2019 年 5 月　　四川大学学报(自然科学版)　　May 2019
第 56 卷　第 3 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 56　No. 3

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2019.03.003

# 允许 Green 函数取零值情形下的 Neumann 问题的正解

赵中姿
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

**摘　要**：本文研究了一类二阶非线性常微分方程 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} y''+a(t)y=\lambda g(t)f(y), t\in[0,1], \\ y'(0)=y'(1)=0, \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $\lambda$ 是一个正参数，$f$ 在$\infty$处是超线性的且 $f$ 允许变号. 此外与这一问题相关的 Green 函数可以在某些点等于 0. 主要结果的证明基于 Krasnosel'skii 不动点定理.

**关键词**：Neumann 问题；正解；Krasnosel'skii 不动点定理；Green 函数
**中图分类号**：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)03-0392-07

# Positive solutions of Neumann problem with Green's function vanishing at some points

*ZHAO Zhong-Zi*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract**: In this paper, we study the existence of positive solutions for a class of second-order nonlinear Neumann problem

$$\begin{cases} y''+a(t)y=\lambda g(t)f(y), t\in[0,1], \\ y'(0)=y'(1)=0, \end{cases}$$

where $\lambda$ is a positive parameter, $f$ is superlinear at infinity, allowed to change sign, and the Green's function associated with this problem may vanish at some points. The proof of the main results is based on the Krasnosel'skii fixed-point theorem.

**Keywords**: Neumann problem; Positive solution; Krasnosel'skii fixed-point theorem; Green's function
(2010 MSC 26A33)

## 1　引　言

Neumann 问题在众多领域内有重要的研究意义. 对于非线性 Neumann 边值问题正解的存在性，已有许多结论[1-9]. 2000 年，Jiang 和 Liu[1] 运用锥拉伸与压缩不动点定理在 $m\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的情形下研究了二阶 Neumann 问题

$$\begin{cases} u''+m^2u=f(t,u), t\in[0,1], \\ u'(0)=u'(1)=0, \end{cases}$$

并基于 Green 函数

$$G(t,s)=\begin{cases} \frac{1}{m\sin m}\cos m(1-t)\cos ms, 0\le s\le t\le 1, \\ \frac{1}{m\sin m}\cos m(1-s)\cos mt, 0\le t\le s\le 1. \end{cases}$$

得到了正解的存在性，其中 $f\in C([0,1]\times[0,\infty)$,

**收稿日期**：2018-05-18
**基金项目**：国家自然科学基金(11671322)
**作者简介**：赵中姿(1994－)，女，山西太原人. 主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail: 15193193403@163.com

$[0,\infty))$. 2004 年，Sun 和 Li[2]在 $m\in(0,\frac{\pi}{2})$ 的情形下获得了二阶 Neumann 问题

$$\begin{cases}u''+m^2u=f(t,u),t\in[0,1],\\u'(0)=u'(1)=0\end{cases}$$

至少存在三个非负解的结果，其中 $f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$，且存在 $0<d<a$ 使得

$$\frac{a}{\min\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s}<f(t,u)<\frac{d}{\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s}.$$

当 $m\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，Green 函数为正，当 $m=\frac{\pi}{2}$ 时，$G(0,0)=G(1,1)=0$. 此时，文献[1,2]的方法失效，且 $f$ 允许变号的情况尚未被研究. 本文考虑更一般的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}y''+a(t)y=\lambda g(t)f(y),t\in[0,1],\\y'(0)=y'(1)=0\end{cases}\tag{1}$$

正解的存在性，这里的 $a(t)$ 可以等于 $\frac{\pi^2}{4}$ 且 $f$ 允许改变符号.

本文总假定：

(A1) $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 连续；

(A2) $a:[0,1]\to[0,\infty)$ 连续，对于任意的 $t\in[0,1]$，$a(t)\leq\frac{\pi^2}{4}$ 且 $a(t)\not\equiv0$；

(A3) $g\in L^1(0,1)$，$g\geq0$ 且在 $(0,1)$ 的任意子区间内，$g\not\equiv0$.

本文的主要结果如下.

**定理 1.1**　假设(A1)～(A3)成立. 记 $f_0=\lim\limits_{s\to0}\frac{f(s)}{s}$，$f_\infty=\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{f(s)}{s}$. 则

(i) 若 $f_0=0$，$f_\infty=\infty$ 且 $f\geq0$，则对于任意的 $\lambda>0$，问题(1)存在一个正解；

(ii) 若 $f_\infty=\infty$，则存在一个常数 $\lambda^*>0$ 使得当 $\lambda<\lambda^*$ 时问题(1)存在一个正解 $y_\lambda$，且当 $\lambda\to0^+$ 时有 $\|y_\lambda\|_\infty\to\infty$.

注 1　当 $f$ 为正、$a(t)$ 取常数 $M$ 且 $M\in(0,\frac{\pi^2}{4})$ 时，问题(1)就是文献[1,2]所研究的问题. 因文献[1,2]只在 Green 函数为正的情形下得到了正解的存在性，而本文的 Green 函数在某些点可以等于 0 且 $f$ 允许变号，因此本文推广了文献[1,2]的结论.

## 2　预备知识

设 $AC^1[0,1]=\{u\in C^1[0,1]:u'$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续$\}$. 我们所用的工具是 Banach 空间上的 Krasnosel'skii 不动点定理(文献[10，定理 12.3]).

**引理 2.1**[10]　设 $X$ 为 Banach 空间，$T:X\to X$ 是一个紧算子. 假设存在 $h\in X$，$h\neq0$ 和两个正常数 $r,R(r\neq R)$ 使得

(i) 若 $y\in X$ 满足 $y=\theta Ty$，$\theta\in(0,1]$，则 $\|y\|\neq r$；

(ii) 若 $y\in X$ 满足 $y=Ty+\zeta h$，$\zeta\geq0$，则 $\|y\|\neq R$，

则 $T$ 有一个不动点 $y\in X$ 且 $\min\{r,R\}<\|y\|<\max\{r,R\}$.

**引理 2.2**　设 $G(t,s)$ 是二阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}y''+m^2y=0,t\in[0,1],\\y'(0)=y'(1)=0\end{cases}\tag{2}$$

的 Green 函数，其中 $m$ 是一个正常数且 $m\neq\pi,2\pi,\ldots$，则当 $m\leq\frac{\pi}{2}$ 时 $G(t,s)\geq0$，当 $m<\frac{\pi}{2}$ 时 $G(t,s)>0$.

证明　当 $m$ 是一个正常数且 $m\neq\pi,2\pi,\ldots$ 时，问题(2)的 Green 函数为

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{m\sin m}\cos m(1-t)\cos ms,0\leq s\leq t\leq1,\\\dfrac{1}{m\sin m}\cos m(1-s)\cos mt,0\leq t\leq s\leq1.\end{cases}$$

在 $t\geq s$ 的情况下，当 $m<\frac{\pi}{2}$ 时显然有 $G(t,s)>0$.

当 $m=\frac{\pi}{2}$ 时，

$$G(t,s)-G(s,s)=\frac{\cos ms[\cos m(1-t)-\cos m(1-s)]}{m\sin m}.$$

显然有 $G(t,s)-G(s,s)\geq0$. 此时

$$G(s,s)=\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-s)\cos\frac{\pi}{2}s}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}(\cos\frac{\pi}{2}s)^2+\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}s\cos\frac{\pi}{2}s}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\pi s}{\pi}\geq0.$$

可以证明，$t\leq s$ 的情况下有同样的结果. 因此当 $m\leq\frac{\pi}{2}$ 时 $G(t,s)\geq0$，当 $m<\frac{\pi}{2}$ 时 $G(t,s)>0$.

证毕.

**引理 2.3** 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R},\alpha<\beta,y\in AC^1[\alpha,\beta]$是

$$y''(t)+\frac{\pi^2}{4}y(t)\geq 0,t\in(\alpha,\beta) \tag{3}$$

的一个非负解. 假设下列条件之一成立

(i) $y'(\alpha)=y(\beta)=0$ 或 $y(\alpha)=y'(\beta)=0,\beta-\alpha<1$;

(ii) $y(\alpha)=y(\beta)=0,\beta-\alpha<2$;

(iii) $y(\alpha)=y(\beta)=0,y'(\alpha)=y'(\beta),\beta-\alpha=2$,

则当 $t\in[\alpha,\beta]$时有 $y(t)\equiv 0$.

证明 (i) $y'(\alpha)=y(\beta)=0,\beta-\alpha<1$. 在(3)式两端乘以 $\sin(\frac{\pi(\beta-t)}{2(\beta-\alpha)})$再在 $\alpha$ 到 $\beta$ 上积分有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_\alpha^\beta\sin(\frac{\pi(\beta-t)}{2(\beta-\alpha)})y''(t)\mathrm{d}t+\frac{\pi^2}{4}\int_\alpha^\beta\sin\left(\frac{\pi(\beta-t)}{2(\beta-\alpha)}\right)y(t)\mathrm{d}t=\\&\frac{\pi}{2(\beta-\alpha)}\int_\alpha^\beta\cos(\frac{\pi(\beta-t)}{2(\beta-\alpha)})\mathrm{d}y(t)+\frac{\pi^2}{4}\int_\alpha^\beta\sin(\frac{\pi(\beta-t)}{2(\beta-\alpha)})y(t)\mathrm{d}t=\\&(\frac{\pi^2}{4}-(\frac{\pi}{2(\beta-\alpha)})^2)\int_\alpha^\beta\sin(\frac{\pi(\beta-t)}{2(\beta-\alpha)})y(t)\mathrm{d}t\geq 0.\end{aligned}$$

又由 $\beta-\alpha<1$ 有$(\frac{\pi^2}{4}-(\frac{\pi}{2(\beta-\alpha)})^2)<0$,因而原式≤0. 因此,原式≡0,即 $y(t)\equiv 0,t\in[\alpha,\beta]$. 同理,要证 $y(\alpha)=y'(\beta)=0,\beta-\alpha<1$,只需令$\tilde{y}(t)=y(\beta+\alpha-t)$. 显然$\tilde{y}(t)$满足第一种情形. 因此(i)得证.

(ii) $y(\alpha)=y(\beta)=0,\beta-\alpha<2$. 在(3)式的两端乘以 $\sin(\frac{\pi(\beta-t)}{\beta-\alpha})$再在 $\alpha$ 到 $\beta$ 上积分,同样可得

$$0\geq(\frac{\pi^2}{4}-(\frac{\pi}{\beta-\alpha})^2)\int_\alpha^\beta\sin(\frac{\pi(\beta-t)}{\beta-\alpha})y(t)\mathrm{d}t\geq 0.$$

因此当 $t\in[\alpha,\beta]$时 $y(t)\equiv 0$. (ii)得证.

(iii) $y(\alpha)=y(\beta)=0,y'(\alpha)=y'(\beta),\beta-\alpha=2$. 设 $\tau\in[\alpha,\beta]$, 令 $h(t)=y''(t)+\frac{\pi^2}{4}y(t)$. $\sin(\frac{\pi(\tau-t)}{2})$乘以 $h(t)$,再在$[\alpha,\tau]$上积分

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\tau\sin(\frac{\pi(\tau-t)}{2})h(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\tau y''(t)\sin(\frac{(\tau-t)\pi}{2})\mathrm{d}t+\frac{\pi^2}{4}\int_\alpha^\tau y(t)\sin(\frac{(\tau-t)\pi}{2})\mathrm{d}t=\\&-y'(\alpha)\sin(\frac{(\tau-\alpha)\pi}{2})+\frac{\pi}{2}y(t)\cos(\frac{(\tau-t)\pi}{2})\Big|_\alpha^\tau-\frac{\pi^2}{4}\int_\alpha^\tau(y(t)\sin(\frac{(\tau-t)\pi}{2})\mathrm{d}t-y(t)\sin(\frac{(\tau-t)\pi}{2})\mathrm{d}t=\\&\frac{\pi}{2}y(\tau)-y'(\alpha)\sin(\frac{\pi(\tau-\alpha)}{2}).\end{aligned}$$

$\sin(\frac{\pi(t-\tau)}{2})$乘以 $h(t)$再在$[\tau,\beta]$上积分,同样可得

$$\int_\tau^\beta\sin(\frac{\pi(t-\tau)}{2})h(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}y(\tau)+y'(\beta)\sin(\frac{\pi(\beta-\tau)}{2}).$$

将以上两式相加得到

$$\pi y(\tau)=\int_\alpha^\tau\sin(\frac{\pi(\tau-t)}{2})h(t)\mathrm{d}t+y'(\alpha)\sin(\frac{\pi(\tau-\alpha)}{2})+\int_\tau^\beta\sin(\frac{\pi(t-\tau)}{2})h(t)\mathrm{d}t-y'(\beta)\sin(\frac{\pi(\beta-\tau)}{2}).$$

因为 $y'(\alpha)=y'(\beta)$且 $\beta=\alpha+2$,所以

$$\pi y(\tau)=\int_\alpha^\tau\sin(\frac{\pi(\tau-t)}{2})h(t)\mathrm{d}t+\int_\tau^\beta\sin(\frac{\pi(t-\tau)}{2})h(t)\mathrm{d}t.$$

又

$$y(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\sin(\frac{\pi(t-\alpha)}{2})h(t)\mathrm{d}t=0,$$

$$\sin(\frac{\pi(t-\alpha)}{2})h(t)\geq 0,t\in(\alpha,\beta),$$

从而可得 $\sin(\frac{\pi(t-\alpha)}{2})h(t)$几乎处处等于 0. 因此 $h(t)\equiv 0$,即当 $t\in[\alpha,\beta]$时 $y(t)\equiv 0$. 证毕.

**推论 2.4** 设 $y\in C^1[0,1]$满足

$$\begin{cases}y''+a(t)y\geq 0,t\in[0,1],\\y'(0)=y'(1)=0\end{cases} \tag{4}$$

则当 $t\in[0,1]$时 $y(t)>0$，或当 $t\in[0,1]$时 $y(t)\equiv 0$. 特别地，若 $y_i(i=1,2)$满足

$$\begin{cases} y_1''+a(t)y_1\ge k(y_2''+a(t)y_2),t\in[0,1], \\ y_1'(0)=y_1'(1)=y_2'(0)=y_2'(1)=0 \end{cases}$$

对于任意的 $t\in[0,1]$，有 $y_1\ge ky_2$，这里 $k$ 是一个常数.

证明　假设存在一点 $\tau\in[0,1]$，使得 $y(\tau)>0$. 则对于任意 $t\in[0,1]$有 $y(t)>0$. 反设在这种情况下存在一点 $\tau_0\in[0,1]$，使得 $y(\tau_0)\le 0$. 则一定存在一个区间$(\alpha,\beta)$包含 $\tau$，且当 $t\in(\alpha,\beta)$时 $y(t)>0$. 从而 $y(\alpha)=y(\beta)=0,\beta-\alpha<1$ 或 $y(\alpha)=y'(\beta)=y'(1)=0,\beta-\alpha<1$. 由引理 2.3，均可得出 $y(t)\equiv 0$. 这与 $y(\tau)>0$ 矛盾. 因此，存在一点 $\tau\in[0,1]$使得 $y(\tau)>0$. 则对于任意 $t\in[0,1]$，有 $y(t)>0$.

另一方面，若当 $t\in[0,1]$时有 $y(t)\le 0$，则有 $y''(t)\ge 0$. 设 $y(\tau_1)=\max\limits_{0\le t\le 1}y(t)$. 则 $y'(\tau_1)=0$. 从而对于任意 $t\in[0,1]$，$y(t)=y(\tau)$，即 $y''\equiv 0$. 再由(4)式可得，对于任意 $t\in[0,1]$有 $y(t)\ge 0$. 因此，当 $t\in[0,1]$时，$y(t)\equiv 0$.

第二部分的证明只需令 $y=y_1-ky_2$，再用第一部分即可证得. 证毕.

为方便证明以下引理，我们将区间$[0,1]$分割为$I_1=[\frac{1}{4},\frac{3}{8}]$，$I_2=[\frac{1}{2},\frac{5}{8}]$，$I_3=[\frac{3}{4},\frac{7}{8}]$，$I_4=[\frac{5}{8},\frac{3}{4}]$，$J_1=[0,\frac{1}{4}]$，$J_2=[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$，$J_3=[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$，$J_4=[\frac{3}{4},1]$.

**引理 2.5**　存在一个正常数 $m$ 使得对问题(4)的所有解 $y\in AC^1[0,1]$满足 $y(t)\ge m\|y\|,t\in I_i$，$i\in\{1,2,3,4\}$.

证明　设 $y\in AC^1[0,1]$是问题(4)的解. 由推论 2.4 可得，$y(t)\ge 0,t\in[0,1]$. 设 $\|y\|=y(\tau),\tau\in[0,1]$. 则 $y'(\tau)=0$. 再设$z_\tau$ 满足

$$\begin{cases} z_\tau''+a(t)z_\tau=0,t\in[0,1], \\ z_\tau(\tau)=1,z_\tau'(\tau)=0 \end{cases}\tag{5}$$

由线性微分方程基本原理知，问题(5)的解 $z_\tau\in C^2[0,1]$是唯一的. 下面验证对于固定的 $\tau\in[0,1]$，$z_\tau\in C^2[0,1]$是有界的. 线性微分方程(5)的等价积分形式为

$$0=\int_\tau^t z_\tau''\mathrm{d}s+\int_\tau^t a(s)\,z_\tau(s)\mathrm{d}s=$$

$$z_\tau'(t)-z_\tau'(\tau)+\int_\tau^t a(s)\,z_\tau(s)\mathrm{d}s$$

$$\int_\tau^t z_\tau'(s)\mathrm{d}s=$$

$$-\int_\tau^t\int_\tau^s a(k)\,z_\tau(k)\mathrm{d}k\mathrm{d}s=$$

$$-\int_\tau^t(t-s)a(s)\,z_\tau(s)\mathrm{d}s,$$

$$z_\tau(t)=$$

$$1-\int_\tau^t(t-s)a(s)\,z_\tau(s)\mathrm{d}s,t\in[0,1].$$

再由(A2)及 $0\le t-s\le 1$ 可得

$$|z_\tau(t)|=\left|1-\int_\tau^t(t-s)a(s)\,z_\tau(s)\mathrm{d}s\right|\le$$

$$1+\left|\int_\tau^t(t-s)a(s)\,z_\tau(s)\mathrm{d}s\right|\le$$

$$1+\frac{\pi^2}{4}\int_\tau^t|z_\tau(s)|\mathrm{d}s,$$

由 Gronwall 不等式得到

$$|z_\tau(t)|\le e^{\pi^2|t-\tau|/4}\le \mathrm{e}^{\pi^2/4},t\in[0,1].$$

下证存在一个常数 $m>0$，使得 $z_\tau(t)\ge m,\forall\tau\in J_i,t\in I_i,i=\{1,2,3,4\}$.

反设存在 $i=\{1,2,3,4\}$和序列$\{\tau_n\}\subset J_i$，$\{t_n\}\subset I_i$，$\{z_n\}\subset C^2[0,1]$使得$z_n(t_n)\le\frac{1}{n}$对所有 $n$ 成立，且

$$\begin{cases} z_n''+a(t)z_n=0,t\in[0,1], \\ z_n(\tau_n)=1,z_n'(\tau_n)=0. \end{cases}$$

由上证可知，$\{z_n\}$在 $C^2[0,1]$上有界且$\{\tau_n\}$，$\{t_n\}$在 $J_i$，$I_i$ 上有界. 不妨假设，存在$\tau_i\in J_i$，$t_i\in I_i$，$z\in C^1[0,1]$使得$\tau_n\to\tau_i$，$t_n\to t_i$，$z_n\to z$. 注意到$t_n\ge\tau_n$，$i<4$，$n\in\mathbf{N}$，所以$t_i\ge\tau_i$，$i<4$. 又因为

$$z_n(t)=1-\int_{\tau_n}^t(t-s)a(s)z_n(s)\mathrm{d}s,$$

当 $n\to\infty$时可得

$$z(t)=1-\int_{\tau_i}^t(t-s)a(s)z(s)\mathrm{d}s.$$

则 $z$ 满足

$$\begin{cases} z''+a(t)z=0,t\in[0,1], \\ z(\tau_i)=1,z'(\tau_i)=0. \end{cases}$$

因为

$$z(t_i)=\lim_{n\to\infty}z_n(t_n)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以对于 $i<4$，$t_i>\tau_i$（$z(\tau_i)=1\ne z(t_i)\le 0\Rightarrow t_i\ne\tau_i$）. 则存在$\tilde{t}_i\in(\tau_i,t_i]$使得当 $t\in(\tau_i,\tilde{t}_i)$时，$z(t)>0$ 且 $z(\tilde{t}_i)=0$. 又因为，$\tilde{t}_i-\tau_i\le\frac{3}{8}$，$z$ 在$(\tau_i,\tilde{t}_i]$上非负，且 $0=z''+a(t)z\le z''+\frac{\pi^2}{4}z$，$z'(\tau_i)=z(\tilde{t}_i)=0$，由引理 2.3 可知 $z(t)\equiv 0,t\in(\tau_i,\tilde{t}_i]$. 这与 $z(t)>0,t\in(\tau_i,\tilde{t}_i]$矛盾.

另一方面,当 $i=4,t_4<\tau_4$ 时,存在 $\tilde{t}_4\in[t_4,\tau_4)$ 使得 $z(t)>0,t\in(\tilde{t}_4,\tau_4)$ 且 $z(\tilde{t}_4)=0$. 同样由引理2.3可以证得矛盾.

设 $u=y-\|y\|z_\tau$. 可以验证 $u$ 满足

$$\begin{cases}u''+a(t)u\geq 0,t\in[0,1],\\ u(\tau)=0,u'(\tau)=0.\end{cases}$$

下证 $u(t)\geq 0,t\in[0,1]$. 反设存在一点 $\tilde{\tau}\in[0,1]$ 使得 $u(\tilde{\tau})<0$. 不妨设 $\tilde{\tau}<\tau$. 则存在 $\tilde{\tau}_0\in(\tilde{\tau},\tau]$, 使得 $u(t)<0,t\in(\tilde{\tau},\tilde{\tau}_0)$ 且 $u(\tilde{\tau}_0)=0$. 因此,

$$u''\geq -a(t)u\geq 0,t\in(\tilde{\tau},\tilde{\tau}_0).$$

当 $u'(\tilde{\tau}_0)\leq 0$ 时,上式意味着 $u'(t)\leq 0,t\in(\tilde{\tau},\tilde{\tau}_0)$, 则 $u(t)\geq u(\tilde{\tau}_0)=0,t\in(\tilde{\tau},\tilde{\tau}_0)$. 矛盾. 当 $u'(\tilde{\tau}_0)>0$ 时,存在 $\tilde{\tau}_1\in(\tilde{\tau}_0,\tau)$ 使得 $u(t)>0,t\in(\tilde{\tau}_0,\tilde{\tau}_1)$ 且 $u(\tilde{\tau}_1)=0$. 则有 $u(\tilde{\tau}_1)=u(\tilde{\tau}_0)=0,\tilde{\tau}_1-\tilde{\tau}_0<2$. 由引理2.3知, $u(t)\equiv 0,t\in(\tilde{\tau}_0,\tilde{\tau}_1)$. 矛盾. $\tilde{\tau}>\tau$ 的情况同样可以证得矛盾.

由上述两步证明可知,存在 $i\in\{1,2,3,4\}$ 使得 $y(t)\geq\|y\|z_\tau(t)\geq m\|y\|,t\in I_i$, 引理得证.

假设存在 $z\in AC^1[0,1]$ 满足

$$\begin{cases}z''+a(t)z=g(t),t\in[0,1],\\ z'(0)=z'(1)=0,\end{cases}$$

其中 $g(t)\not\equiv 0,t\in[0,1]$. 由推论2.4,当 $t\in[0,1]$ 时, $z(t)>0$.

**推论2.6** 设 $k$ 是一个正常数, $y\in AC^1[0,1]$ 满足

$$\begin{cases}y''+a(t)y\geq -\lambda kg(t),t\in[0,1],\\ y'(0)=y'(1)=0.\end{cases}$$

则有如下两个结果:

(i) $y\geq -\lambda kz,t\in[0,1]$;

(ii) 假设 $\|y\|\geq 2\lambda k\|z\|(m+1)m^{-1}$, 则 $y(t)\geq m_0\|y\|,t\in I_i,i\in\{1,2,3,4\},m_0=\dfrac{m}{2}$.

证明 设 $u=y+\lambda kz$. 则

$$u''+a(t)u=y''+\lambda kz''+a(t)y+a(t)\lambda kz\geq -\lambda kg(t)+\lambda kg(t)=0,t\in[0,1].$$

由推论2.4可得 $u(t)\geq 0,t\in[0,1]$, 即 $y\geq -\lambda kz,t\in[0,1]$, (i)得证.

由引理2.5, $u(t)=y(t)+\lambda kz(t)\geq m\|u\|=m\|y+\lambda kz\|,t\in I_i,i\in\{1,2,3,4\}$.

则

$$y(t)\geq m\|y\|-m\lambda k\|z\|-\lambda kz(t)\geq m\|y\|-(m+1)\lambda k\|z\|.$$

当 $\|y\|\geq 2\lambda k\|z\|(m+1)m^{-1}$ 时,有

$$y(t)\geq\|y\|m-\lambda k\|z\|(m+1)\geq \|y\|m-\frac{m}{2}\|y\|=\frac{m}{2}\|y\|=m_0\|y\|.$$

推论得证.

## 3 主要结果的证明

设 $X=C[0,1]$. 其在范数 $\|u\|=\sup_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 下构成一个Banach空间. 对于 $u\in\mathbf{X}$, 定义

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)f(|u(s)|)\mathrm{d}s,t\in[0,1],$$

这里的 $G(t,s)$ 是 $y''+a(t)y$ 在Neumann边界条件下的Green函数. 则 $y=Tu\in AC^1[0,1]$ 满足

$$\begin{cases}y''+a(t)y=\lambda g(t)f(|u|),t\in[0,1],\\ y'(0)=y'(1)=0.\end{cases}$$

可以看到, $T:X\to X$ 连续且 $T$ 将 $X$ 中的有界集映成 $C^1[0,1]$ 中的有界集. 所以 $T$ 是一个全连续算子. 记如下符号

$$f^{0,z}=\sup_{0\leq t\leq z}|f(t)|,f_{z,\infty}=\inf_{0\leq z\leq t}f(t).$$

显然, $f^{0,z}$ 和 $f_{z,\infty}$ 在 $[0,\infty)$ 上是非减的.

定理1.1的证明 (i) 由于 $\lambda g(t)f(|u|)\geq 0$ 满足推论2.4,故 $Tu\geq 0,\forall t\in[0,1]$. 设 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{\lambda\|z\|}$, $z$ 满足

$$\begin{cases}z''+a(t)z=g(t),t\in[0,1],\\ z'(0)=z'(1)=0\end{cases}\tag{6}$$

由 $f_0=0,f_\infty=\infty$ 可知, $\exists r>0$ 使得 $f(z)<\varepsilon z,z\in(0,r]$. 下面验证 $h\equiv 1$ 满足引理2.1的条件.

(i) 反设 $\|y\|=r$ 则 $f(|y|)<\varepsilon|y|,|y|\in(0,r]$, 从而可得

$$y''+a(t)y=\theta Ty''+\theta a(t)Ty=\theta\lambda g(t)f(|y|)<\theta\lambda g(t)\varepsilon|y|\leq\varepsilon\lambda g(t)\|y\|.$$

又由(6)式可得

$$y''+a(t)y\leq\varepsilon\lambda g(t)\|y\|=(\varepsilon\lambda\|y\|)(z''+a(t)z).$$

再由推论2.4知 $y\leq(\varepsilon\lambda\|y\|)z,t\in[0,1]$. 为使得上式对所有的 $t\in[0,1]$ 恒成立,必有 $\varepsilon\lambda z\geq 1$. 这与 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{\lambda\|z\|}$ 矛盾. 因此 $\|y\|\neq r$.

(ii) 根据 $y=Ty+\zeta$ 有

$$y''+a(t)y=Ty''+a(t)Ty+a(t)\zeta=a(t)\zeta+\lambda g(t)f(|y|).$$

设 $M$ 是一个常数,使得 $\lambda Mmc>\dfrac{\pi^2}{4}$, 其中 $c=$

$\min\limits_{1\le i\le 4}\int_{I_i} g(t)\mathrm{d}t$，$m$ 由引理 2.5 给出. 因 $f_\infty=\infty$，所以存在一个常数 $A$ 使得 $f(z)>Mz, z\ge A$. 则有 $\|y\|<R, R>\frac{A}{m}$. 否则，假设 $\|y\|\ge R>\frac{A}{m}$. 则由引理 2.5 可知，存在 $i\in\{1,2,3,4\}$使得

$$y(t)\ge m\|y\|\ge mR>A.$$

则对于 $t\in I_i, i\in\{1,2,3,4\}$，有 $f(y(t))>My(t)\ge Mm\|y\|$，即

$$y''+a(t)y\ge\lambda Mm\|y\|g(t), t\in I_i$$

和

$$y''+a(t)y\ge 0, t\notin I_i.$$

将 $y''+a(t)y$ 在$[0,1]$上积分可得

$$\int_0^1 y''\mathrm{d}t+\int_0^1 a(s)y(s)\mathrm{d}s\ge \int_{I_i}\lambda Mm\|y\|g(s)\mathrm{d}s+0$$

$$\int_0^1 a(s)y(s)\mathrm{d}s\ge \lambda Mm\|y\|\int_{I_i}g(s)\mathrm{d}s$$

$$\int_0^1 a(s)y(s)\mathrm{d}s\ge\lambda Mm\|y\|c.$$

因 $a(s)\le\frac{\pi^2}{4}$及 $y(s)\le\|y\|$，则有

$$\int_0^1 a(s)y(s)\mathrm{d}s\le\frac{\pi^2}{4}\|y\|.$$

所以 $\lambda Mmc\le\frac{\pi^2}{4}$. 这与 $\lambda Mmc>\frac{\pi^2}{4}$矛盾. 因此 $\|y\|<R, R>\frac{A}{m}$. 得证. 由引理 2.1，$T$ 有一个不动点 $y$，$r\le\|y\|<R$ 且 $y(t)>0, t\in[0,1]$.

(ii) 设 $k>0$ 使得 $f(z)\ge -k, z\ge 0$. 存在$z_i, \tilde{z}_i\in AC^1[0,1]$分别在边界条件$z_i'(0)=z_i'(1)=0$，$\tilde{z}_i'(0)=\tilde{z}_i'(1)=0$ 下满足

$$z_i''+a(t)z_i=\begin{cases}g(t), t\in I_i,\\ 0, t\notin I_i,\end{cases}$$

$$\tilde{z}_i''+a(t)\tilde{z}_i=\begin{cases}0, t\in I_i,\\ kg(t), t\notin I_i.\end{cases}$$

任意 $i\in\{1,2,3,4\}$，有$z_i(t)>0, t\in[0,1]$. 选取 $r>0$，使得

$$f_{m_0\cdot r,\infty}\cdot\min_{1\le i\le 4, t\in[0,1]}z_i(t)>\max_{1\le i\le 4}\|\tilde{z}_i\|,$$

$m_0$ 由推论 2.6 给出. 设 $\lambda>0$，使得

$$\lambda\max\{f^{0,r}\|z\|, 2k\|z\|(m+1)m^{-1}\}<r.$$

下面验证引理 2.1 的条件.

(i) 反设 $\|y\|=r$，则有

$$y''+a(t)y=\theta\lambda g(t)f(|y|)\le \theta\lambda g(t)\sup_{0<t<r}|f(t)|\le\lambda g(t)f^{0,r}.$$

又

$$y''+a(t)y\ge-\lambda g(t)f^{0,r},$$

则可得

$$|y''+a(t)y|\le\lambda g(t)f^{0,r}=\lambda f^{0,r}(z''+a(t)z).$$

由推论 2.4 可得，$|y(t)|\le\lambda f^{0,r}z(t)$. 因此 $r=\|y\|\le\lambda f^{0,r}\|z\|$. 矛盾. 因此 $\|y\|\ne r$ 得证.

(ii) 设 $y\in X$ 满足 $y=Ty+\zeta, \zeta>0$. 由

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f_{z,\infty}}{z}=\lim_{z\to\infty}\frac{\inf\limits_{z\le t}f(t)}{z}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\infty,$$

存在一个常数$R_\lambda>r$，使得

$$\lambda(f_{m_0R_\lambda,\infty}\min_{1\le i\le 4, t\in[0,1]}z_i(t)-\max_{1\le i\le 4}\|\tilde{z}_i\|)>R_\lambda.$$

反设 $\|y\|=R_\lambda$. 因

$$2k\lambda\|z\|(m+1)m^{-1}<r<R_\lambda=\|y\|,$$

且

$$y''+a(t)y=a(t)\zeta+\lambda g(t)f(|y|)\ge \lambda g(t)f(|y|)\ge-\lambda kg(t)$$

满足推论 2.6，则有 $y(t)\ge-k\lambda z, t\in[0,1]$且 $y(t)\ge m_0\|y\|, t\in I_i, i\in\{1,2,3,4\}$. 因此可得

$$y''+a(t)y\ge\lambda g(t)f(|y|)\ge\lambda g(t)f_{|y|,\infty},$$

即

$$y''+a(t)y\ge\begin{cases}\lambda(f_{m_0\|y\|,\infty}\cdot g(t)-0), t\in I_i,\\ \lambda(f_{m_0\|y\|,\infty}\cdot 0-kg(t)), t\notin I_i.\end{cases}$$

由推论 2.4 可得，$y(t)\ge\lambda(f_{m_0\|y\|,\infty}\cdot z_i-\tilde{z}_i), t\in[0,1]$. 所以

$$R_\lambda=\|y\|\ge\lambda(f_{m_0\|y\|,\infty}\cdot\min_{1\le i\le 4, t\in[0,1]}z_i(t)-\max_{1\le i\le 4}\|\tilde{z}_i\|).$$

矛盾. 因此 $\|y\|\ne R_\lambda$. 由引理 2.1，$T$ 有一个不动点$y_\lambda\in X, r\le\|y_\lambda\|\le R$ 且有

$$y_\lambda\ge\lambda(f_{m_0r,\infty}\min_{1\le i\le 4, t\in[0,1]}z_i-\max_{1\le i\le 4}\|\tilde{z}_i\|)>0,$$

即$y_\lambda$ 是一个正解. 因

$$y_\lambda''+a(t)y_\lambda=\lambda g(t)f(y_\lambda)\le\lambda g(t)f^{0,\|y_\lambda\|}=\lambda f^{0,\|y_\lambda\|}(z''+a(t)z),$$

由推论 2.4 可得

$$y_\lambda(t)\le\lambda f^{0,\|y_\lambda\|}z(t), t\in[0,1].$$

则可推得$\frac{f^{0,\|y_\lambda\|}}{\|y_\lambda\|}\ge\frac{1}{\lambda\|z\|}$. 由

$$\lambda\max\{f^{0,r}\|z\|, 2k\|z\|(m+1)m^{-1}\}<r$$

和 $\|y_\lambda\|>r$ 可得当$\lambda\to 0^+$时 $\|y_\lambda\|\to\infty$. 证毕.

**参考文献：**

[1] Jiang D Q, Liu H Z. Existence of positive solutions to second-order Neumann boundary value problem [J]. J Math Res Exp, 2000, 20: 360.

[2] Sun J P, Li W T, Cheng S S. Three positive solutions for second-order Neumann boundary value problem [J]. Appl Math Lett, 2004, 17:1079.

[3] Jiang D Q, Yang Y, Chu J F, *et al*. The monotone method for Neumann functional differential equations with upper and lower solutions in the reverse order [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2007, 67: 2815.

[4] Wang F, Zhang F. Existence of positive solutions of Neumann boundary value problem via a cone compression-expansion fixed point theorem of functional type [J]. J Appl Math Comput, 2011, 35: 341.

[5] Li Z L. Existence of positive solutions of superlinear second-order Neumann boundary value problem [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2010, 72: 3216.

[6] Ma R Y. Nonlinear periodic boundary value problems with sign-changing Green's function [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2011, 74: 1714.

[7] Zhang Y W, Li H X. Positive solutions of a second-order Neumann boundary value problem with a parameter [J]. Bull Aust Math Soc, 2012, 86:244.

[8] 闫东亮，马如云. 带导数项的Neumann问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：1136.

[9] Randhir S, Abdul M W. An effcient approach for solving second-order nonlinear differential equation with Neumann boundary conditions [J]. J Math Chem, 2015, 53: 767.

[10] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces [J]. SIAM Rev, 1976, 18: 620.

**引用本文格式：**

中　文：赵中姿. 允许Green函数取零值情形下的Neumann问题的正解 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：392.

英　文：Zhao Z Z. Positive solutions of Neumann problem with Green's function vanishing at some points [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 392.