2018 年 11 月 四川大学学报(自然科学版) Nov. 2018
第 55 卷 第 6 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 55 No. 6

doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2018. 06. 006

CEV 模型下支付红利的美式看跌期权的差分法

郭宗怀，胡 兵，徐友才
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘 要：作为 B-S 模型的一般化，CEV 模型在实际操作中更有可行性. 本文针对该模型下支付红利的美式看跌期权的定价问题. 推导了模型遵循的变分方程，提出了相应的显式差分格式，然后讨论了格式的稳定性和收敛性并给出了相应的稳定条件. 数值实验验证了算法的有效性.

关键词：CEV 模型；美式看跌期权；显式差分格式；稳定性；收敛性
中图分类号：O241. 82 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2018)06-1162-05

Differential algorithms for American put-options of CEV on dividend-paying stock

GUO Zong-Huai, *HU Bing*, *XU You-Cai*
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: As a generalization of B-S model, CEV model is more feasible in practical operation. This paper aims at pricing problem for American put-options of CEV on dividend-paying stock. The variation equation for the model is derived. An explicit difference scheme for the approximate solution of the equation is presented. Then stability and convergence of the scheme are analyzed, the corresponding stability conditions are given. Numerical experiment shows that this scheme is efficient.

Keywords: CEV; American put-options; Explicit difference schemes; Stability; Convergence
(2010 MSC 65M60)

1 引 言

按权利期权可以划分为看涨期权和看跌期权，按种类可以划分为欧式期权和美式期权. 欧式期权只能在约定日期执行，而美式期权可以提前执行，从而能够规避一部分风险. 在数学模型上，美式期权是一个非线性自由边界问题. 针对期权定价问题，Black 与 Scholes 给出了经典的 B-S 期权定价模型[1]，并且证明美式期权定价模型可以作为退化的抛物型自由边值问题来求解，但无法得到解析解. 就美式期权定价模型的数值解法而言，目前比较成熟的有二叉树方法[2]，蒙特卡罗方法[3,4]，有限差分法[5]，有限元方法[6]及有限体积法[7]等.

股票价格的波动率是描述未来股票价格变动的关键变量. B-S 模型假设股票收益的波动率为常数，但在金融市场中波动率往往是变化的. 因此，Cox 与 Ross 于 1976 年在 B-S 模型的基础上提出了不变方差弹性(CEV)模型[8]. 该模型假定期权的标的资产为股票，用 S 表示股票价格，K 为期权的执行价格，V 为期权价格，T 为期权执行日期，σ 为股票价格的波动率，r 为无风险利率，q 为期权有效期内标的资产的红利，常数 α 是弹性系数. 则

收稿日期：2018-03-07
基金项目：国家自然科学基金(11771312)
作者简介：郭宗怀(1993－)，男，四川眉山人，硕士研究生，主要研究方向为计算数学. E-mail：gzh930420@163. com
通讯作者：胡兵. E-mail：hubingscu@scu. edu. cn

支付红利的美式看跌期权的 CEV 模型满足以下线性互补偏微分方程：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^{2\alpha}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV\right)(V-G(S))=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^{2\alpha}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV\leqslant 0,\ V\geqslant G(S) \quad (2)$$

$$V(T,S)=G(S),\ V(t,0)=G(0),\ V(t,S)=0, S\to\infty \quad (3)$$

这里的 $G(S)=\max(K-S,0)$，$0\leqslant S\leqslant\infty$，$0<t<T$. 对于终止期为 $t=T$ 的美式看跌期权 $V(t,S)$，它存在两个区域，一个是继续持有区域 $D_1=\{(t,S)\mid 0\leqslant t\leqslant T, S(t)\leqslant S\leqslant\infty\}$，在这个区域内 $V(t,S)>G(S)$；另一个终止区域是 $D_2=\{(t,S)\mid 0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant S(t)\leqslant S\}$，在这个区域内 $V(t,S)=G(S)$. 定义区域 $D=D_1\cup D_2$. 则综合(1)～(3)式可得 CEV 下有红利支付美式看跌期权定价的变分方程模型为：求 $V(t,S)$，使得

$$\min\{-LV, V-G(S)\}=0,(t,S)\in D \quad (4)$$

$$V(T,S)=G(S), 0\leqslant S\leqslant\infty, V(t,S)=0, S\to\infty \quad (5)$$

其中

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}S^{2\alpha}+(r-q)S\frac{\partial}{\partial S}-r.$$

这里 $\sigma=aS^{\alpha-1}$（a 为常数），CEV 模型(4)-(5)和 B-S 模型的不同之处是这里的波动率不是常数，而是由参数 α 决定的（$\alpha\in[0,1]$）. 当 $\alpha=1$ 时，波动率是一个常数，此时的模型就是标准的 B-S 模型.

可以通过引进变量

$$S=K\mathrm{e}^x,$$

$$V(t,S)=K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2(r-q)}{\sigma^2}-1\right)x}u(x,\tau),$$

$$t=T-\frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

将变系数方程化为常系数方程求解. 当 $\alpha\neq1$ 时就是一般情况下的 CEV 定价模型.

在 B-S 模型的数值解法方面，文献[9]运用修正的粒子群优化算法对波动率进行了估计. 文献[10]利用四点隐式差分格式给出了有红利支付美式看涨期权的数值分析. 文献[11]利用三次三角 B-样条配点法对 B-S 模型进行了数值研究. 文献[12]运用 Romberg 求积法对 B-S 模型进行了数值研究.

在 CEV 模型的数值解法方面，文献[13,14]将美式期权定价问题转化为相应的非线性变分问题，证明了这类模型弱解的存在唯一性. 文献[15]通过 BAW 方法给出了 CEV 模型的近似解. 文献[16]则采用 Front-Fixing 变换和 PML 技巧将 CEV 模型转为规则区域上的抛物问题，并通过有限差分法给出了数值解，但并没有对方程的稳定性和收敛性进行分析.

本文针对支付红利的美式看跌期权的 CEV 模型定价问题，通过反向归纳的显式差分法求解分析了差分格式的相容性及差分解的稳定性与收敛性. 数值实验结果表明本文的算法是有效的.

2　有限差分逼近

针对(4)-(5)式建立有限差分格式. 对时间 $t\in[0,T]$ 及股票价格 $S[0,S_{\max}]$ 进行矩形网格划分：设 $\Delta t=\frac{T}{N}$，则矩形网格共有 $N+1$ 个时间分割点：$0,\Delta t,2\Delta t,\cdots M\Delta t=T$. 同时，假设 $\Delta x=\frac{S_{\max}}{M}$，则共有 $M+1$ 个价格分割点：$0,\Delta x,2\Delta x,\cdots M\Delta x=S_{\max}$. 定义

$$V_j^i=(i\Delta t, j\Delta x), \varphi_j=G(j\Delta x).$$

作如下近似替代：

$$\frac{\partial V}{\partial t}\approx\frac{V_j^{i+1}-V_j^i}{\Delta t},\frac{\partial V}{\partial S}\approx\frac{V_{j+1}^{i+1}-V_j^{i+1}}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\approx\frac{V_{j+1}^{i+1}+V_{j-1}^{i+1}-2V_j^{i+1}}{\Delta x^2} \quad (6)$$

把式(6)带入(4)-(5)式中，注意 $S=j\Delta x$，得到（$i\Delta t, j\Delta x$）上的网格差分方程为

$$\min\Big\{-\frac{V_j^{i+1}-V_j^i}{\Delta t}-\frac{1}{2}\sigma^2(j\Delta x)^{2\alpha}\frac{V_{j+1}^{i+1}+V_{j-1}^{i+1}-2V_j^{i+1}}{\Delta x^2}-(r-q)(j\Delta x)\frac{V_{j+1}^{i+1}-V_j^{i+1}}{\Delta h}+rV_j^{i+1}, V_j^i-\varphi_j\Big\}=0 \quad (7)$$

$$V_j^N=\varphi_j=G(j\Delta x),\ 0\leqslant i\leqslant N-1,\ 0\leqslant j\leqslant M-1 \quad (8)$$

化简得

$$V_j^i=\max\{p_jV_{j-1}^{i+1}+(2p_j+q_j+r\Delta t-1)V_j^{i+1}+(-p_j-q_j)V_{j+1}^{i+1},\varphi_j\} \quad (9)$$

$$V_j^N=\varphi_j=G(j\Delta x),$$

$$0\leqslant i\leqslant N-1,\ 0\leqslant j\leqslant M-1 \tag{10}$$

其中

$$p_j=\frac{1}{2}\sigma^2 j^{2\alpha}(\Delta x)^{2\alpha-2}\Delta t,$$

$$q_j=(r-q)j\Delta t.$$

利用$\varphi_j=G(j\Delta x)$，通过$V_j^N=\varphi_j$得到V_j^N的值，再通过式(9)反向归纳逐步得到$V_j^i(0\leqslant i\leqslant N-1,\ 0\leqslant j\leqslant M-1)$的值. 此方法不用解线性方程组，所以这是一个显示(倒向)过程.

3 模型相容性、稳定性和收敛性分析

3.1 相容性

定义截断误差为$R(V(t,S),\Delta t,\Delta x)$.

定理 3.1 差分格式(9)-(10)式相对于(4)-(5)式是相容的.

证明 对于截断误差$R(V(t,S),\Delta t,\Delta x)$，利用泰勒展开可得

$$\begin{aligned}&R(V(t,S),\Delta t,\Delta x)=\\&\frac{\partial V}{\partial t}+O(\Delta t)+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^{2\alpha}+O(\Delta x^2)+\\&(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}+O(\Delta x)-rV=\\&(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^{2\alpha}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV)+\\&O(\Delta t)+O(\Delta x)+O(\Delta x^2)=\\&(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^{2\alpha}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV)+\\&O(\Delta t)+O(\Delta x).\end{aligned}$$

由于$V(t,S)$是方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^{2\alpha}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

的光滑解，代入上式得

$$R(V(t,S),\Delta t,\Delta x)=O(\Delta t)+O(\Delta x).$$

当$\Delta t\to 0,\Delta x\to 0$时，

$$R(V(t,S),\Delta t,\Delta x)\to 0.$$

所以该格式是相容的. 证毕.

3.2 稳定性

根据式(9)，由于φ_j是已知的，所以分析差分格式的稳定性只需研究

$$\begin{aligned}V_j^i=&p_jV_{j-1}^{i+1}+(2p_j+q_j+r\Delta t-1)V_j^{i+1}+\\&(-p_j-q_j)V_{j+1}^{i+1}\end{aligned}$$

的稳定性即可. 我们设

$$\hat{V}_i=\begin{bmatrix}V_1^i\\V_2^i\\\cdots\\V_{M-1}^i\end{bmatrix},\hat{V}_{i+1}=\begin{bmatrix}V_1^{i+1}\\V_2^{i+1}\\\cdots\\V_{M-1}^{i+1}\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}(-p_1-q_1)V_0^{i+1}\\0\\\cdots\\(-p_{M-1}-q_{M-1})V_M^{i+1}\end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}2p_1+q_1+r\Delta t-1 & -p_1-q_1 & \cdots & \cdots\\ p_2 & 2p_2+q_2+r\Delta t-1 & -p_2-q_2\cdots & \\ & \cdots & \cdots & \cdots\\ & \cdots & p_{M-1} & \cdots\end{bmatrix}.$$

我们有$\hat{V}_i=A\hat{V}_{i+1}+P$，其中$i=N-1,N-2,\cdots\cdots 0$. 为使显格式具有稳定性，就要求矩阵族$\{A^i,i\leqslant N\}$关于$\Delta t$一致有界[17].

用相似变换将A对角化，设A的$M-1$个相异的特征根为$\lambda_j(j=1,2,\cdots,M-1)$，则稳定性意味着

$$|\lambda_j^i|\leqslant D,i=N-1,N-2,\cdots,1\ (D\text{为定值}) \tag{11}$$

为证明式(11)，由Getschgorin圆盘定理可知：

$$\begin{aligned}|\lambda_j|\leqslant&|p_j|+\\&|2p_j+q_j+r\Delta t-1|+|-p_j-q_j|\leqslant\\&|p_j|+|2p_j+q_j-1|+|-p_j-q_j|+r\Delta t.\end{aligned}$$

当$2p_j+q_j-1\leqslant 0$且$-p_j-q_j\leqslant 0$时，

$$\begin{aligned}|\lambda_j|\leqslant&p_j-(2p_j+q_j-1)-\\&(-p_j-q_j)+r\Delta t=r\Delta t+1.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&|\lambda_j^i|\leqslant|(r\Delta t+1)^i|\leqslant\\&|(r\frac{T}{i}+1)|^i\leqslant e^{rT}\leqslant D\ (\Delta t\leqslant\frac{T}{i}).\end{aligned}$$

所以当$2p_j+q_j-1\leqslant 0$且$-p_j-q_j\leqslant 0$时格式稳定，即

$$\sigma^2 j^{2\alpha}(\Delta x)^{2\alpha-2}\Delta t+(r-q)j\Delta t\leqslant 1 \tag{12}$$

由此，我们有如下定理：

定理 3.2 当$\sigma^2 j^{2\alpha}(\Delta x)^{2\alpha-2}\Delta t+(r-q)j\Delta t\leqslant 1$

时，差分格式(9)-(10)式是稳定的.

3.3　收敛性

由 Lax 等价定理可知，在相容性满足的情况下稳定性和收敛性是等价的，所以该差分格式是收敛的.

定理 3.3　差分格式(9)-(10)式是收敛的，且该显示差分格式的解有收敛阶 $O(\Delta t+\Delta x)$.

证明　令$\varepsilon_j^i=V(t_i,S_j)-V_j^i$为整体截断误差. 作向量$U^i=(\varepsilon_1^i,\varepsilon_2^i,\cdots,\varepsilon_{M-1}^i)^T$. 则收敛性还可以表示为 $\|U^i\|\to 0(\Delta t\to 0)$.

$$\begin{aligned}V(t_i,S_j)=&p_jV(t_{i+1},S_{j-1})+\\&(2p_j+q_j+b)V(t_{i+1},S_j)+\\&(-p_j-q_j)V(t_{i+1},S_{j+1})+\\&L(V(t_{i+1},S_j),\Delta t,\Delta x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_j^i=&p_jV_{j-1}^{i+1}+(2p_j+q_j+b)V_j^{i+1}+\\&(-p_j-q_j)V_{j+1}^{i+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon_j^i=V(t_i,S_j)-V_j^i=\\&p_j\varepsilon_{j-1}^{i+1}+(2p_j+q_j+b)\varepsilon_j^{i+1}+\\&\quad(-p_j-q_j)\varepsilon_{j+1}^{i+1}+R(V(t_{i+1},S_j),\Delta t,\Delta x).\end{aligned}$$

我们设

$$U^i=\begin{bmatrix}\varepsilon_1^i\\\varepsilon_2^i\\\cdots\\\varepsilon_{M-2}^i\\\varepsilon_{M-1}^i\end{bmatrix},U^{i+1}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1^{i+1}\\\varepsilon_2^{i+1}\\\cdots\\\varepsilon_{M-2}^{i+1}\\\varepsilon_{M-1}^{i+1}\end{bmatrix},R^{i+1}=\begin{bmatrix}R_1^{i+1}\\R_2^{i+1}\\\cdots\\R_{M-2}^{i+1}\\R_{M-1}^{i+1}\end{bmatrix}.$$

则有$U^i=A\,U^{i+1}+\Delta t\,R^{i+1}$. 当满足稳定条件式(12)时，$\|A^i\|\leqslant K$($K$ 为常数). 由相容性可知

$$\begin{aligned}&R(V(t_{i+1},S_j),\Delta t,\Delta x)=R^{i+1}\leqslant\\&\quad C(\Delta t+\Delta x),C\text{ 为常数}.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}U^i=&A\,U^{i+1}+\Delta t\,R^{i+1}=\\&A(A\,U^{i+2}+\Delta t\,R^{i+2})+\Delta t\,R^{i+1}=\\&A^2U^{i+2}+\Delta tA(R^{i+1}+R^{i+2})=\cdots=\\&A^{N-i}\,U^N+\Delta t\sum_{j=i+1}^{N}A^{j-i-1}\,R^j=\\&\Delta t\sum_{j=i+1}^{N}A^{j-i-1}\,R^j,\end{aligned}$$

其中U^N为初始误差，$\|U^N\|=0$，

$$\begin{aligned}\|U^i\|\leqslant&\Delta t\sum_{j=i+1}^{N}\|A^{j-i-1}\|\,\|R^j\|\leqslant\\&\Delta tK\sum_{j=i+1}^{N}\|R^j\|\leqslant\\&K\Delta t(N-i)C(\Delta t+\Delta x)\leqslant\\&KTC(\Delta t+\Delta x).\end{aligned}$$

由此可得该差分方程是收敛的，收敛阶为 $O(\Delta t+\Delta x)$.

4　数值实验

考虑一个支付红利的美式看跌期权，其中股票初始价格 $S_0=60$ 元，执行价格 $K=60$ 元，期权有效期 $T=0.5$ 年，无风险利率 $r=12\%$，红利率 $q=2\%$，波动率 $\sigma=0.35$，弹性因子 $\alpha=0.7$. 假设股票价格最高 $S_{\max}=100$，M 表示空间剖分数，N 表示时间剖分数，在满足式(12)的前提下. 表 1 给出美式看跌期权的数值解，计算结果再次表明本文算法是收敛且有效的.

表 1　美式看跌期权定价

Tab. 1　Pricing of American put-options

M/N	200	250	300	350	400
100	0.8820	0.8818	0.8815	0.8814	0.8812
150	0.8958	0.8956	0.8954	0.8953	0.8951
200	0.8996	0.8995	0.8993	0.8992	0.8990

参考文献：

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporateliabilities [J]. J Polit Econ, 1973, 81: 637.

[2] Gaudenzi M, Pressacco F. An efficient binomial method for pricing American put option [J]. Decisions Econ Finan, 2003, 26: 1.

[3] Liu Q, Guo S X. Variance-constrained canonical least-squares Monte Carlo: an accurate method for pricing American options [J]. North American J Econ Finan, 2014, 28: 77.

[4] 葛东娇，文丹丹，戴朝娟，等. 基于 Copula GARCH MMBP 的 Monte Carlo 期权定价方法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2015，52：944.

[5] Fadugba S E, Nwozo C R. Crank Nicolson finite difference method for the valuation of option [J]. Pacific J Sci Tech, 2013, 14: 136.

[6] Zhang R, Zhang Q, Song H M. An efficient finite element method for pricing American multi-asset put options [J]. Commun Nonlinear Sci, 2015, 29: 25.

[7] 甘小艇，殷俊峰. 二次有限体积法定价美式期权[J]. 计算数学，2015，37：67.

[8] Cox J. C, Ross S. A. The valuation of options for alternative stochastic processes [J]. J Finan Econ, 1976, 3: 145.

[9] 何光，龙宪军. 基于粒子群优化算法的期权波动率估计[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：925.

[10] 杨垚，胡兵. 支付红利的美式看涨期权定价的数值方法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2008，48：757.

[11] 吴蓓蓓，殷俊锋，金猛. Black-Scholes 模型的三次

三角B-样条配点法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：1153.
[12] 成佩，严定琪，张瑜. 含时间参数离散障碍期权偏微分布朗模型的Romberg求解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：941.
[13] Badea L，Wang J. A new formulation for the valuation of American options，I：solutions uniqueness [J]. Anal Sci Comput：Proc Daewoo Workshop Anal Sci Comput，1999：3.
[14] Badea L，Wang J. A new formulation for the valuation of American options，II：solution existence [J]. Anal Sci Comput：Proc Daewoo Workshop Anal Sci Comput，1999：17.
[15] Ballestra L V，Cecere L. Pricing American options under the constantela sticity of variance model：an extension of themethod by Barone-Adesi and Whaley [J]. Finan Res Lett，2015，14：45.
[16] 王智宇，李景诗，朱本喜，等. 求解CEV模型下美式看跌期权的有限差分法[J]. 吉林大学学报：理学版，2014，52：489.
[17] 李荣华，刘波. 微分方程数值解法[M]. 北京：高等教育出版社，2009.

引用本文格式：
中 文：郭宗怀，胡兵，徐友才. CEV模型下支付红利的美式看跌期权的差分法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：1162.
英 文：Guo Z H，Hu B，Xu Y C. Differential algorithms for American put-options of CEV on dividend-paying stock [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2018，55：1162.