})$ 满足

$$f(u)=f_0u+\zeta(u),f(u)=f_\infty u+\xi(u) \tag{6}$$

显然,

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{\zeta(u)}{u}=0,\ \lim_{|u|\to\infty}\frac{\xi(u)}{u}=0 \tag{7}$$

记

$$\tilde{\xi}(u)=\max_{0\le|s|\le u}|\xi(s)| \tag{8}$$

则 $\tilde{\xi}(u)$ 是非减的,且

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\tilde{\xi}(u)}{u}=0 \tag{9}$$

以下从平凡解 $u\equiv0$ 处考虑分歧问题:

$$Lu=\lambda_1rf_0u+\lambda_1r\zeta(u) \tag{10}$$

方程(10)等价于方程

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)[\lambda_1rf_0u(s)+\lambda_1r\zeta(u(s))]\mathrm{d}s:=(\lambda_1L^{-1}rf_0u+\lambda_1L^{-1}[r\zeta(u(\cdot))])(t) \tag{11}$$

因为

$$\|L^{-1}[\zeta(u(\cdot))]\|=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G(t,s)\zeta(u(s))\mathrm{d}s\right|+\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G_t(t,s)\zeta(u(s))\mathrm{d}s\right|\le C\cdot\|\zeta(u(\cdot))\|_\infty.$$

所以当 u 在 E 中趋于0时,$\|L^{-1}[\zeta(u(\cdot))]\|=o(\|u\|)$.(H2$_+$)得证.

下证条件(H3$_+$).由定义

$$P=\{u\in Y\,|\,u(t)\ge0,u(t)\ge\frac{1}{\delta}\|u\|,t\in(0,1)\},$$

其中,δ 是一个常数,且 $0<\delta<\min\{t_0,1-t_0\}$.可知 $Y=P-P$ 显然.

下证 $(L+N)(P)\subset P$,即保锥性.因

$$Lu:=\lambda_1r\int_0^1 G(t,s)f_0u(s)\mathrm{d}s.$$

及

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\le G(t,s)\le\frac{1}{1-\kappa},(t,s)\in(0,1)\times(0,1),$$

所以

$$Lu\ge\lambda_1r\int_0^1\frac{\kappa}{\kappa-1}f_0u(s)\mathrm{d}s\ge\lambda_1r\frac{\kappa}{\kappa-1}\int_0^1 f_0u(s)\mathrm{d}s.$$

因

$$(L+N)(u)=Lu+Nu=\lambda_1rf_0u(s)+\lambda_1r\zeta(u(s)),$$

由引理2.5可知,$\lambda_1>0$.又由 r 为正参数,$f_0\in(0,\infty)$,$u>0$,$\zeta(u)=o(u)$ 可知,$(L+N)(u)\ge0$.因

$$(L+N)(u)=\int_0^1 G(t,s)[\lambda_1rf_0u(s)+\lambda_1r\zeta(u(s))]\mathrm{d}s\ge\frac{1}{\delta}\int_0^1 G(t,s)[\lambda_1rf_0\|u(s)\|+\lambda_1r\zeta(\|u(s)\|)]\mathrm{d}s\ge\frac{1}{\delta}\left\|\int_0^1 G(t,s)[\lambda_1rf_0u(s)+\lambda_1r\zeta(u(s))]\mathrm{d}s\right\|\ge\frac{1}{\delta}\|(L+N)(u)\|.$$

故 $(L+N)(u)\subset P$,即保锥性成立.

最后,条件(H4$_+$)由引理2.5易得.证毕.

以 S^+ 记 E 中满足以下条件的函数集合:在开区间(0,1)内没有结点(即非退化零点).记 $\Phi^+=\mathbf{R}\times S^+$.对于具体方程(10),根据引理2.6可知:方程(10)的正解集中存在连接 $\left(\frac{\lambda_1}{rf_0},0\right)$ 和∞的连通分支 $C^+\subseteq\Phi^+$ 且 $C^+\backslash\left\{\left(\frac{\lambda_1}{rf_0},0\right)\right\}\subset\Phi^+$.

3　主要结果的证明

定理1.1的证明　显然,若 $(1,u)$ 为方程(10)的一个解,则 u 必为问题(3)的一个解.以下只需说明 C^+ 穿过超平面 $\{1\}\times E\subseteq\mathbf{R}\times E$.为此只需证明 C^+ 连接 $\left(\frac{\lambda_1}{rf_0},0\right)$ 和 $\left(\frac{\lambda_1}{rf_\infty},\infty\right)$.

设 $(\mu_n,y_n)\in C^+$ 满足 $\mu_n+\|y_n\|\to\infty$.因为(0,0)是当 $\lambda=0$ 时方程(10)的唯一解,而 $C^+\cap(\{0\}\times E)=\phi$ 所以当 $n\in\mathbf{N}$ 时有 $\mu_n>0$.

情形1.　$\frac{\lambda_1}{f_\infty}<r<\frac{\lambda_1}{f_0}$.可证

$$\left(\frac{\lambda_1}{rf_\infty},\frac{\lambda_1}{rf_0}\right)\subseteq\{\lambda\in\mathbf{R}\,|\,\exists(\lambda,u)\in C^+\}.$$

以下分两步证明.首先证明若存在常数 $\bar{M}>0$,使得

$$\mu_n\subset(0,\bar{M}] \tag{12}$$

则 C^+ 连接 $\left(\frac{\lambda_1}{rf_0},0\right)$ 和 $\left(\frac{\lambda_1}{rf_\infty},0\right)$.反设不存在这样的 $\bar{M}$,则存在 $\{\mu_n\}$ 的子列,仍记作 $\{\mu_n\}$,满足 $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\infty$.则

$$y_n' + a(t)y(n) = \mu_n r f_\infty y_n + \mu_n r \xi(y_n) =$$
$$\mu_n r \frac{f(y_n)}{y_n} y_n \geq \mu_n r \bar{\delta} y_n.$$

其中$\bar{\delta} = \inf \frac{f(s)}{s} > 0$. 所以

$$\int_0^1 y_n \mathrm{d}y_n + \int_0^1 a(t) y_n^2 \mathrm{d}t \geq$$
$$\int_0^1 \mu_n r \bar{\delta} y_n^2 \mathrm{d}t \int_0^1 a(t) y_n^2 \mathrm{d}t \geq \int_0^1 \mu_n r \bar{\delta} y_n^2 \mathrm{d}t.$$

而$\int_0^1 a(t) y_n^2 \mathrm{d}t$ 有界，$\int_0^1 \mu_n r \bar{\delta} y_n^2 \mathrm{d}t$ 无界. 矛盾. 因此,存在与 $n \in \mathbf{N}$ 无关的常数 $\bar{M} > 0$,使得 $\forall n \in \mathbf{N}$, $|\mu_n| \leq \bar{M}$. 注意到此时必有

$$\| y_n \| \to \infty \tag{13}$$

在方程

$$L y_n - \mu_n r f_\infty y_n = \mu_n r \xi(y_n(t)) \tag{14}$$

两端同除以 $\| y_n \|$,再令 $\| \bar{y}_n \| = \frac{y_n}{\| y_n \|}$. 因为 $\| \bar{y}_n \|$ 在 $C[0,1]$中有界,所以在 E 中有收敛子列,仍记作$\bar{y}_n$,即存在$\bar{y} \in E$, $\| \bar{y} \| = 1$,使得$\bar{y}_n \to \bar{y}$. 进一步,根据条件(H1)和式(9),以及 $\tilde{\xi}$ 非减,可得

$$\frac{|\xi(y_n(t))|}{\| y_n \|} \leq \frac{|\tilde{\xi}(\ y_n(t)\ )|}{\| y_n \|} \leq$$
$$\frac{|\tilde{\xi}(\| y_n \|_\infty)|}{\| y_n \|} \leq \frac{|\tilde{\xi}(\| y_n \|)|}{\| y_n \|},$$

从而

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\xi(y_n(t))|}{\| y_n \|} = 0 \tag{15}$$

所以

$$\bar{y}(t) = \int_0^1 G(t,s) \bar{\mu} f_\infty \bar{y}(s) \mathrm{d}s$$

其中$\bar{\mu} := \lim_{n \to \infty} \mu_n$. 因此可得

$$L \bar{y} - \bar{\mu} r f_\infty \bar{y} = 0 \tag{16}$$

以下证明

$$\bar{y} \in C^+ \tag{17}$$

反设$\bar{y} \notin C^+$. 因为$\bar{y} \neq 0$ 是式(14)的一个解,所以$\bar{y}$在$[0,1]$上的所有零点都是非退化的. 因此存在 $h \in \mathbf{N}$, $\tau \in \{+,-\}$,使得$\bar{y} \in C_h^\tau \neq C^+$. 由于 $E \backslash C^+$ 是开集,故存在 $\rho > 0$,邻域 $U(\bar{y}, \rho_0)$,使得 $U(\bar{y}, \rho_0) \subset E \backslash C^+$. 这与$\bar{y}_n \to \bar{y}$, $y \in E$ 和$\bar{y}_n \in C^+$ 矛盾. 因此$\bar{y} \in C^+$.

进一步,根据 Sturm-Liouville 特征值理论[16], $\bar{\mu} r f_\infty = \lambda_1$. 从而$\bar{\mu} = \frac{\lambda_1}{r f_\infty}$. 因此 C^+ 连接$(\frac{\lambda_1}{r f_0}, 0)$和$(\frac{\lambda_1}{r f_\infty}, \infty)$.

情形 2　$\frac{\lambda_1}{f_0} < r < \frac{\lambda_1}{f_\infty}$. 这种情形下有

$$\frac{\lambda_1}{r f_0} < 1 < \frac{\lambda_1}{r f_\infty}.$$

若$(\mu_n, y_n) \in C^+$满足$\lim_{n \to \infty}(\mu_n + \| y_n \|) = \infty$和$\lim_{n \to \infty} \mu_n = \infty$,则

$$(\frac{\lambda_1}{r f_0}, \frac{\lambda_1}{r f_\infty}) \subseteq \{\lambda \in (0,\infty) \mid (\lambda, u) \in C^+\}.$$

进一步,有

$$(\{1\} \times E) \cap C^+ \neq \phi.$$

若存在 $\bar{M} > 0$,使得对任意 $n \in \mathbf{N}$,都有 $\mu_n \in (0, \bar{M}]$. 运用与情形 1 第一步中类似的证明方法可得

$$(\mu_n, y_n) \to (\frac{\lambda_1}{r f_\infty}, \infty), n \to \infty.$$

因此 C^+ 连接$(\frac{\lambda_1}{r f_0}, 0)$和$(\frac{\lambda_1}{r f_\infty}, \infty)$. 结论得证.

4　应　用

考虑一阶周期边值问题

$$\begin{cases} u' + 2u = r f(u), t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) \end{cases} \tag{18}$$

正解的存在性,其中 $f(u) = u + \frac{u}{u+1}$. 显然,该问题满足条件(H1)和(H2). 此时

$$f_0 = \lim_{|s| \to 0} \frac{f(s)}{s} = 2, f_\infty = \lim_{|s| \to \infty} \frac{f(s)}{s} = 1,$$

故条件(H3)满足. 又因为存在正数 r 满足

$$\frac{\lambda_1}{f_\infty} < r < \frac{\lambda_1}{f_0}$$

或

$$\frac{\lambda_1}{f_0} < r < \frac{\lambda_1}{f_\infty},$$

则由定理 1.1 可知,问题存在一个正解.

参考文献:

[1] Peng S G. Positive solutions for first-order periodic boundary value problem [J]. Appl Math Comput, 2004, 158: 345.

[2] Ruyun M, Lu Z. Construction of lower and upper solutions for first-order periodic problem [J]. Bound Value Probl, 2015, 7: 618.

[3] Ruyun M, Jia X. Bifurcation from interval and positive solutions for second-order periodic boundary value problems [J]. Dynam Systems Appl, 2010, 19: 211.

[4] Tian J F, Wang W L, Cheng W S. Periodic boundary value problems for first-order impulsive difference

equations with time delay [J]. Adv Differ Equ, 2018, 79: 2.

[5] Wen G, Shuanghong M, Dabin W. Periodic boundary value problems for first-order difference equations [J]. Electron J Qual Theo, 2012, 52: 39.

[6] Wang Z Y, Gao C H. Bifurcation from infinity and multiple solutions for first-order periodic boundary value problems [J]. Electron J Differ Equ, 2011, 141: 34.

[7] Ma R Y, Liu Y Q. One-signed periodic solutions of first-order functional differential equations with a parameter [J]. Abstr Appl Anal, 2011, 11: 249.

[8] Yuji L. Positive solutions of periodic boundary value problems for nonlinear first-order impulsive differential equations [J]. Nonlinear Anal Theor, 2009, 5: 2106.

[9] Tisdell Christopher C. Existence of solutions to first-order periodic boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 2006, 323: 1325.

[10] Gurney W S, Blythe S P, Nisbet R N. Nicholson's blowflies revisited [J]. Nature, 1980, 187: 17.

[11] Chenghua G, Fei Z, Ruyun M. Existence of positive solutions of second-order periodic boundary value problems with sign-changing Green's function [J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2017, 2: 263.

[12] Ying W, Jing L, Zengxia C. Positive solutions of periodic boundary value problems for the second-order differential equation with a parameter [J]. Bound Value Probl, 2017, 49: 34.

[13] 魏丽萍. 一类三阶周期边值共振问题解的存在性 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 260.

[14] 达举霞, 韩晓玲. 三阶非线性微分方程边值问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 1177.

[15] 马如云. 线性微分方程的非线性扰动 [M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[16] 郭大均. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.

引用本文格式:

中　文: 王娇, 祝岩. 带参数的一阶周期边值问题正解的全局结构 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 413.

英　文: Wang J, Zhu Y. Global structure of positive solutions for first-order periodic boundary value problem with parameter [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 413.